

高等学校教~~学~~用~~书~~

解析几何学

第一卷

裴光明編

高等教育出版社

高等学校教学用书



解析几何学

第一卷

裘光明編

高等教育出版社

序 言

本書是为綜合大学的数学、力学、天文等专业的解析几何課程的教材而編写的。全書分两卷，第一卷包含緒論和前八章，供上學期使用，第二卷包含后四章，供下學期使用。內容是按前高等教育部在1954年10月批准和頒发的解析几何教学大綱（初稿）为依据。只是材料編排的次序与大綱并不完全相同。

編者在北京大学数学力学系几何教研室連續6年（1952—1958）参加解析几何的教学工作。北大几何教研室，在全教研室的同志的参加下，在这6年內对于解析几何的教学工作投下了巨大的力量，因而积累了一些教学經驗。本書就是編者根据自己对于这些教学經驗的体会編写的。

值得談一下本書的形成过程，因为这多少反映了北大几何教研室全体同志学习苏联、結合中国实际、进行教材建設的一个方面。北大几何教研室所開設的解析几何一課，从院系調整后的1952年度开始，就依据苏联教学大綱来进行教学（1954年后用的部頒大綱也是以苏联大綱为藍本的）。最初因为没有自編教材，看到当时的苏联大綱上以狄隆涅和拉伊可夫合著的“解析几何学”一書作为第一本指定参考書，就动员了全教研室的力量，翻譯了這本書的第一卷作为教材。經過一年的教学，大家对于苏联教学大綱有了初步体会，对于苏联教材有了初步認識。这时考虑到狄隆涅等著的两卷“解析几何学”，共有960多頁（原文頁数），篇幅太多，学生閱讀不便，开始自編教材。1953年度，在教研室主任的领导下，全教研室同志根据教学大綱，集体編写了一个“解析几何綱要”，发給同学使用。經過1954年度的修改和补充，这个“綱要”基本上

成为一个完整的教材的骨架。1955年,教研室为了进一步巩固已经取得的教学经验和完成解析几何的教材建设工作,提出了编写完整的讲义的任务。于是在这以后的三、四年中,编者就逐步在原有的“纲要”的基础上编写起讲义来。现在这本书就是根据两、三年来讲义使用的情况,重新改写成的。

此外,北大几何教研室还与很多兄弟学校交流了讲义和教学经验。特别是在1954年暑假由前高等教育部主办了“解析几何”教学研究座谈会,全国各综合大学数学系都派人参加了这次座谈会。这次座谈会的总结(刊载在“高等教育通讯”1954年第14期)和各兄弟学校编的解析几何讲义都是作者编写本书的参考资料。

本书的编写由于根据了北大几何教研室全体同志的教学经验,利用了集体编写的“解析几何纲要”,学习了苏联的教材(特别是狄隆涅等著的两卷“解析几何学”)和兄弟学校的讲义而完成的,没有这些是不可能将目前形式的书呈现在读者之前的。所以假如本书还有可取之处,还具备某些优点的话,这首先要归功于北大几何教研室全体同志在解析几何教学工作上的共同努力。相反地,本书的不适当、不成熟之处和更多的缺点,则完全是作者的学识和能力有限所致。

本书在编写过程中得到北大几何教研室同志的帮助,脱稿后又经江泽涵、吴祖基两位教授提出宝贵的修改意见。特在这里一并志谢。

* * * *

现在就本书第一卷的内容提出编者的一些意见。

一、编者同意1954年“解析几何”教学研究座谈会总结的提法:用向量引进仿射坐标;把直角坐标看作仿射坐标的特例,把射影坐标看作齐次仿射坐标的推广;在仿射坐标中讨论仿射性质,在直角坐标中讨论度量性质,在射影坐标(齐次坐标)中讨论射影性

質。因此,本書第一章首先講述向量的概念,而且在第三和第四兩章中貫徹使用向量作為工具,使本書前五章以向量為中心而形成了一個整體,並且在全書各章中,一般都遵循了在仿射坐標中討論仿射性質和在直角坐標中討論度量性質的原則。

二、本書雖然集中地在第一和第二兩章里講述了全部的向量理論,但是這并不妨礙在使用本書時分開講授這些知識。譬如說,可以象教學大綱的次序那樣,把第二章§2和§3放在第三章§2之後,把第二章§4插在第四章§4中去講。同樣地,要按照大綱的次序,把第五章的各節提前和把第六章整個放到緒論之後第一章之前來講也是完全可以的。

三、本書盡量根據教學大綱來選取題材。但是作為一本完整的書,總不免在某些地方超出大綱的範圍。這些超出大綱範圍的內容,特別用小號字排印,以方便讀者取舍。另一方面,大綱所列的內容,也有個別被排斥在正文之外的,其中計有向量的綫性相關的概念,三個平面的相交,以及直綫把和平面把的概念。除掉直綫把以外,這些都包含在本書的附錄里了。

四、本書第一卷有附錄四節,其中§4實際上是正文的內容(因為用到的代數知識較多才放在附錄中),其他三節講的是與第一卷正文有關的一些代數知識。編者的意思是:對於不同時學習高等代數課程的讀者來說,本書所需要的高等代數的知識,在附錄中完全有了。當然,編者還希望這個附錄能用來說明解析幾何和高等代數(主要是綫性代數)的種種血緣般的連系,使讀者對於解析幾何能有更深一層的了解。

五、本書第一卷前身的講義,不僅曾在北大數學力學系的數學和力學兩個專業使用過,而且還曾連續三年在北大物理系氣象專業的高等數學一課程中使用作為解析幾何部分(包括行列式和綫性方程組)的教材。因此在本書第七章中特別包含着用小號字

排印的“二阶曲线”一节,对于将要全面地学习“二阶曲线的一般理论”(在本书第十章中讲述)的读者来说,这一节完全是多余的。编者和在气象专业课中使用过这部分教材的同志的共同看法是:本书第一卷也可以在数学、力学和天文等专业以外的其他专业中使用。拿本书第一卷和物理、化学等专业以及工科各专业等通用的解析几何教材(例如勃立瓦洛夫的“解析几何学”或叶菲莫夫的“解析几何简明教程”)比较,本书第一卷完全包含了那些教材的基本内容。两者的主要不同点有两个:1. 本书一开头就讲向量,而且在平面解析几何中也尽量利用向量,而工科各专业的通用教材则直到讲空间解析几何之前才讲向量,因而只在空间解析几何部分使用向量;2. 本书不仅讲直角坐标,而且还讲仿射坐标,而工科各专业的通用教材则只讲直角坐标,这也是苏联的数学、力学等专业(和师范学院的数学专业)的解析几何教材与其他专业的同类教材的两个不同点。编者认为这种差别不是必须的。先讲向量和多用向量优点很多,这首先可以使读者更好地学习到在解析几何和其他数学分支以至于力学中起越来越大的作用的向量方法;至于仿射坐标,则即使是工科各专业的学生,知道了也是好处甚多的,因为他们在学习画法几何中的轴测投影时,实际上就要用到仿射坐标,此外,懂得仿射坐标对于学习力学也有不少帮助。当然,假如要在数学、力学、天文以外的专业使用本书,必须根据各专业的教学大纲来取舍书中的教材。

六、最后,本书虽然每节都附有少量习题,但是这还是不够的。因为我们并未编出专门的习题集,建议读者采用苏联 С. В. 巴哈伐洛夫等编的“解析几何习题集”(С. В. Бахвалов, П. С. Моделов и А. С. Пархоменко, Сборник задач по аналитической геометрии)。

袁光明 1958年6月

目 录

序 言	7
緒 論	1
第一章 向量和坐标	14
§ 1. 向量概念	14
1. 向量概念的物理来源(14) 2. 向量(15) 3. 向量的相等(16) 4. 向量的共线和共面(18)	
§ 2. 向量的两种基本的运算	20
1. 向量的加法(20) 2. 数乘向量的乘法(25) 3. 向量的线性组合和向量的分解(31)	
§ 3. 向量和点的坐标	37
1. 直线上的向量和点的坐标(37) 2. 平面上的向量和点的坐标(39) 3. 空间中的向量和点的坐标(42)	
§ 4. 用坐标进行向量的运算	44
1. 用坐标作向量的加法和数乘向量的乘法(44) 2. 向量共线的条件. 三点共线的条件(46) 3. 线段的分点的坐标(47)	
§ 5. 一些补充概念	50
1. 向量的长度和向量之间的角(50) 2. 直角坐标系(51) 3. 定向(53) 4. 左右坐标系(56) 5. 有向平面上的有向角(56)	
第二章 向量的数量乘积和向量乘积	58
§ 1. 投影的理论	58
1. 平行投影(58) 2. 向量在轴上的投影(61) 3. 关于向量的投影的定理(62)	
§ 2. 数量乘积	63
1. 数量乘积的定义(63) 2. 数量乘积的性质(64) 3. 数量乘积的计算(65) 4. 长度和角. 两点之间的距离(68) 5. 方向余弦(69)	
§ 3. 有向面积	72
1. 有向面积的定义(72) 2. 有向面积的性质(73) 3. 有向面积的计算(75) 4. 平行四边形和三角形的面积(77)	
§ 4. 向量乘积和混合乘积	78
1. 向量乘积的定义和性质(78) 2. 混合乘积和有向体积(80) 3. 向量乘积的计算(85) 4. 混合乘积的计算(86) 5. 平行六面体和四面体	

的体积(88)

第三章 平面上的直綫.....92

§ 1. 平面上的直綫的方程.....92

1. 直綫作为点的軌迹(92) 2. 平面上的直綫的各种方程(93) 3. 关于平面上的直綫的基本定理(96) 4. 直綫方程的各种情形(98) 5. 直綫的作图(100)

§ 2. 平面上的直綫的仿射性質.....101

1. 两条直綫相交、平行和重合的条件(101) 2. 直綫束(103) 3. 三条直綫共点的条件(107) 4. 二元一次不等式的几何意义(109)

§ 3. 平面上的直綫的度量性質.....113

1. 两条直綫之間的角(114) 2. 从一条直綫到另一条直綫的角(114) 3. 直綫的法向量(116) 4. 直綫的法方程(117) 5. 点到直綫的距离(119)

第四章 空間中的直綫和平面.....123

§ 1. 空間中的直綫的方程.....123

§ 2. 空間中的平面的方程.....126

1. 平面作为点的軌迹(126) 2. 平面的各种方程(127) 3. 关于空間中的平面的基本定理(129) 4. 平面方程的各种情形(130) 5. 平面在坐标平面上的截痕, 平面的作图(131)

§ 3. 空間中的直綫和平面的仿射性質.....135

1. 两个平面相交、平行和重合的条件(136) 2. 直綫作为两个平面的交綫(137) 3. 空間中的直綫的作图(140) 4. 平面束(142) 5. 直綫和平面的相互位置, 三个平面相交于一个点的条件(143) 6. 空間中的两条直綫的相互位置(145) 7. 三元一次不等式的几何意义(146)

§ 4. 空間中的直綫和平面的度量性質.....149

1. 两条直綫之間的角(149) 2. 平面的法向量(150) 3. 平面的法方程(152) 4. 点到平面的距离(154) 5. 直綫和平面之間的角(155) 6. 两个平面之間的角(155) 7. 点到直綫的距离(158) 8. 两条相錯直綫之間的距离(159)

第五章 坐标变换.....163

§ 1. 平面的坐标变换.....163

1. 平面的仿射坐标变换(163) 2. 平面的直角坐标变换(169) 3. 取两条相交直綫作为新坐标軸的坐标变换的公式(172)

§ 2. 空間的坐标变换.....174

§ 3. 欧勒角.....176

第六章 橢圓、双曲綫和拋物綫.....182

§ 1. 橢圓和双曲綫.....182

1. 圓(182)	2. 橢圓的定義和標準方程(184)	3. 橢圓的形狀(187)
4. 雙曲線的定義和標準方程(188)	5. 雙曲線的形狀(190)	
§ 2. 橢圓和雙曲線的另一種定義, 拋物綫	194	
1. 橢圓、雙曲線和拋物綫的統一的定義(194)	2. 橢圓和雙曲線的兩種定義的等價性(195)	3. 拋物綫(197)
4. 橢圓、雙曲線和拋物綫的統一形狀的方程(199)		
§ 3. 橢圓、雙曲線和拋物綫在極坐標里的方程	202	
1. 極坐標(202)	2. 極坐標和直角坐標的關係(203)	3. 直綫和圓在極坐標里的方程(203)
4. 橢圓、雙曲線和拋物綫在極坐標里的方程	205	
第七章 曲綫和曲面概論	208	
§ 1. 平面上的曲綫	208	
1. 曲綫的普通方程(208)	2. 曲綫方程和函數, 曲綫的參數方程(209)	
3. 代數曲綫和它的階(210)	4. 曲綫的分解、曲綫的相交(212)	
§ 2. 二階曲綫	215	
1. 用移軸變換簡化沒有坐標乘積項的二次方程(215)	2. 用轉軸變換把一般的二次方程化成沒有坐標乘積項的方程(218)	3. 用直角坐標變換簡化一般的二次方程, 例(220)
§ 3. 曲面概論	224	
1. 球面(224)	2. 球面的參數方程, 球坐標(226)	3. 曲面的定義(228)
4. 代數曲面和它的階(229)	5. 空間中的曲綫(229)	
§ 4. 柱面、錐面和旋轉曲面	232	
1. 柱面(232)	2. 柱面和平行投影的關係(235)	3. 錐面(237)
4. 旋轉曲面(239)		
第八章 橢圓面、雙曲面和拋物面	246	
§ 1. 橢圓面、雙曲面和拋物面	246	
1. 橢圓面(246)	2. 雙曲面(248)	3. 拋物面(250)
§ 2. 單葉雙曲面和雙曲拋物面的直母綫	253	
1. 直母綫(253)	2. 單葉雙曲面的直母綫(254)	3. 單葉雙曲面的另一種求直母綫法(260)
4. 雙曲拋物面的直母綫(262)	5. 雙曲拋物面的另一種求直母綫法(267)	
附 录 綫性代數初步	1	
§ 1. 向量空間	1	
1. 向量空間的概念(1)	2. 向量的綫性相關和綫性無關(4)	3. 向量空間的基和維數(5)
§ 2. 矩陣和行列式	8	
1. 矩陣和行列式的定義(8)	2. 二階和三階行列式的若干性質(11)	

3. 行列式的行和列的平等性(12)	4. 行列式的基本性質(15)	5. 行列式的展开式(18)	6. 行列式的其他一些重要性質(20)	7. 行列式和矩陣的秩(23)	
§ 3. 綫性方程組					28
1. 行列式不等于零的綫性方程組和它的解(28)	2. 綫性方程組有解的条件(32)	3. 齐次綫性方程組(36)			
§ 4. 平面束和平面把					40
1. 两个平面的相互位置(40)	2. 三个平面的相互位置, 三个平面共束的条件(41)	3. 平面把, 四个平面共把的条件(43)			
习題答案					48

緒 論

一、几何学和几何学的对象

在中学的几何課程里我們曾經研究过平面上的直綫、直綫图形和圓，还研究过空間中的直綫、平面、多面体和圓柱、圓錐、球等立体。总的說来，可以說我們研究了与直綫和圓有关的图形，因为平面、圓柱面和圓錐面可以由直綫經過运动而产生，而且圓柱和圓錐的正截面又是圓，至于球面則可以由圓旋轉而成。那时我們沒有去討論圓柱和圓錐的斜截面，因为这样我們就会遇到另一类曲綫图形——所謂圓錐截綫，其中包括橢圓、双曲綫和抛物綫。但这决不是說几何学只研究与直綫和圓有关的图形。事实上早在古希腊时代就已經有人用中学几何的方法研究圓錐截綫了。

到底几何学是怎样的一門科学呢？几何学所研究的又是些什么呢？这問題不是一下子能够回答的，而且也只有通过相当多的几何知識的学习才能逐步得到明确的認識。我們現在試着在現有知識的基础上大略地来談一下这个問題。

我們生活在物質世界中。环顧周围，看到的是以各种各样的形狀呈現于我們眼前的物体：方的門戶、窗子，圓的杯子、碟子，弯的直的树干，平的窪的路面，真是五花八門，包罗万象。物体在一定的时刻总以一定的形狀而存在，甚至其形狀还在一定的程度上刻划了其特性，門戶、窗子通常总做成方的，杯子、碟子通常总做成圓的，树干在使用时，愈直愈好，道路对于車輛行人來說，愈平愈好。这种方、圓、平、直，通过一定的物体而表現，本身虽不能独立存在，然而都在形式上刻划了物体的存在，我們称之为物体的形狀或者

物質的空間形式，它是物質存在的條件之一。而物體的這種形狀並不必須依附於特定的物體，例如除門、窗外，桌子、凳子、書本、紙張也有方形，除杯、碟外，瓶子、罐子、燈泡、燈罩也有圓形，直的還有鉛筆、尺、電杆、鐵軌，平的還有平玻璃、水面、桌面。即使同是門窗，可以是木質的也可以是鐵質的，同是杯碟，可以是瓷的也可以是玻璃的。當我們觀察了和研究了許許多多具有不同形狀和相同形狀的東西以後，我們很自然地就有了抽去了現實物體的具體內容的方、圓、平、直等關於形狀的概念，正是這種種形狀構成了幾何學的對象，而且正是關於這種種形狀的知識構成了幾何學。

我們看到，在中學幾何裏研究的正是這種從具體物體所抽象出來的各種形狀——所謂幾何圖形。因而我們在中學幾何教本的開頭說：幾何學是研究幾何圖形的幾何性質的科學。當然，隨著幾何學的發展，它的對象早已超出了以上所說的這種狹義的幾何圖形的範圍（這在緒論的第二節里有說明）。但是恩格斯為幾何學所下的定義“幾何學是研究現實世界的空間形式的科學”是仍然適用的，只要我們不把空間形式狹隘地理解成只是物體的形狀就成。同時無可懷疑地，物體的形狀仍然是而且也能永遠是幾何學對象的具體來源。

下面讓我們從歷史的回顧方面進一步來說明一下幾何學。

二、幾何學歷史簡述

幾何知識可以說與人類文化有同樣悠久的歷史。這是毫不足怪的，因為人就生活在具有各種形狀的物體之中。在人們吸收知識發展文明的同時，也就吸收了和發展了關於形體的幾何知識，例如文字就是從象形開始的。

在中國，很早就知道如何用繩子定直線（今天在木工、瓦工和裁縫工人的工作中依然使用繩子作為定直線的工具，“准繩”一詞

就由此而來),用規(圓規)矩(角尺,类似于三角板)定方圓(“規矩”一詞的來源)。也很早就知道了勾三股四弦五的直角三角形。我國早在三千年前就進入以農業生產為主的社會,精確地丈量土地和制訂歷法成為必需,這大大地促進了幾何學中某些方面知識的發展,例如平面圖形面積的計算,直角三角形的應用,圓面積和圓周長的計算。特別是關於圓的知識的發展,造成了我國古代幾何學家在圓周率近似值方面的極為輝煌的成就,最著名的是三國時代魏人劉徽的圓周率 3.14 和南北朝時代南朝祖沖之的密率 $\frac{355}{113}$ 。

在國外,埃及是文明古國之一,在幾何知識的累積上是顯得特別豐富的。這些知識在公元前七世紀時通過馬其頓帝國與古代希臘的文化交流,逐漸傳入希臘。由於當時在希臘,哲學思想以及論證和邏輯推理等方面知識已有獨特的发展,這些幾何知識經過很多希臘學者(特別是泰勒斯、畢達哥拉、歐多克蘇斯等)的研究、補充和整理,逐漸形成一種嚴謹的科學體系。幾何學之成為系統的科學,可以說是從那個時代開始的。希臘幾何學最後集大成的是歐几里得(大約生活在公元前 330—275 年間)。他寫的“幾何原本”(公元前 300 年)是一本極有系統的科學著作,直到現在還是中學幾何教科書的藍本。這也就是為什麼我們把中學所學的那種幾何學叫做歐几里得幾何學的緣故。

幾何學在歐几里得以後 2000 年的長時期中,只有比較起來不大的修正和補充。直到十六至十七世紀,隨著資本主義生產方式的成長,社會生產力的迅速發展,各種自然科學和技術都有了飛躍的進步,出現了新的數學問題,對數學提出了新的要求。於是,關於方程的理論有了很多發展,變量和函數的概念初步形成,在數學的兩種對象——空間形式和數量關係之間逐漸建立起一種更緊密的連系,這種連系最後由笛卡兒(1596—1650)在他的著作“幾何學”(1637)中固定了下來。他建立了平面上的點的坐標(所謂笛

卡儿的直角坐标),使几何对象(点、线、面、体、图形等等)可以用一定的数量关系(数、等式、不等式、方程、函数等等)把它表示出来。通过对于数量关系的研究而研究了几何对象,反之又给各种数量关系以直觉的几何解释。由此创立了一种新的研究几何的方法,称为解析方法(与之相对,中学几何里所用的方法称为综合方法或者几何方法),开始了新的一门以方法之别为名的几何学——解析几何学。由于这就是本课程的来源和内容,我们以后还要专门谈论它。

解析几何的出现方法上大大地推进了几何学。运用解析方法可以研究用综合方法很难研究的复杂的几何图形(例如一般的曲线、曲面)。只是在几何思想上,在对于几何学的看法上,还是没有改进,依然停留在欧几里得时代所已经达到的阶段。甚至因为几何学思想的长期没有发展,几何学还被形而上学者和唯心主义者当做反对辩证法和唯物主义的武器。

欧几里得以后的两千年中,几何学始终没有解决的一个最大的问题是关于欧几里得第五公设的问题。第五公设就是中学平面几何教科书上的平行公理,它是用来肯定平面上过直线外一点的平行线的唯一性的。很多几何学家想利用其他公理来证明这个平行公理,结果都失败了。直到最后由俄国数学家罗拔切夫斯基(1793—1856)在1829年证明了反面的结果:平行公理不能用其他公理来证明,才解决了这个历史性的问题。

在罗拔切夫斯基以前,已经有别的数学家不用平行公理而推得很多几何事实,特别值得提出的是萨凯里和伦倍脱,只是他们都没有能指出平行公理可以被否定。与罗拔切夫斯基同时,高斯和鲍耶也肯定了平行公理不能从别的公理推出而且可以被否定,但是他们都没有罗拔切夫斯基走得那么深入。因此我们把从否定第五公设出发而得到的第一个非欧几里得几何学,叫做罗拔切夫斯

基几何学。

罗拔切夫斯基采用了另一个平行公理：在平面上过直线外一点有两条不与已知直线相交的直线，而且由此深入地展开了这个几何学，和证明了这个几何学与欧几里得几何学同样合理地可以存在。关于这方面的种种论证，都属于“几何基础”一课的范围，不在这这里多说了。

第一个非欧几里得几何学的发现，在人类的认识上特别是对于空间的认识上起了革命性的作用。它整个地改变了人类的空間認識，使人们更进一步地認識到空間对于物質的依存性和几何知識对于經驗的依存性，有力地打击了肯定空間形式唯一性的形而上学的看法（例如牛頓）和認為几何知識先于人类实践經驗的唯心主义看法（康德的所謂先驗論）；因而极大地促进了几何学的发展（各种新的几何学如雨后春笋般地兴起），助长了其他数学以及力学和物理学的发展（相对論发现的前提之一）。

非欧几里得几何学的发现和其他数学分支（特别是分析和代数）的发展，使几何学远远脱出了作为数学的一个独立部門这个框子。几何学发展到今天，由于在其研究上使用了数学其他部門（代数、分析、微分方程等）的各种成果，同时又將其研究結果应用于数学的其他部門，因之已无法絕然地把几何学从数学中分出来了。当然，几何学作为数学的一个組成部分，其对象还保有一定的独特性，只是現在它所处理的已不仅是一些直接的物質形狀或者說是狭义理解上的空間形式，而且是包括了与空間形式有一定的共通性的物質世界的各种形式和关系了。例如在几何学中所討論的空間，已經不仅是从通常的經驗出发的三維空間（欧几里得空間），而且还有相对論中所用的时空四維空間、把所有顏色当做对象的顏色空間、把函数当做对象的函数空間了。可以設想各种几何对象也有相应的改变。

三、解析几何学和坐标方法

上面已經說過，解析几何学是以方法命名的几何学。假如單从字面上看，广义地可以認為它包括一切运用解析方法研究的几何内容，那它的范围实在是够大了，只是通常总是在非常狭窄的范围内使用这个名称的，其内容只是用解析方法研究几何的一些基本知識，包括坐标方法初步和运用代数知識研究的一些較簡單的几何内容。尤其在使用它作为一門数学課程的名称时更是如此。一般地說，即使只利用簡單的分析知識的部分，就超出本課程的范围而归之于微分几何了。

解析几何（以及一切运用解析方法的几何）的基础是坐标方法。坐标方法的萌芽可以說也是非常古远的事了。广泛地說，物品的分类编号就是給每件物品以坐标，因为我們可以就其类别、号码把它与別的物品分別开来。当我们說某某同学坐在教室内第几排从左到右第几个位子的时候，当我们說某幢房子坐落在向东第几条街和向南第几条街的路口的时候，当我们說某人住在第几号楼第几层第几号房間的时候，我們實質上就是指的那个同学、那幢房子、那个人的“坐标”。在几何学上所差的最多只是被賦予坐标的是几何对象罢了。所以我們可以說，坐标方法是随着人类数学知識的进展而逐步形成的。

几何学中的所謂坐标方法，通常指的是建立在基本的几何对象（常常是点）和一个或者一组数之間的对应关系，为了要求能从坐标来研究几何对象，不仅要求同一个点的坐标是唯一的，而且要求不同的点的坐标是不同的，这样的对应关系就是所謂一一对应。通常在建立坐标时，除掉比較起来是极小的一部分点以外，总要求保持一一对应的。

由于坐标方法在点和数(坐标)之間建立了确定的关系，当适

当地把这关系推广到图形和函数(方程)之間时,就造成了在几何学中广泛应用代数(以后还有数学分析)知識的可能,也造成了用几何知識来促进代数和数学分析发展的可能。在数学历史上,坐标方法的产生和发展为数学分析(微积分)的出現創造了条件。在本課程中的以坐标方法为基础的解析几何知識,也为数学分析和代数課程作了它們所必需的一些准备。

坐标方法确立了两种数学对象——空間形式和数量关系之間的密切連系,为从变动的观点研究函数和图形創造了有利条件,笛卡儿就是在建立其坐标方法的同时建立起变量的概念的。在对象的連系中和从变动的观点下来进行研究,是高等数学有别于初等数学的特征,所以坐标方法是高等数学的基本方法之一。

坐标方法还在其他自然科学和技术上有广泛的应用。应用最广的是以坐标方法为基础的图表法,它最簡明地表达出某些数量之間的关系。此外,根据固定条件画出具有坐标的图綫,借以进行計算的諾模图算法,使用起来极为方便,是軍事上和工程上所不可缺少的。至于坐标方法的直接应用,則可以举出地理學上和天文學上决定方位的地理坐标和天文坐标作为例子。

以下我們就要具体地来介紹一下平面上的笛卡儿直角坐标,以及在直角坐标里研究几何图形的最簡單的例子。

四、平面上的直角坐标

我們在中学代数和三角里已經学过了平面上的直角坐标。在平面上取定两条互相垂直的直綫 OX 和 OY ,它們的交点是点 O (在画图时通常把直綫 OX 画成水平的,把直綫 OY 画成鉛垂的;图 I)。于是对应于平面上的任何点 M ,都有它到这两条直綫的两个距离(即垂直綫段 MM_y 和 MM_x 的长度)。我們在点 M 到直綫 OY 的距离之前,当 M 在 OY 右側时附加正号,当 M 在 OY 左側时附加