管 理 运 筹 学

张新越　崔玉亭　编

目　录

第二章　图与网络最优化

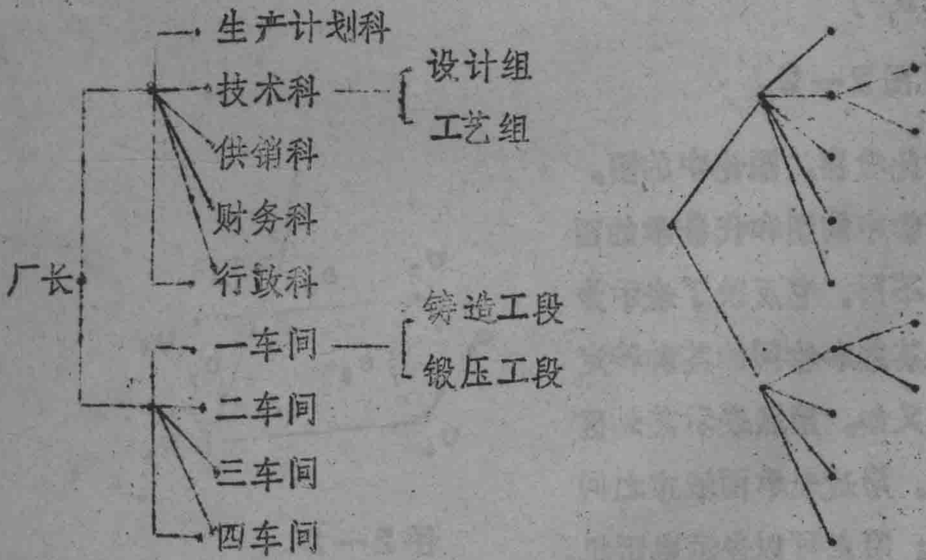
图论是近二十多年来发展速 ，应用十分广泛的运筹学分支。它在物理、化学、生物、计算机科学、社会科学及经济管理等各个不同领域都有广泛应用。本章将讲述与工农业生产、经济管理密切相关的一部分图与网络的内容。首先介绍图的基本概念。

§2.1　基本概念

1. 图

为了理解图论中的图是什么，我们先看一个例。

例1. 一个大企业有许多管理部门、生产车间，我们为了说明它们的隶属关系，可以直观地表示：



如果把厂长、各科（组）、各车间（工段）用点来表示，把它们有直属领导关系的用线连接起来，就成为图2—1，这就是一个图。锻地说，它是由若干个点（不计较点的位置）的集合和某些

“点对”的连线（不计较长短、曲直）的集合，两者组成的二元组。

定义2.1 图G是一个非空有限集V（G）中给定的无序对构成的集合E（G），两者所组成的二元组。记G＝（V(G)，E(G)）式简记G＝（V，E）。

V的元素称为顶点，E的元素称为边。一条边若是连接点μ，υ的，则记为〔μ，υ〕或〔υ，μ〕。

例2．图G＝（V，E），其中

$$V= \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \upsilon_5$$

$$E= e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$$

其中，$e_1=〔\upsilon_1, \upsilon_2〕$，$e_2=〔\upsilon_1, \upsilon_2〕$，$e_3=〔\upsilon_2, \upsilon_4〕$，$e_4=〔\upsilon_3, \upsilon_4〕$，$e_5=〔\upsilon_3, \upsilon_5〕$，$e_6=〔\upsilon_5, \upsilon_5〕$，$e_7=〔\upsilon_1, \upsilon_5〕$

见图2—2。

由此看出，图论中的图，与几何学中的图和代数学的图形截然不同。它反映了表示为顶点的某些事物间的某种特定关系。又如，用点表示某地区的城市，用边表示两城市之间的公路；用点可以表示电话机，用边表示电话线路；用点集表示某一群人，用边集表示这群人之间的认识关系等等。

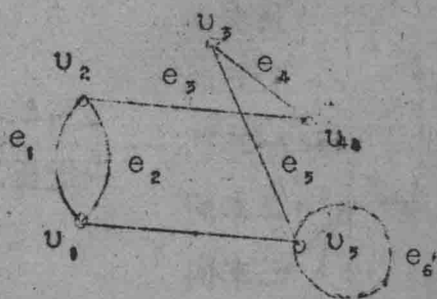


图2—2

在G＝（V·E）中，如果边e＝〔μ，υ〕∈E，则称μ，

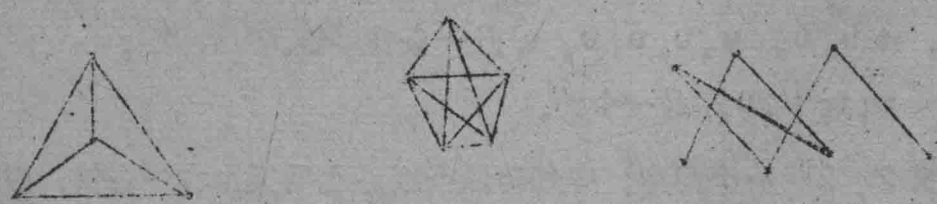
υ是边e的端点，也称e是μ（或υ）的关联边。若μ、υ同与一条边相关联，就说μ与υ是相邻的。若两条边e_1与e_2有一个公共端，则称e_1与e_2是相邻的。

若边的两个端点相同，则称之为环。图2—2中e_6＝〔υ_5，υ_5〕是一个环。若两个点之间多于一条边，称之为多重边，含多重边的图称为多重图。图2—2中，点υ_1与υ_2之间有两条边，图2—2是多重图。

无环、无多重边的图称为简单图。图2—1是简单图。

如果一个简单图G中各对顶点都有一条边相连，就称图G为完全图。n个顶点的完全图记为K_n。（见图2—3）

如果在图G＝（V，E）中，V可以划分成两个集合X、Y满足V＝XUY，XUY＝ϕ，使得G中的每条边，一个端点在X中，另一个端点在Y中，则称图G为二分图（见图2—3）



(a)完全图K_4　　(b)完全图K_5　　(c)二分图

图2—3

2．连通图

在图G＝（V，E）中，一个点、边交替的序列w＝$\upsilon_0 e_1 \upsilon_1 e_k \cdots e_k \upsilon_i$且满足$e_i$＝〔$\upsilon_{i-1}$，$\upsilon_1$〕，$1 \leqslant i \leqslant K$，则称w是一条从$\upsilon_0$到$\upsilon_k$的链。$\upsilon_0$、$\upsilon_k$分别是链w的起点和终点。K称为

链 的长。在简单图中，链可以由顶点序列表示。如$W=v_0v_1v_2\cdots v_k$。

如果链W中所有e_i都不相同，则称W为简单链。如果链W中所有v_i都不相同，如称W为初等链，（或通路）。初等链的起点与终点相同称为圈。例如：图2—4中，图G是简单图。

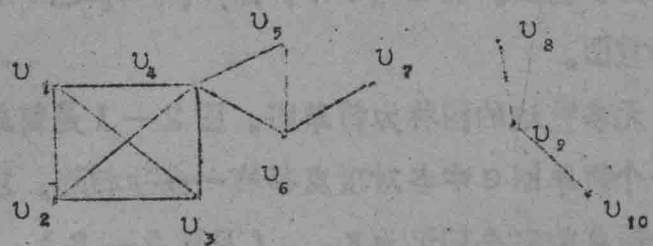


图2—4

$W_1=v_1v_2v_3v_1v_4v_3v_2$ 是一条链，但不是简单链。

$W_2=v_1v_2v_3v_1v_4v_5$ 是一条简单链，但不是初等链。

$W_3=v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7$ 是一条初等链。

$C=v_1v_2v_3v_1$ 是一个圈。

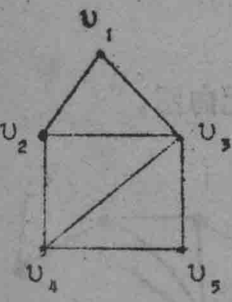
定义2.2 一个图中，若任何两个顶点之间至少有一条链，则称这个图为连通图，否则，称为不连通。例如图2—4是不连通图。

3.子图

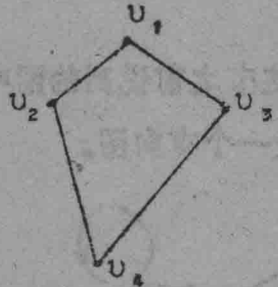
在研究和描述图的性质以及图的局部结构中，子图的概念占有重要的地位。

定义2.3 设$G_1=(V_1, E_1)$，$G_2=(V_2, E_2)$，如果$V_1\subseteq V_2$，$E_1\subseteq E_2$，则称G_1是G_2的子图。证$G_1\subseteq G_2$。

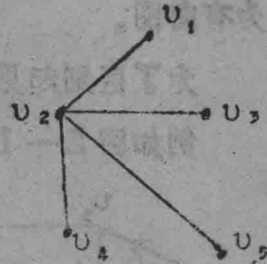
特别，当$V_1=V_2$，$E_1\subseteq E_2$时，称G_1为G_2的支撑子图（见图2—5）。



(a) 图G



(b) G的子图



(c) G的支撑子图

图2—5

在图G＝(V, E)中，$v \in V(G)$，我们把与v关联的边的条数称为点v的次（度），(每个环算作两条边)，记作$d(v)$。例如，在图2—5(a)中，$d(v_1)=2$，$d(v_2)=3$，$d(v_3)=4$，$d(v_4)=3$，$d(v_5)=2$。次数为奇数的顶点称为奇点；次数为偶数的点称为偶点。次数为1的顶点称为悬挂点，次数为零的点称为孤立点。

定理2．1　图G中，所有顶点次的和，等于边数的两倍。

因为在计算各点的次时，图中的每条边均算了两次，显然，G中各顶点次点和等于边数的二倍。因此，可推得

定理2．2　任一个图中，奇点的个数必为偶数。

4．有向图

在实际生活中，很多问题用前面说的图来描述是不清楚的。例如交通网络中的单行道，一项工程各工序间的先后关系，家族中的先辈与后辈关系，比赛中的胜负关系等，用边是反映不出来的。我们可以用一条带箭头的线$v_i \to v_j$反映v与v之间的这种关系。这种点与点之间有方向的连线称为弧。

定义2.8　由点集V和弧集A组成的二元组D＝(V，A)称为有向图。

为了区别起见，我们把这节之前说到的图叫做无向图。

例如图2—11(a)，是一个有向图。

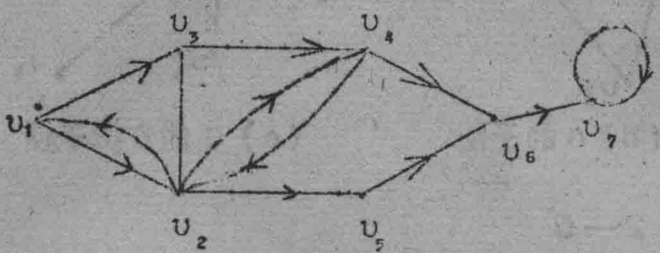


图2—11(a)

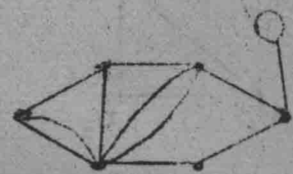


图2—11(a)

图中：

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$A=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_2)$

$(v_4, v_2), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_7)\}$。

显然，(v_2, v_4)与(v_4, v_2)是两条不同的弧。对于弧$a=(v_i, v_j)$，v_i称为弧a的始点，v_j称为弧a的终点。如图2—11(a)中，弧(v_7, v_7)其始点与终点相同，则称为环。

有向图D中点与弧的交替序列$\{v_{i_1}, a_{i_1}, v_{i_2}, a_{i_2}, \cdots v_{i_{k-1}}, a_{i_{k-1}}, v_{i_k}\}$，对于$t=1, 2, \cdots k-1$，均有$a_{i_t}=(v_{i_{t-1}}, v_{i_t})$，则称之为从$v_{i_1}$到$v_{i_k}$的路。例如图2—11(a)中，$\{v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_4), v_4, (v_4, v_6), v_6, (v_6, v_7), v_7\}$是从$v_1$到$v_7$的一条路。若路的第一个点与最后一个点相同，则称为回路。例如，图2—11(a)中，$\{v_1,$

$\{v_1, v_3), v_3, (v_3, v_4), v_4, (v_4, v_5), v_2, (v_2, v_1), v_1\}$ 就是一条回路。同样，今后也 以点的序列来记路与回路。

在有向图 $D=(V, A)$ 中，以顶点 v 为始点的弧的个数称为出次，记 $d^+(v)$，以顶点 v 为终点的弧的个数称为入次，记 $d^-(v)$。

如果从一个有向图D中去掉箭头，得到一个无向图，这个无向图称为D的基础图，记 $G(D)$。图2—11(b)是图2—11(a)的基础图。

§2.2 最小树与最小树形

1. 树

树是一类结构极其简单，应用非常广泛的图。

定义2.4 一个无圈的连通无向图称为树。

例如，图2—6

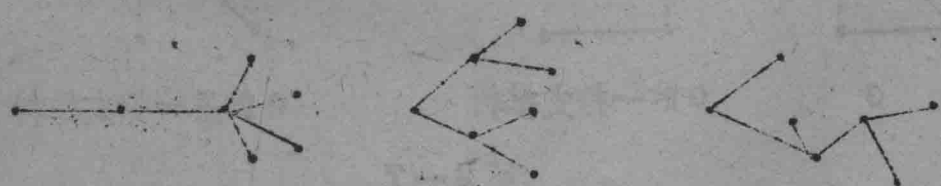


图2—6

树有如下性质：

因为树是连通的，树中任意两个顶点间有一条链连接，但又因为树是无圈的，树中两顶点间又不会多于一条链连接，否则将出现圈。故

性质1 在树中的任意两顶点之间有且只有一条链连接。

从性质1容易得到：

性质2　在树中去掉任一条边，则树成为不连通的。

由于树中任意不相邻两个顶点都有一条链连接，若它们再添上一条边，便构成一个圈。因此有：

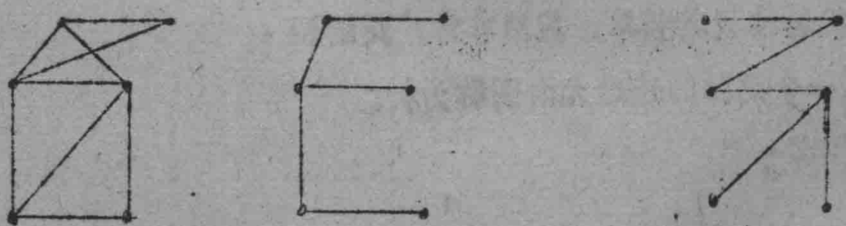
性质3　在树中不相邻的两个顶点间添上一条边，恰好得到一个圈。

性质4　设T为n个顶点的一棵树，则T的边数为n－1。

2．支撑树

定义2－5　如果图G的支撑子图是一棵树T，则称T为G的支撑树。

例如：



G　　　G的一棵支撑树　　　G的另一棵支撑树

图2—7

显然，任何连通图都有支撑树，并且可能有许多不同的支撑树。

从给定的一个连通图中，寻求它的支撑树的方法通常有两种：一是破圈法，二是避圈法。

破圈原则是：取一个圈，从圈中丢去一边，对余下的图重复这个步骤，直到无圈为止，即可得到一棵支撑树。

避圈原则是：每步选取与已选边不构成圈的边，直到不能进行时为止。

3．最小树

定义2—6　对图中的每一条边〔v_i，v_j〕，相应地有一个数w_{ij}，称为边〔v_i，v_j〕上的权。G连同在它边上的权称赋权图。

例如：要在若干个城镇之间架设电话线，使任何两个城镇间都可以直通电话。w_{ij}可以表示城镇i、j间架设电话线的费用。根据实际问题的不同，权的含意将会不同。可以表示距离、时间、费用等等。

定义2—7　在一个连通的赋权图中，如果存在一棵支撑树，使其总权最小，则称这棵树为最小支撑树，简称最小树。

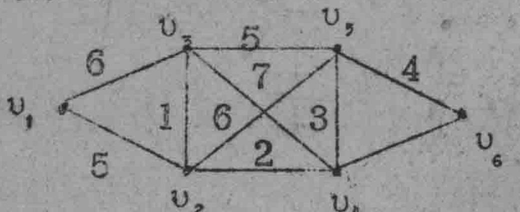
寻求最小树的两种算法：

算法1（Kruskall算法）

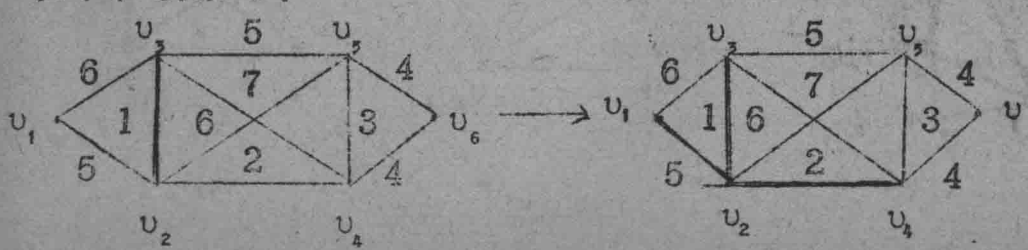
第一步：从图G中选取最小权的一条边。

第二步：从未选的边中，选一条最小权的边，使与已选边不构成圈。

例：求下面赋权图的最小树。



其寻求过程如下：



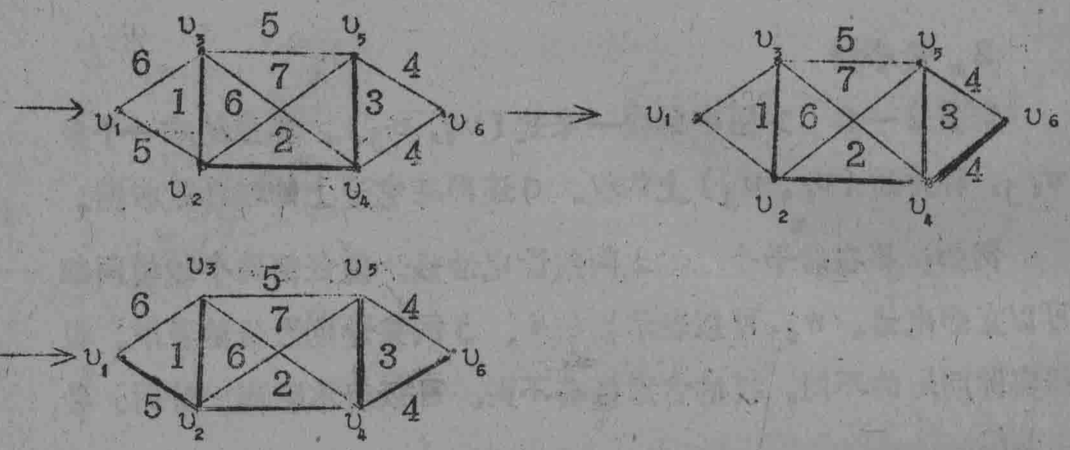
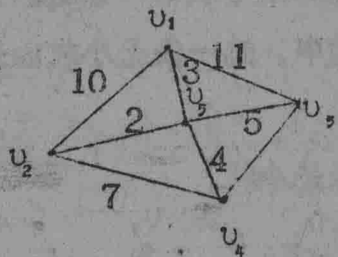


图2—8

算法2

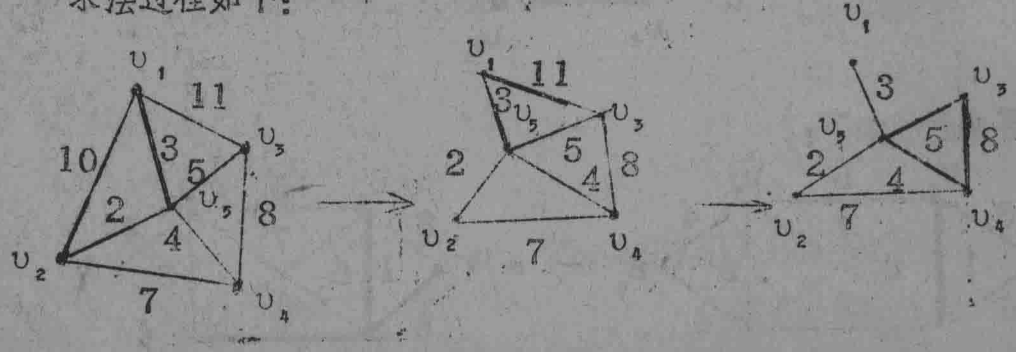
任取一圈，从圈上去掉一条最大权的边，在余下的图中，重复这个步骤，直到无圈时为止，即可求出最小树。

例：求赋权图



的最小树

求法过程如下：



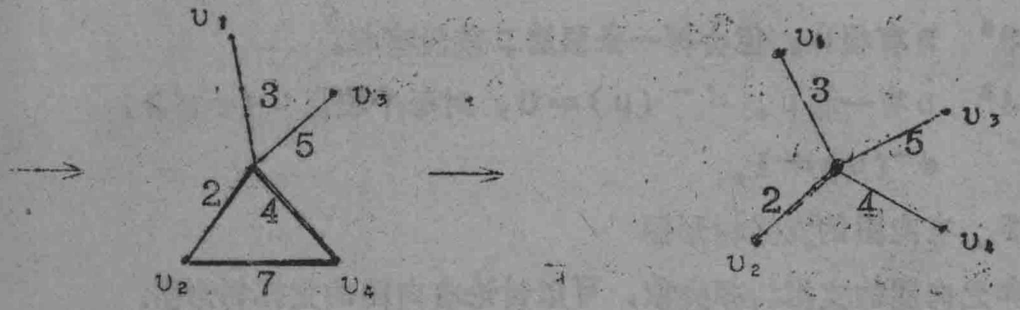


图2—9

4．树形图

树形图是一种特殊的有向图。

定义2—5　假如有向图D中存在一个顶点μ，自μ总有路通向图的其他顶点，则顶点μ称为图的根。一个有根μ的有向图D，它的基础图是树则称D为以μ为根的树形图。例如，从水库流水的渠道网（只有一条渠道到达每一点）便是一个树形图。又如，从某个祖先起，他的子孙世系表也可画成一个根的树形图。下面图2—10（a）是树形图。图2—10（b）不是树形图。

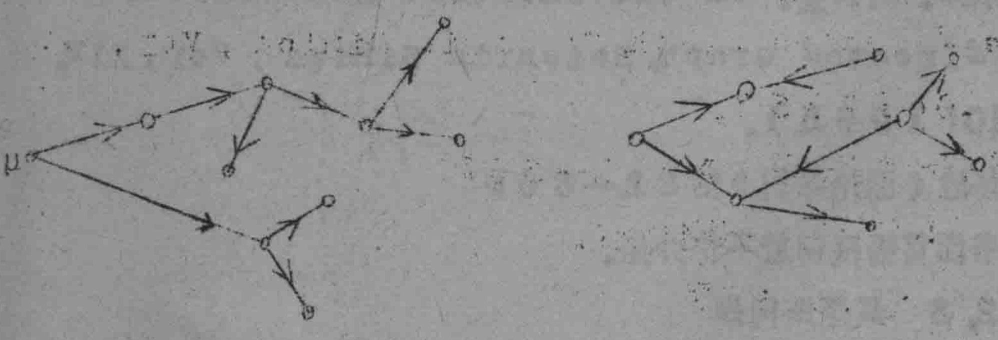


图2—10（a）　　图2—10（b）

下面命题是等价的（证明从略）

1° D是一棵树形图

2° D有一个根μ，它到每个顶点的路是唯一的；

3° D有根μ，但去掉一条弧后D就没有根。

4° D有一根μ，$d^-(\mu)=0$，对每个顶点υ（≠μ），$d^-(\upsilon)=1$。

5. 有向图的支撑树形图

和无向图的支撑树相类似，可以讨论有向图的支撑树形图。

一个有向图D＝（V，A），它的支撑子图是指子图H＝（V，A_1），$A_1\subseteq A$。如果H又是树形图，则它称为D的支撑树形图。

不见得任意一个有向图都有支撑树形图，但是可以证明，一个有根的有向图一定有它的支撑树形图。（参见李修睦《图论导引》）

我们同样给一个有向图的每条弧赋予权w，就称为赋权有向图。

如果在一个赋权有向图D中存在一个总权最小的支撑树形图，则称它为D的最小树形图。或简称最小树形。

如何求出一个有向图上最小树形图呢？这个问题已由朱永津和刘振宏所解决。可参见

朱永津、刘振宏：on the Shortest Arborescence of a directed Graph, ScienTia Sinica, Vol, XIV, No, 10(1965)。

李修睦《图论导引》第32—36页

本书因篇幅限制就不作介绍。

§2.3 最短路问题

在生产实际中的许多问题，诸如管道铺设、通讯线路安排、交线的选择、厂区布局、设备更新等等都需要寻找一条合适的路径，使得路径最短，或成本费用最小。

用图论语言来说，就是要在一个赋值有向图D中求得一条从始

点v_1到终点v_p的路，使其在所有从v_1到v_p的路中，它的总权最小。即所谓最短路问题。

例如：一辆运货卡车，从装货站v_1开向卸货站v_7，有许多路径可行，图2—12所示。问哪条路径最短？每条弧旁的数字表示该弧的权。

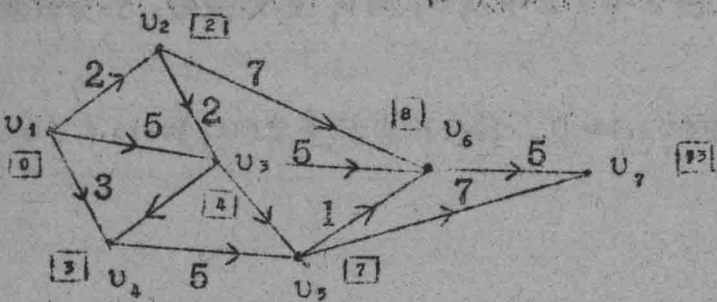


图2—12

我们结合此例来介绍E、W、Dijstra 在1959年提示的求最短路算法，它是目前公认的求最短路的最好算法。

首先从始点v_1开始，给每一个顶点记一个数（称为标号）。标号分T标号和P标号两种：T标号表示从始点v_1到这一点的最短路权的上界，称为临时标号；P标号表示从v_1到该点的最短路权，称为固定标号。已得到P标号的点不再改变，凡是没有标上P标号的点，标上T标号。算法的每一步把某一点的T标号改变为P标号。计算步骤为：

第一步：给始点v_1标上固定标号0，即$P(v_1)=0$，其它顶点标上临时标号∞，即$T(v_j)=\infty$。

第二步：设v_i是刚刚得到固定标号的，所有那些使(v_i, v_j) ∈ A 的顶点v_j都要修改临时标号为min〔j的固定标号；（i的

固定标号$+w_{ij}$)}

第三步：找出所有临时标号的最小值，用它作为相应顶点的固定标号，如果存在几个有同一最小临时标号值的顶点，则可选一个改为固定标号。

重复第2步与第3步，直到终点有固定标号为止。

现求上述例子，图2—12中从v_1到v_7的最短路，弧旁数表示该弧的权。

开始给v_1标上$P(v_1)=0$，其余顶点标上$T(v_j)=\infty$（$j=2, 3, \cdots, 7$）。

第一步：

(1)因为(v_1, v_2)，(v_1, v_3)，$(v_1, v_4)\in A$，且v_2，v_3，v_4，是T标号点，因而这三点的T应修改为：

$T(v_2)=\min\{v_2$的旧标号，v_1的固定标号$+w_{12}\}$

$=\min\{\infty, 0+2\}=2$

$T(v_3)=\min\{v_3$的旧标号，v_1的固定标号$+w_{13}\}$

$=\min\{\infty, 0+5\}=5$

$T(v_4)=\min\{v_4$的旧标号，v_1的固定标号$+w_{14}\}$

$=\min\{\infty, 0+3\}=3$

(2)在所有的T（临时）标号中，$T(v_2)=2$最小，于是，令$P(v_2)=2$

第二步：

(1)v_2是刚刚得到P标号的点，由(v_2, v_3)，$(v_2, v_6)\in A$，v_3，v_6是T标号，故v_3，v_6的T标号应修改为：