现代数学译丛

有限置换群

H. 维兰特 著

科学出版社

现代数学译丛

有限置换群

H. 维兰特 著

王萼芳 译

科学出版社

1984

内 容 简 介

置换群论是群论的一个重要的组成部分，且有其特殊的研究方法，两者的研究是互相促进的。置换群论与组合数学密切相关，在其他方面（如编码等）也有值得重视的应用。本书叙述了有限置换群的基本概念及处理置换群的常用方法。本书篇幅较小，但内容比较完整，是一本重要的参考书。

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关方面的科技工作者阅读。

Helmut Wielandt
FINITE PERMUTATION GROUPS
Academic Press Inc. 1964

现代数学译丛
有 限 置 换 群
H. 维兰特 著
王萼芳 译
责任编辑 杜小杨 张鸿林
科 学 出 版 社 出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1984年3月第一版 开本：850×1168 1/32
1984年3月第一次印刷 印张：3 1/8
印数：0001—10,150 字数：77,000

统一书号：13031·2511
本社书号：3450·13—1

定价：0.62 元

序

除了近几十年来有特别进展的抽象群论以外，历史更为悠久的置换群理论也日益受到注意，由于每一个抽象群都和一个置换群同构，所以从代数结构的观点看来，抽象群与置换群并没有什么区别，然而有种种理由说明有必要对置换群进行特殊的研究．首先，一些在置换群中起重要作用的概念(例如不动点和传递性)在抽象群的理论中是没有的，这与下列事实是有关的：在每一个置换群中，某些子群可以自然而然地被区别出来(见 §3)．其次，对于抽象群的构造，置换群是一种很便利的方法，而且置换群还在许多数学领域中出现，在这些领域中，置换群得到了很好的应用．例如，在 Galois 理论(一个方程的群)和函数论(单值群)中．

在本书中，假定读者已经知道有限抽象群理论和置换群理论的基本知识；在最后一章中，假定读者知道关于群指标的 Frobenius 理论．这些基本原理可以在文献中所列的 W. Burnside, M. Hall, 或 A. Speiser 等人的书中找到．因为我们并不假定读者知道模指标和 p-块以及与之有关的知识，所以我们不涉及 R. Brauer (1943) 及其学派的重要结果．因此，本书不能说是关于置换群的一本完整的论著．我们的目的是汇集关于置换群的一些相当基本的定理，这些定理或者在流行的教科书中已经不再出现，或者还根本没有被写进教科书[在 W. A. Manning 的书(1921)以后，似乎还没有出版过有关置换群的专著]．本书的前半部在引进一些适当的符号以后，主要讨论关于多重传递群的较老的定理 (C. Jordan 和其他人的结果)．而在后半部讨论 W. A. Manning, I. Schur, J. S. Frame 及其他人关于单传递群的较新结果．其中包含一些没有发表的资料，例如定理 18.2 及 § 26.

本书的内容曾经于 1954—1955 年冬季这个学期在土宾根大

学以稍欠完整的形式讲述过. 从那时以来，书中讨论的一些问题又有了重要的进展. 因此我在英译本中加进了许多最近的结果，文献目录也增加了.

我要对 J. André 博士表示感谢，他在 1955 年整理了德文讲稿. 还要感谢 R. Bercov 博士，最初他由于要通过加州理工学院哲学博士学位的语言考试的一部分而翻译了本书前半部分，1961 年又同意翻译全书. 我也感谢 G. Glauberman，他帮助我阅读了校样并且提出了有用的建议.

赫尔穆特·维兰特

于土宾根

目　　录

第一章 基本概念

§1. 符　号

设Ω是任意元素的一个有限集合，我们用小写希腊字母表示这些元素，称为点．我们用大写希腊字母表示Ω的子集：$\Delta\subseteq\Omega$．如果Δ是Ω的一个真子集，就记作 $\Delta\subset\Omega$．空集$\varnothing$也被认为是Ω的一个子集．我们用$|\Delta|$表示Δ中点的个数(简称：Δ的长度)．本书中，我们设 $|\Omega|=n$．因此我们可以取自然数 1，2…，n 作为点：

$$\Omega=\{1,\cdots,n\}.$$

Ω上的一个置换就是Ω到自身的一个一一映射．置换用小写拉丁字母表示，如同抽象群的元素一样．我们用 α^p 表示点 $\alpha\in\Omega$ 在置换 p 下的象．记作

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1^p & 2^p & \cdots & n^p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha^p\end{pmatrix}.$$

我们根据公式$\alpha^{pq}=(\alpha^p)^q$来定义Ω上两个置换 p 和 q 的乘积；因此我们读乘积是从左至右，而不象通常习惯那样从右至左．pq 也是Ω上的一个置换．Ω上的全部置换对于上述运算构成一个群，对称群 S^{Ω}．这个群的单位元素，恒等置换 1，保持Ω中每个点不动，而且被这个性质完全确定，如果 p 将点 α 变到 β，那么 p 的逆置换 p^{-1} 将点 β 变到 α．

除了上面的写法以外，用轮换形式来表示置换也是很方便的．例如：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&5&4&6&7\end{pmatrix}=(123)(45)(6)(7)=(123)(45).$$

在最后的表达式中，单点轮换都被省略了．称为省略形式．单位

置换 1 只有单点轮换，它的省略形式记作一个单点轮换，例如 $1=(1)$． 每个置换可以唯一地（不考虑次序）分解成一些不相交的轮换． 例如，$(123)(234)$ 的轮换分解是 $(13)(24)=(24)(13)=\cdots$．

一个对换 t 是一个将两个点互换而保持其余各点不动的置换，因此是一个两点轮换：$t=(\alpha,\beta)$，其中 $\alpha,\beta\in\Omega$ 且 $\alpha\neq\beta$． 每个置换 p 都可以写成对换的乘积：$p=(\alpha_1\beta_1)\cdots(\alpha_s\beta_s)$． 这样的分解不是唯一确定的，但是 s 模 2 是被 p 唯一确定的． 如果 $s\equiv 0(2)$，我们就称 p 为偶置换，否则称 p 为奇置换． Ω 上偶置换组成一个群 A^Ω，称为 Ω 上的交错群． 如果 $n\geqslant 2$，A^Ω 是 S^Ω 的一个指数为 2 的正规子群． 顺便提一下，Ω 上的偶置换可以刻划为换位元素 $sts^{-1}t^{-1}$，其中 s 和 t 取遍 S^Ω (Ore, 1951)．

如果 p 和 s 是 Ω 上的两个置换，p 与 sps^{-1} 称为共轭的或相似的． $s^{-1}ps$ 的轮换形式可以从 p 的轮换形式中将每个点 α 换成 α^s 而得到．

我们将用大写拉丁字母来表示 S^Ω 的子集，特别地，以此表示 S^Ω 的子群，即 Ω 上的置换群． 由子集 K 生成的置换群，即 S^Ω 中所有包含 K 的子群的交，记作 $\langle K\rangle$．

我们用次数来表示置换群 $G\neq 1$ 实际变动的点的个数，即不是被所有 $g\in G$ 都保持不动的点的个数． 例如，如果 $n>1$，S^Ω 的次数就等于 n． 一个置换 $g\neq 1$ 的次数是循环群 $\langle g\rangle$ 的次数，也就是 g 的省略形式中点的个数． 我们称 G 中元素 $g\neq 1$ 的最小次数为 G 的极小次数． 在置换群的文献中，极小次数称为 G 的类． 但是我们希望避免这个含混的名称．

G 的阶（就是 G 中包含的置换的个数）记作 $|G|$，G 中子群 H 的指数 $|G|:|H|$ 记作 $|G:H|$． 此外，我们引进下列符号：

$H\leqslant G$ 表示：H 是 G 的一个子群．

$H<G$ 表示：$H\neq G$ 并且是 G 的一个子群．

$H\trianglelefteq G$ 表示：H 是 G 的一个正规子群．

$H\triangleleft G$ 表示：$H\neq G$ 并且是 G 的一个正规子群．

$H\cong G$ 表示：H 与 G 同构．

$H \rightrightarrows G$ 表示：G是H的一个同态象.

我们用H在G中的正规化子 $\mathbf{N}(H)$ 表示G中包含H作为正规子群的最大子群. $\mathbf{N}(H)$ 由G中所有满足 $gH = Hg$ 的元素 g 组成. H在G中的中心化子 $\mathbf{Z}(H)$ 由G中所有满足 $gh = hg$ (h 是H中任意元素)的 g 组成.

如果 $\Delta \subseteq \Omega$, $K \subseteq S^{\Omega}$, 我们用 Δ^K 表示全部 δ^k 组成的集合，其中 $\delta \in \Delta$, $k \in K$. 例如，$\Omega^K = \Omega$, $\phi^K = \phi$, $|\Delta^p| = |\Delta|$.

习题 1.1. 偶次的轮换都是奇置换.

习题 1.2. 一个置换的阶等于它的轮换表示中各个轮换的次数的最小公倍数.

§ 2. 传递成分 G^{Δ}

设G是Ω上一个置换群,简言之：$G \leqslant S^{\Omega}$. 如果Ω的一个子集Δ满足 $\Delta = \Delta^G$, 我们就说Δ是G的一个不动区，或者说Δ在G下不动. 这时,每个 $g \in G$ 诱导出Δ上的一个置换 g^{Δ}. 由所有 $g \in G$ 诱导出的 g^{Δ} 的全体组成的集合 G^{Δ} 称为G在Δ上的成分(例如，$G = G^{\Omega}$). G^{Δ} 是Δ上的一个置换群. 显然，$g \rightarrow g^{\Delta}$ 是一个同态映射：$G \rightrightarrows G^{\Delta}$. 如果这个映射是一个同构映射,即 $|G^{\Delta}| = |G|$, 那么成分 G^{Δ} 就称为是真实的.

显然，G的两个不动区的交与并还是不动区，对每一个子集 $\Gamma \subseteq \Omega$, G 的包含 Γ 的最小的不动区是 Γ^G.

Ω上的每个群G都有平凡不动区ϕ和Ω. 如果G没有其它不动区，G就称为传递的. 否则就称为非传递的. 因此,当Δ($\Delta \neq \phi$)是一个极小不动区时,成分 G^{Δ} 是传递的. 在这种情形,Δ称为G的一个轨道或传递集.

容易看出,G的全部传递集是Ω的一个划分：

引理 2.1. 每个点 $\alpha \in \Omega$ 恰属于G的一个传递集$\Delta = \alpha^G$. 两个点α和β属于同一个传递集当且仅当对某个 $g \in G$, $\beta = \alpha^g$.

例. S^{Ω} 总是传递的,甚至当 $n = 1$ 时也如此. A^{Ω} 只在 $n =$

2 时是传递的. 在置换 p 的轮换形式中同一个轮换中出现的点构成$\langle p\rangle$的一个传递集.

引理 2.2. 如果Δ是G的一个传递集并且 $s\in S^{\Omega}$, 那么Δ^s是$s^{-1}Gs$ 的一个传递集.

§3. 子 群 G_Δ

设 $G\leqslant S^{\Omega}$, $\Delta\subseteq\Omega$. G中那些使Δ中每个点都保持各自不动的置换组成G的一个子群 G_Δ. 如果Δ只包含一个点α, 我们就记$G_\Delta=G_\alpha$. 因此,我们有

$$G_\phi=G,\quad G_{\Gamma\cup\Delta}=G_\Gamma\cap G_\Delta=(G_\Gamma)_\Delta,$$
$$G_{\alpha\beta}=G_{\beta\alpha},\quad G_\Delta=\bigcap_{\alpha\in\Delta}G_\alpha\quad(\Delta\neq\phi).$$

容易证明:

命题 3.1. 对每个 $g\in G$ 和 $\Delta\subseteq\Omega$, 有 $g^{-1}G_\Delta g=G_{\Delta^g}$. 特别地,如果$G$保持$\Delta$不动,那么 $G_\Delta\trianglelefteq G$, $G/G_\Delta\cong G^\Delta$.

如果 $\alpha^G=\beta^G$, 那么 G_α 和 G_β 在G中共轭.

我们来证明一个基本的定理:

定理 3.2.

$$|G_\alpha||\alpha^G|=|G|.$$

证明. 我们来决定传递集α^G的长度 $|\alpha^G|$. 我们有 $\alpha^h=\alpha^r$ 当且仅当 $hr^{-1}\in G_\alpha$, 即 $h\in G_\alpha r$. 因此,点 r^h 的个数恰好等于不同的右陪集 $G_\alpha r$ 的个数. 而右陪集的个数是 $|G:G_\alpha|$, 由此即得

$$|\alpha^G|=|G|:|G_\alpha|.$$

命题 3.3. $|G:G_{\alpha\beta}|=|\alpha^G||\beta^{G_\alpha}|=|\beta^G||\alpha^{G_\beta}|$.

例如,这个公式说明, 在一个传递群G中 G_β 的包含α的传递集的长度等于 G_α 的包含β的传递集的长度.

证明. 应用 3.2 有

$$|G|=|G_\alpha||\alpha^G|=|G_{\alpha\beta}||\beta^{G_\alpha}||\alpha^G|.$$

下面的两个定理是 3.2 的进一步应用.

定理 3.4. 设 p 是一个素数，p^m 是 $|\alpha^G|$ 的一个因子. P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 那么 p^m 也是 $|\alpha^P|$ 的一个因子.

证明. 反复应用 3.2，知 p^m 整除

$$\begin{aligned}|\alpha^G||G_\alpha:P_\alpha| &= |G:G_\alpha||G_\alpha:P_\alpha| = |G:P_\alpha| \\ &= |G:P||P:P_\alpha| = |G:P||\alpha^P|.\end{aligned}$$

因为 $(|G:P|,p)=1$，所以 p^m 整除 $|\alpha^P|$.

定理 3.4′. 如果 p^m 是 p 整除 $|\alpha^G|$ 的最高方幂，那么在 α^G 中 P 的每个最短传递集 ψ 的长度都是 p^m.

证明. 根据 3.2，P 的每个传递集的长度都是 p 的方幂. 现在由 3.4，p^m 整除 $|\psi|$，如果 p^{m+1} 整除 $|\psi|$，那么 p^{m+1} 就将是 $|\alpha^G|$ 的一个因子，这与假设不符. 因此 $|\psi|=p^m$.

下面的一系列定理，3.5—3.7，是 Jordan（1873）得到的.

定理 3.5. 设子群 $U\leqslant G_\alpha$ 具有下述性质：G 的一个子群 V 只要在 G 中与 U 共轭，就一定在 G_α 中与它共轭. 设 N 是 U 在 G 中的正规化子. 如果 G 在 Ω 上是传递的，那么 N 在 U 的全部不动点组成的集合 Φ 上是传递的.

证明. 根据 3.1，$\Phi^N=\Phi$. 由假设 $\alpha\in\Phi$. 如果 β 是 Φ 中任意一个元素，那么由于 G 的传递性，存在某个 $g\in G$ 使得 $\alpha=\beta^g$. 我们作群 $V=g^{-1}Ug$，V 保持 α 不动. 根据假设，存在 $h\in G_\alpha$ 使得 $h^{-1}Vh=U$. 元素 $n=gh$ 属于 N 并且将 β 变到 α，因此 N 在 Φ 上是传递的.

对 U 所作的假设特别地对 G_α 本身也成立. 根据 Sylow 定理，也对 G_α 中每个 Sylow 子群成立. 因此我们得到下面两个定理.

定理 3.6. 在一个传递群 G 中，G_α 的正规化子在 G_α 保持不动的点上是传递的.

定理 3.7. 在一个传递群 G 中，G_α 的每一个 Sylow 子群 U 的正规化子在 U 保持不动的点上是传递的.

必须提到由 W. A. Manning（1918）给出的定理 3.6 的一个重要的推广：

定理 3.6′. 设 G 是 Ω 上的传递群，$\alpha\in\Gamma\subseteq\Omega$，$\Delta$ 是 G_Γ 的所有

保持不动的点的集合．如果 G_α 所包含的那些群 $g^{-1}G_\Gamma g$ $(g\in G)$ 组成 k 个不同的在 G_α 下共轭的集合 $\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_k$，那么 G_Γ 在 G 中的正规化子在 Δ 上恰有 k 个传递成分；这些传递成分的次数与 $\mathfrak{S}_1,\cdots,\mathfrak{S}_k$ 中包含的群的个数成比例．

这个定理包含 3.6 作为 $\Gamma=\alpha$ 的特殊情形．找出 3.5 的一个类似的推广或许是值得的．

如果 G_Δ 在其余的点 $\Omega-\Delta$ 上是传递的，那么它具有一个优越的性质，这对我们以后是有用的：

定理 3.8. 设 $\Gamma,\Delta\subseteq\Omega$，$G$ 是 Ω 上的传递群．再设 G_Γ 在 $\Omega-\Gamma$ 上是传递的而且 G_Δ 在 $\Omega-\Delta$ 上是传递的．如果 $|\Gamma|\leqslant|\Delta|$，那么存在 $g\in G$ 使得 $g^{-1}G_\Delta g\leqslant G_\Gamma$．

证明．如果 $\Gamma=\phi$ 或者 $\Delta=\Omega$，那么 $G_\Gamma=G$ 或者 $G_\Delta=1$，结论是显然的．现在设 $\Gamma\neq\phi$ 并且 $\Delta\neq\Omega$，因而 $\Delta\neq\phi$ 并且 $\Gamma\neq\Omega$．由于 G 的传递性，我们可以假设非空子集 $\Omega-\Gamma$ 和 $\Omega-\Delta$ 至少有一个公共点（因为如果一开始不是这种情况，我们可以用适当的共轭子群 $s^{-1}G_\Delta s$ 来代替 G_Δ）．于是群 $\langle G_\Gamma,G_\Delta\rangle=H$ 在 $\Omega-(\Gamma\cap\Delta)$ 上是传递的．现在如果 (a) 这个集合比 Ω 小，那么我们可以用归纳法得到结论；如果 (b) 它等于 Ω，那么 $\Gamma\cap\Delta=\phi$，并且由于 $\Omega-\Gamma$ 和 $\Omega-\Delta$ 有一个公共点，故有 $|\Gamma|+|\Delta|<|\Omega|$．这说明，对每个 $t\in G$，$\Omega-\Gamma$ 和 $\Omega-\Delta^t$ 至少有一个公共点．因此，如果我们选择 $t\in G$ 使得 $\Gamma\cap\Delta^t\neq\phi$，用 $t^{-1}G_\Delta t$ 代替 G_Δ，又回到情况 (a)．

我们叙述下列定理作为习题．

习题 3.9．如果 G 是传递的，那么 G 的所有元素的单点轮换的总数等于 G 的阶．即：在一个传递群中，每个元素平均保持一个点不动（证明：3.2）．

习题 3.10． 如果一个群共有 k 个传递集，那么群中每个元素平均保持 k 个点不动．

习题 3.11． 每个次数 $n>1$ 的传递群都有一个次数为 n 的元素（Jordan，1872．证明：3.9）．

习题 3.12. 在每一个阶可被某个给定素数 p 整除的置换群中，必有一个元素，它的轮换分解包含一个 p-轮换：$s=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)\cdots$（证明：Sylow 定理）.

习题 3.13. 置换群 G 的阶是奇的当且仅当 G 的所有传递成分的次数以及每个 $G_\alpha(\alpha\in\Omega)$ 的所有传递成分的次数都是奇的（证明：3.12，3.3；3.2）.

§4. 正则和半正则群

Ω 上的一个置换群 G 称为半正则的，如果对于每个 $\alpha\in\Omega$，都有 $G_\alpha=1$；G 称为正则的，如果 G 既是半正则的，又是传递的. 因此，每一个正则群都是半正则的，半正则群的子群及成分都是半正则的. 1 是半正则的. 对于半正则群，次数和极小次数是相同的.

命题 4.1. 半正则群 G 的所有传递集都有相同的长度，即 $|G|$.

证明. 3.2.

由 4.1 及 3.2 可得：

命题 4.2. 一个半正则群的阶是它的次数的一个因子. 一个传递群是正则的当且仅当它的阶和次数相等.

命题 4.3. 如果 G 在 S^Ω 内的中心化子 Z 是传递的，那么 G 是半正则的.

证明. 设 $\alpha, \beta\in\Omega$. 存在 $z\in Z$ 使得 $\alpha^z=\beta$. 由 3.1，$G_\alpha=z^{-1}G_\alpha z=G_\alpha z=G_\beta$. 因为 β 是任意的，所以 $G_\alpha=1$.

命题 4.4. 每个在 Ω 上传递的交换群 G 都是正则的. G 在 S^Ω 内的中心化子就是 G 本身.

证明. 因为 G 的中心化子 Z 包含传递群 G，所以由 4.3，G 是正则的. 同理，Z 也是正则的. 因此，$|Z|=|\Omega|=|G|$. 另一方面，$Z\geqslant G$，因此 $Z=G$.

习题 4.5. 半正则群的中心化子是传递的.

习题 4.5′. 如果 G 在 Ω 上是传递的，那么 G 在 S^Ω 内的中心化

子 Z 是半正则的，并且 $|Z|$ 等于 G_a 的不动点的个数（Kuhn, 1904）.

正则群的例子可以从任意抽象群的正则表示得到. 我们取 G 中元素作为被置换的"点". 对每个 $g\in G$，我们指定（Jordan, 1870, p. 60）置换

$$g^* = \begin{pmatrix} x \\ xg \end{pmatrix} \text{及} \ {}^*g = \begin{pmatrix} x \\ g^{-1}x \end{pmatrix}.$$

这两个对应在群 G 和由所有 g^* 与 ${}^*g$ 分别组成的 G 上的正则传递置换群 G^* 与 ${}^*G$ 之间建立起同构映射. 我们称 G^* 为 G 的右正则表示，${}^*G$ 为 G 的左正则表示. 作为一个应用，我们来证明下述关于抽象群的一个定理.

定理 4.6. 如果 $|G| = 2u$，u 是一个奇数. 那么 G 包含一个 u 阶正规子群.

证明. G 包含一个 2 阶元素 a. 由此推出 a^* 是 u 个对换的乘积，因而是一个奇置换. 因此 G^* 包含奇置换，从而 G^* 中所有偶置换组成的子群 N^* 是一个指数为 2 的正规子群. G 的与 N^* 对应的子群 N 就是所要求的正规子群.

§5. Frobenius 群

我们把一个次数等于 n，极小次数等于 $n-1$ 的传递群称为一个 Frobenius 群. 换句话说，Frobenius 群是一种非正则传递群 G，对 $\alpha\neq\beta$，都有 $G_{\alpha\beta}=1$. 这些重要的群被反复研究过. de Séguier 曾作过详尽的介绍（1912, pp. 94—137, 209—215）. 主要的结果是 Frobenius 的一个定理(1902)：

定理 5.1. 在一个 n 次 Frobenius 群中，n 次元素加上 1 组成一个正则群 R. 这是 G 的一个特征子群.

注. 这个定理至今只有借助于群指标理论才能证明. E. Witt 所给的一个简短的叙述转载在 Speiser 的书中（1937, p. 202）.

Thompson（1959, 1960）证明了一个长期未解决的猜想：

定理 5.1′. 定理5.1中提到的特征子群 R 是幂零的. 即: R 是它的 Sylow 子群的直积.

Wielandt (1958) 证明了定理5.1的一个推广:

定理 5.1″. 设 G 是一个任意的传递群. 定义 G_α^* 为 G_α 中由所有 $G_{\alpha\beta}(\alpha \neq \beta)$ 生成的子群. 那么, G 中存在唯一的传递正规子群 G^*, 使得 $G^* \cap G_\alpha = G_\alpha^*$.

可能的商群 $G/R \cong G_\alpha$ 的结构已在一定的程度上被了解了 (Zassenhaus, 1935a; Vincent, 1947). 这是这样一些有限群, 它们有一个域上的真实的矩阵表示, 其中只有单位矩阵才以 1 为特征值.

我们叙述下列结果作为习题:

习题 5.2. 设非传递群 G 的次数是 n 而极小次数是 $n-1$. 如果 G 的传递成分的次数都不等于 1, 那么, 它们都是真实的, 而且除了一个以外都是正则的 (Frobenius, 1902).

§6. 区

设 G 是 Ω 上的一个置换群. 我们称 Ω 的子集 ψ 为一个区, 如果对每个 $g \in G$, 象集合 ψ^G 与 ψ 或者相等或者没有公共元素. 显然, 整集 Ω, 空集 ϕ, 以及由单个点组成的集合 $\{\alpha\}$ 都是 Ω 上任一个群 G 的区. 我们称这些为平凡区. 此外, §2 中提到的不动区也都是区. 如果 $U \leqslant G$, 那么 G 的每一个区也都是 U 的区.

命题 6.1. 如果 ψ 和 ψ' 都是 G 的区, 那么它们的交 $\psi \cap \psi'$ 也是 G 的区.

因为, 如果对某个 $g \in G$, $\Delta = \psi \cap \psi'$ 与 Δ^g 有非空的交. 那么 ψ 与 ψ^g, ψ' 与 ψ'^g 也都有非空的交. 因此根据 ψ 和 ψ' 都是区这个事实就得到

$$\Delta^g = \psi^g \cap \psi'^g = \psi \cap \psi' = \Delta.$$

所以 Δ 也是一个区.

命题 6.2. 如果 $g \in G$, $U \leqslant G$, ψ 是 U 的一个区, 那么 ψ'^g 是

$g^{-1}Ug$的一个区.

证明. 设$u\in U$. 如果 $\psi^{g\cdot g^{-1}ug}\cap\psi^g\neq\phi$, 那么两边都用$g^{-1}$作用即得 $\psi^u\cap\psi\neq\phi$. 因此,由于ψ是U的一个区,所以$\psi^u=\psi$. 再用g作用就得 $\psi^{g\cdot g^{-1}ug}=\psi^g$.

由此推出, 如果ψ是G的一个区, 那么对每个 $g\in G$, ψ^g 也是G的区. 这样的两个区称为共轭的. 任意两个共轭的区或者相等或者不相交. 与G的某个区ψ共轭的全部区组成一个完全区系. 一个完全区系中的区都具有相同的长度. 如果G在Ω上是传递的,那么G的一个完全区系中各个区的并就是Ω. 因此有:

命题 6.3. 传递群G的区的长度整除G的次数.

我们用两个习题来结束这一节.

习题 6.4. 对任意两个不同的点 $\alpha,\beta\in\Omega$, 用 $\psi_{\alpha\beta}$ 表示G的所有包含α,β的区的交(根据 6.1, $\psi_{\alpha\beta}$ 也是G的一个区). 如果所有的 $\psi_{\alpha\beta}\neq\Omega$, 而且每个$\psi_{\alpha\beta}$仅包含平凡真子区, 那么 $G_{\alpha\beta}=1$.

习题 6.5. 由轮换 $(1\ 2\ 3\cdots n)$ 生成的群G的区是模d的同余类,这里d取遍n的所有因子.

§7. 非 本 原 群

本节中我们总假设G是传递的. 一个传递群称为非本原的如果至少有一个非平凡区ψ(即, $\psi\neq\phi,\{\alpha\},\Omega$). 这样的区在文献中通常称为非本原集. 我们给出传递群非本原性的一个充分条件.

命题 7.1. 如果传递群G包含一个不等于1的非传递正规子群N, 那么G是非本原的. N的全部传递集组成G的一个完全区系.

证明. 如果ψ是N的一个传递集,那么根据2.2, $\psi^g(g\in G)$是$g^{-1}Ng=N$ 的一个传递集. 因此G只能把N的不相交的传递集进行置换,所以这些传递集组成G的区. 因为 $N\neq 1$, 它们包含的点多于一个;由于N的非传递性, 它们是Ω的真子集;而由G的