高等学校教学用書

解析几何学

第一卷

裘光明編

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析几何学

第一卷

裘光明編

高等教育出版社

序　　言

本書是为綜合大学的数学、力学、天文等專业的解析几何課程的教材而編写的。全書分两卷，第一卷包含緒論和前八章，供上学期使用，第二卷包含后四章，供下学期使用。内容是按前高等教育部在 1954 年 10 月批准和頒发的解析几何教学大綱（初稿）为依据。只是材料編排的次序与大綱并不完全相同。

編者在北京大学数学力学系几何教研室連續 6 年（1952—1958）参加解析几何的教学工作。北大几何教研室，在全教研室的同志的参加下，在这 6 年內对于解析几何的教学工作投下了巨大的力量，因而积累了一些教学經驗。本書就是編者根据自己对于这些教学經驗的体会編写的。

值得談一下本書的形成过程，因为这多少反映了北大几何教研室全体同志学习苏联、結合中国实际、进行教材建設的一个方面。北大几何教研室所开設的解析几何一課，从院系調整后的 1952 年度开始，就依据苏联教学大綱来进行教学（1954 年启用的部頒大綱也是以苏联大綱为藍本的）。最初因为沒有自編教材，看到当时的苏联大綱上以狄隆涅和拉伊可夫合著的"解析几何学"一書作为第一本指定参考書，就动員了全教研室的力量，翻譯了这本書的第一卷作为教材。經过一年的教学，大家对于苏联教学大綱有了初步体会，对于苏联教材有了初步認識。这时考虑到狄隆涅等著的两卷"解析几何学"，共有 900 多頁（原文頁数），篇幅太多，学生閱讀不便，开始自編教材。1953 年度，在教研室主任的領导下，全教研室同志根据教学大綱，集体編写了一个"解析几何綱要"，发給同学使用。經过 1954 年度的修改和补充，这个"綱要"基本上

成为一个完整的教材的骨架。1955 年，教研室为了进一步巩固已經取得的教学經驗和完成解析几何的教材建設工作，提出了編写完整的講义的任务。于是在这以后的三、四年中，編者就逐步在原有的"綱要"的基础上編写起講义来。現在这本書就是根据两、三年来講义使用的情況，重新改写成的。

此外，北大几何教研室还曾与很多兄弟学校交流了講义和教学經驗。特别是在1954 年暑假由前高等教育部主办了"解析几何"教学研究座談会，全国各綜合大学数学系都派人参加了这次座談会。这次座談会的总結（刊載在"高等教育通訊"1954 年第 14 期）和各兄弟学校編的解析几何講义都是作者編写本書的参考資料。

本書的編写由于根据了北大几何教研室全体同志的教学經驗，利用了集体編写的"解析几何綱要"，学习了苏联的教材（特别是狄隆涅等著的两卷"解析几何学"）和兄弟学校的講义而完成的，沒有这些是不可能有目前形式的書呈現在讀者之前的。所以假如本書还有可取之处，还具备某些优点的話，这首先要归功于北大几何教研室全体同志在解析几何教学工作上的共同努力。相反地，本書的不适当、不成熟之处和更多的缺点，則完全是作者的学識和能力有限所致。

本書在編写过程中得到北大几何教研室同志的帮助，脫稿后又經江澤涵、吳祖基两位教授提出宝貴的修改意見。特在这里一并志謝。

* * * *

現在就本書第一卷的內容提出編者的一些意見。

一、編者同意 1954 年"解析几何"教学研究座談会总結的提法：用向量引进仿射坐标；把直角坐标看作仿射坐标的特例，把射影坐标看作齐次仿射坐标的推广；在仿射坐标中討論仿射性質，在直角坐标中討論度量性質，在射影坐标（齐次坐标）中討論射影性

質。因此，本書第一章首先講述向量的概念，而且在第三和第四两章中貫徹使用向量作为工具，使本書前五章以向量为中心而形成了一个整体，并且在全書各章中，一般都遵循了在仿射坐标中討論仿射性質和在直角坐标中討論度量性質的原則。

二、本書虽然集中地在第一和第二两章里講述了全部的向量理論，但是这并不妨碍在使用本書时分开講授这些知識。譬如說，可以象教学大綱的次序那样，把第二章 §2 和 §3 放在第三章 §2 之后，把第二章 §4 插在第四章 §4 中去講。同样地，要按照大綱的次序，把第五章的各节提前和把第六章整个放到緒論之后第一章之前来講也是完全可以的。

三、本書尽量根据教学大綱来选取題材。但是作为一本完整的書，总不免在某些地方超出大綱的范圍。这些超出大綱范圍的內容，特別用小号字排印，以便于讀者取舍。另一方面，大綱所列的內容，也有个別被排斥在正文之外的，其中計有向量的綫性相关的概念，三个平面的相交，以及直綫把和平面把的概念。除掉直綫把以外，这些都包含在本書的附录里了。

四、本書第一卷有附录四节，其中 §4 实际上是正文的內容（因为用到的代数知識較多才放在附录中），其他三节講的是与第一卷正文有关的一些代数知識。編者的意思是：对于不同时学习高等代数課程的讀者来說，本書所需要的高等代数的知識，在附录中完全有了。当然，編者还希望这个附录能用来說明解析几何和高等代数（主要是綫性代数）的种种血緣般的連系，使讀者对于解析几何能有更深一层的了解。

五、本書第一卷前身的講义，不仅曾在北大数学力学系的数学和力学两个專业使用过，而且还曾連續三年在北大物理系气象專业的高等数学一課程中使用作为解析几何部分（包括行列式和綫性方程組）的教材。因此在本書第七章中特別包含着用小号字

排印的"二阶曲綫"一节，对于將要全面地学习"二阶曲綫的一般理論"(在本書第十章中講述)的讀者来說，这一节完全是多余的。編者和在气象專业課中使用过这部分教材的同志的共同看法是：本書第一卷也可以在数学、力学和天文等專业以外的其他專业中使用。拿本書第一卷和物理、化学等專业以及工科各專业等通用的解析几何教材(例如勃立瓦洛夫的"解析几何学"或叶菲莫夫的"解析几何簡明教程")比較，本書第一卷完全包含了那些教材的基本內容。两者的主要不同点有两个：1. 本書一开头就講向量，而且在平面解析几何中也尽量利用向量，而工科各專业的通用教材則直到講空間解析几何之前才講向量，因而只在空間解析几何部分使用向量；2. 本書不仅講直角坐标，而且还講仿射坐标，而工科各專业的通用教材則只講直角坐标，这也是苏联的数学、力学等專业(和师范学院的数学專业)的解析几何教材与其他專业的同类教材的两个不同之点。編者認为这种差別不是必須的。先講向量和多用向量优点很多，这首先可以使讀者更好地学习到在解析几何和其他数学分支以至于力学中起越来越大的作用的向量方法；至于仿射坐标，則即使是工科各專业的学生，知道了也是好处甚多的，因为他們在学习画法几何中的軸測投影时，实际上就要用到仿射坐标，此外，懂得仿射坐标对于学习力学也有不少帮助。当然，假如要在数学、力学、天文以外的專业使用本書，必須根据各專业的教学大綱来取舍書中的教材。

六、最后，本書虽然每节都附有小量习題，但是这还是不够的。因为我們并未編出專門的习題集，建議讀者采用苏联 С. В. 巴哈伐洛夫等編的"解析几何习題集"(С. В. Бахвалов, П. С. Моденов и А. С. Пархоменко, Сборник задач по аналитической геометрии)。

裘光明 1958年6月

目　录

緒　論

一、几何学和几何学的对象

在中学的几何課程里我們曾經研究过平面上的直綫、直綫图形和圓，还研究过空間中的直綫、平面、多面体和圓柱、圓錐、球等立体。总的說来，可以說我們研究了与直綫和圓有关的图形，因为平面、圓柱面和圓錐面可以由直綫經过运动而产生，而且圓柱和圓錐的正截面又是圓，至于球面則可以由圓旋轉而成。那时我們沒有去討論圓柱和圓錐的斜截面，因为这样我們就会遇到另一类曲綫图形——所謂圓錐截綫，其中包括橢圓、双曲綫和拋物綫。但这决不是說几何学只研究与直綫和圓有关的图形。事实上早在古希腊时代就已經有人用中学几何的方法研究圓錐截綫了。

到底几何学是怎样的一門科学呢？几何学所研究的又是些什么呢？这問題不是一下子能够回答的，而且也只有通过相当多的几何知識的学习才能逐步得到明确的認識。我們現在試着在現有知識的基础上大略地来談一下这个問題。

我們生活在物質世界中。环顧周圍，看到的是以各种各样的形狀呈現于我們眼前的物体：方的門戶、窗子，圓的杯子、碟子，弯的直的树干，平的窪的路面，真是五花八門，包罗万象。物体在一定的时刻总以一定的形狀而存在，甚至其形狀还在一定的程度上刻划了其特性，門戶、窗子通常总做成方的，杯子、碟子通常总做成圓的，树干在使用时，愈直愈好，道路对于車輛行人来說，愈平愈好。这种方、圓、平、直，通过一定的物体而表現，本身虽不能独立存在，然而都在形式上刻划了物体的存在，我們称之为物体的形狀或者

物質的空間形式，它是物質存在的条件之一。而物体的这种形狀并不必須依附于特定的物体，例如除門、窗外，桌子、凳子、書本、紙張也有方形，除杯、碟外，瓶子、罐子、灯泡、灯罩也有圓形，直的还有鉛笔、尺、电杆、鉄軌，平的还有平玻璃、水面、桌面。即使同是門窗，可以是木質的也可以是鉄質的，同是杯碟，可以是瓷的也可以是玻璃的。当我們观察了和研究了許許多多具有不同形狀和相同形狀的东西以后，我們很自然地就有了抽去了现实物体的具体內容的方、圓、平、直等等关于形狀的概念，正是这种种形狀構成了几何学的对象，而且正是关于这种种形狀的知識構成了几何学。

我們看到，在中学几何里研究的正是这种从具体物体所抽象出来的各种形狀——所謂几何图形。因而我們在中学几何教本的开头說：几何学是研究几何图形的几何性質的科学。当然，随着几何学的发展，它的对象早已超出了以上所說的这种狹义的几何图形的范圍（这在緒論的第二节里有說明）。但是恩格斯为几何学所下的定义“几何学是研究現实世界的空間形式的科学”是仍然适用的，只要我們不把空間形式狹隘地理解成只是物体的形狀就成。同时无可怀疑地，物体的形狀仍然是而且也能永远是几何学对象的具体来源。

下面讓我們从历史的回顧方面进一步来說明一下几何学。

二、几何学历史簡述

几何知識可以說与人类文化有同样悠久的历史。这是毫不足怪的，因为人就生活在具有各种形狀的物体之中。在人們吸收知識发展文明的同时，也就吸收了和发展了关于形体的几何知識，例如文字就是从象形开始的。

在中国，很早就知道如何用繩子定直綫（今天在木工、瓦工和裁縫工人的工作中依然使用繩子作为定直綫的工具，“准繩”一詞

就由此而来)，用规(圓规)矩(角尺，类似于三角板)定方圓("规矩"一詞的来源)。也很早就知道了勾三股四弦五的直角三角形。我国早在三千年前就进入以农业生产为主的社会，精确地丈量土地和制訂历法成为必需，这大大地促进了几何学中某些方面知識的发展，例如平面图形面积的計算，直角三角形的应用，圓面积和圓周長的計算。特别是关于圓的知識的发展，造成了我国古代几何学家在圓周率近似值方面的极为輝煌的成就，最著名的是三国时代魏人刘徽的圓周率 3.14 和南北朝时代南朝祖冲之的密率 $\frac{355}{113}$。

在国外，埃及是文明古国之一，在几何知識的累积上是显得特别丰富的。这些知識在公元前七世紀时通过馬其頓帝国与古代希腊的文化交流，逐漸傳入希腊。由于当时在希腊，哲学思想以及論証和邏輯推理等方面知識已有独特的发展，这些几何知識經过很多希腊学者(特别是泰勒斯、毕搭哥拉、欧多克苏斯等)的研究、补充和整理，逐漸形成一种严謹的科学体系。几何学之成为系統的科学，可以說是从那个时代开始的。希腊几何学最后集大成的是欧几里得(大約生活在公元前 330—275 年間)。他写的"几何原本"(公元前 300 年)是一本极有系統的科学著作，直到現在还是中学几何教科書的藍本。这也就是为什么我們把中学所学的那种几何学叫做欧几里得几何学的緣故。

几何学在欧几里得以后 2000 年的長时期中，只有比較起来不大的修正和补充。直到十六至十七世紀，随着資本主义生产方式的成長，社会生产力的迅速发展，各种自然科学和技术都有了飞跃的进步，出現了新的数学問題，对数学提出了新的要求。于是，关于方程的理論有了很多发展，变量和函数的概念初步形成，在数学的两种对象——空間形式和数量关系之間逐漸建立起一种更紧密的連系，这种連系最后由笛卡儿(1596—1650)在他的著作"几何学"(1637)中固定了下来。他建立了平面上的点的坐标(所謂笛

卡儿的直角坐标），使几何对象（点、綫、面、体、圖形等等）可以用一定的数量关系（数、等式、不等式、方程、函数等等）把它表示出来。通过对于数量关系的研究而研究了几何对象，反之又給各种数量关系以直覺的几何解釋。由此創立了一种新的研究几何的方法，称为解析方法（与之相对，中学几何里所用的方法称为綜合方法或者几何方法），开始了新的一門以方法之别为名的几何学——解析几何学。由于这就是本課程的来源和內容，我們以后还要專門談論它。

解析几何的出現在方法上大大地推进了几何学。运用解析方法可以研究用綜合方法很难研究的复杂的几何图形（例如一般的曲綫、曲面）。只是在几何思想上，在对于几何学的看法上，还是沒有改进，依然停留在欧几里得时代所已經达到的阶段。甚至因为几何学思想的長期沒有发展，几何学还被形而上学者和唯心主义者当做反对辯証法和唯物主义的武器。

欧几里得以后的两千年中，几何学始終沒有解决的一个最大的問題是关于欧几里得第五公設的問題。第五公設就是中学平面几何教科書上的平行公理，它是用来肯定平面上过直綫外一点的平行綫的唯一性的。很多几何学家想利用其他公理来証明这个平行公理，結果都失敗了。直到最后由俄国数学家罗拔切夫斯基(1793—1856)在1829年証明了反面的結果：平行公理不能用其他公理来証明，才解决了这个历史性的問題。

在罗拔切夫斯基以前，已經有別的数学家不用平行公理而推得很多几何事实，特别值得提出的是薩凱里和倫倍脫，只是他們都沒有能指出平行公理可以被否定。与罗拔切夫斯基同时，高斯和鮑耶也肯定了平行公理不能从别的公理推出而且可以被否定，但是他們都沒有罗拔切夫斯基走得那么深入。因此我們把从否定第五公設出发而得到的第一个非欧几里得几何学，叫做罗拔切夫斯

基几何学。

罗拔切夫斯基采用了另一个平行公理：在平面上过直綫外一点有两条不与已知直綫相交的直綫，而且由此深入地展开了这个几何学，和証明了这个几何学与欧几里得几何学同样合理地可以存在。关于这方面的种种論証，都屬于“几何基础”一課的范圍，不在这里多說了。

第一个非欧几里得几何学的发現，在人类的認識上特别是对于空間的認識上起了革命性的作用。它整个地改变了人类的空間認識，使人們更进一步地認識到空間对于物質的依存性和几何知識对于經驗的依存性，有力地打击了肯定空間形式唯一性的形而上学的看法（例如牛頓）和認为几何知識先于人类实踐經驗的唯心主义看法（康德的所謂先驗論）；因而极大地促进了几何学的发展（各种新的几何学如雨后春筍般地兴起），助長了其他数学以及力学和物理学的发展（相对論发現的前提之一）。

非欧几里得几何学的发現和其他数学分支（特别是分析和代数）的发展，使几何学远远脫出了作为数学的一个独立部門这个框子。几何学发展到今天，由于在其研究上使用了数学其他部門（代数、分析、微分方程等）的各种成果，同时又將其研究結果应用于数学的其他部門，因之已无法絕然地把几何学从数学中分出来了。当然，几何学作为数学的一个組成部分，其对象还保有一定的独特性，只是現在它所处理的已不仅是一些直接的物質形狀或者說是狹义理解上的空間形式，而且是包括了与空間形式有一定的共通性的物質世界的各种形式和关系了。例如在几何学中所討論的空間，已經不仅是从通常的經驗出发的三維空間（欧几里得空間），而且还有相对論中所用的时空四維空間、把所有顏色当做对象的顏色空間、把函数当做对象的函数空間了。可以設想各种几何对象也有相应的改变。

三、解析几何学和坐标方法

上面已經說过，解析几何学是以方法命名的几何学。假如單从字面上看，广义地可以認为它包括一切运用解析方法研究的几何内容，那它的范圍实在是够大了，只是通常总是在非常狭窄的范圍内使用这个名称的，其内容只是用解析方法研究几何的一些基本知識，包括坐标方法初步和运用代数知識研究的一些較簡單的几何内容。尤其在使用它作为一門数学課程的名称时更是如此。一般地說，即使只利用簡單的分析知識的部分，就超出本課程的范圍而归之于微分几何了。

解析几何（以及一切运用解析方法的几何）的基础是坐标方法。坐标方法的萌芽可以說也是非常古远的事了。广泛地說，物品的分类編号就是給每件物品以坐标，因为我們可以就其类别、号碼把它与别的物品分别开来。当我們說某某同学坐在教室内第几排从左到右第几个位子的时候，当我們說某幢房子坐落在向东第几条街和向南第几条街的路口的时候，当我們說某人住在第几号楼第几层第几号房間的时候，我們实質上就是指的那个同学、那幢房子、那个人的"坐标"。在几何学上所差的最多只是被賦予坐标的是几何对象罢了。所以我們可以說，坐标方法是随着人类数学知識的进展而逐步形成的。

几何学中的所謂坐标方法，通常指的是建立在基本的几何对象（常常是点）和一个或者一組数之間的对应关系，为了要求能从坐标来研究几何对象，不仅要求同一个点的坐标是唯一的，而且要求不同的点的坐标是不同的，这样的对应关系就是所謂一一对应。通常在建立坐标时，除掉比較起来是极小的一部分点以外，总要求保持一一对应的。

由于坐标方法在点和数（坐标）之間建立了确定的关系，当适

当地把这关系推广到图形和函数（方程）之間时，就造成了在几何学中广泛应用代数（以后还有数学分析）知識的可能，也造成了用几何知識来促进代数和数学分析发展的可能。在数学历史上，坐标方法的产生和发展为数学分析（微积分）的出現創造了条件。在本課程中的以坐标方法为基础的解析几何知識，也为数学分析和代数課程作了它們所必需的一些准备。

坐标方法确立了两种数学对象——空間形式和数量关系之間的密切連系，为从变动的观点研究函数和图形創造了有利条件，笛卡儿就是在建立其坐标方法的同时建立起变量的概念的。在对象的連系中和从变动的观点下来进行研究，是高等数学有别于初等数学的特征，所以坐标方法是高等数学的基本方法之一。

坐标方法还在其他自然科学和技术上有广泛的应用。应用最广的是以坐标方法为基础的图表法，它最簡明地表达出某些数量之間的关系。此外，根据固定条件画出具有坐标的图綫，借以进行計算的諸模图算法，使用起来极为方便，是軍事上和工程上所不可缺少的。至于坐标方法的直接应用，則可以举出地理学上和天文学上决定方位的地理坐标和天文坐标作为例子。

以下我們就要具体地来介紹一下平面上的笛卡儿直角坐标，以及在直角坐标里研究几何图形的最簡單的例子。

四、平面上的直角坐标

我們在中学代数和三角里已經学过了平面上的直角坐标。在平面上取定两条互相垂直的直綫 OX 和 OY，它們的交点是点 O（在画图时通常把直綫 OX 画成水平的，把直綫 OY 画成鉛垂的；图 1）。于是对应于平面上的任何点 M，都有它到这两条直綫的两个距离（即垂直綫段 MM_y 和 MM_x 的長度）。我們在点 M 到直綫 OY 的距离之前，当 M 在 OY 右側时附加正号，当 M 在 OY 左側时附加