高等学校教学参考书

简明微积分

第一册

龚升 张声雷编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

简明微积分

第一册

龚 升 张声雷编

人民教育出版社

本书共分三册．第一册内容包括一元函数微积分和常微分方程．

本书篇幅不大，写得简明扼要，特点是先讲定积分，后讲微分，全书注意突出微分和积分这对主要矛盾，并注意与物理课程的配合．可作理科各专业教学参考书，物理类专业也可选作试用教材．

简 明 微 积 分

第 一 册

龚 升 张声雷编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

北京印刷三厂印刷

*

1978年2月第1版 1979年4月第2次印刷

书号 13012·092 定价 0.44 元

前　　言

一九六五年，在中国科技大学近代物理系搞一个高等数学试点班时，我与张声雷同志合写了这本《简明微积分》.

当时我校非数学专业的高等数学课程，在教学工作中存在着三个问题：一是新同学刚入大学，学习高等数学这门主要课程时，普遍感到进度快，难度大，与中学数学距离较大，有不少困难；二是与物理课程的配合问题，物理上要用到的数学知识，却要到较后才能讲到，既影响物理教学，也影响数学的教学质量；三是同学学了这门课往往消化不良，掌握不牢，不会灵活应用．怎样才能改变这个局面呢？

毛主席教导我们："在复杂的事物的发展过程中，有许多的矛盾存在，其中必有一种是主要的矛盾，由于它的存在和发展，规定或影响着其他矛盾的存在和发展."高等数学这门课程实际上讲的是微分和定积分这一对矛盾，而以往在教学中这对主要矛盾十分不突出．由于同学未能掌握住主要矛盾，以致学到的东西不易串起来，容易忘掉．我们要使同学不仅得到一颗颗的珍珠，而且应该使他们得到一串珍珠，而把这些珍珠串起来的线，应该是这门课程的主要矛盾，所以在讲课中，就把这对主要矛盾及早引出，尽力突出.

在第一章中，首先介绍了定积分和微分的概念，然后通过微积分基本定理揭示它们如何成为对立统一的；第二章讲运算时，强调了这对主要矛盾在运算过程中的体现，指出微分和积分之间的紧密关系；第三章讲应用，训练同学用微积分作工具处理实际问题，

特别注意与物理课程相配合，在用的过程中更牢固、更灵活地掌握这对主要矛盾；第四章讲的是常微分方程，把它看作微分和积分这一对矛盾的进一步发展和应用.

以后在讲多变量微积分时，应用外微分形式讲清楚微分和积分是如何成为一对矛盾的. 在本书第三册要讲 ε-δ 语言，非标准分析等，并强调连续与离散的关系，使同学在前面学习的基础上更深刻地认识微积分这一对矛盾.

在教学过程中，在讲述微分和积分这对主要矛盾的同时，也指出数学中的一些基本矛盾，如：连续与离散，有限与无限，必然与偶然，数与形……等等，这对同学深入了解与掌握课程内容是有好处的.

关于编写这套《简明微积分》的想法，我曾写过一篇短文《对高等数学课程改革的一些尝试》，发表在《自然辩证法研究通讯》1966年第1期上. 希望进一步了解想法的读者，请参阅这篇短文. 《简明微积分》第一册现在出版了，除了一些小的修改外，基本上是十三年前写的稿子. 由于自己水平不高，又缺乏足够的教学实践，本书肯定有很多缺点、错误，诚恳地希望广大读者给予批评指正.

龚　升

一九七八年二月

目　　录

第一章　微积分的概念

第一节　函数与极限

1·1　数列极限

我们先介绍一下极限的概念，而不予以证明及深入的讨论.

对于无穷数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

来说，当项数 n 无限增大时，数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 A，就是说，无论预先给定怎样小的正数，在数列里都能找到一项，从这一项起，以后所有项与 A 的差的绝对值，都小于预先给定的小的正数，那末固定常数 A 就叫做这个无穷数列的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

如果两个数列有极限，那末，这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(作为除数的数列的极限不能是零).

就是说，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，那末，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

如果 k 为常数，那末

$$\lim_{n\to\infty} k\cdot a_n = kA$$

再如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$，且 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，则

$$A \leqslant B \leqslant C$$

关于极限的概念，将在本书第三册中严格地仔细地加以讨论.

1·2 连续函数

当我们观察或研究客观世界的各种过程时，会遇到很多不同的量，这些量一般来说都是在不断变化的，这是客观世界不断变化、不断运动、不断发展在量的方面的表现. 例如，由于热胀冷缩的原因，金属杆的长度 L 是依赖于温度 T 的，由实验知道，

$$L = L_0(1+\alpha T)$$

这里 L_0 表示在 0°C 时金属杆的长度，α 叫做线胀系数，上面的关系就是长度 L 与温度 T 之间的一个简单的函数关系. L 和 T 是变化着的量，叫做变量.

当然，任何过程中的变量都有一定的变化范围，即变量所能取的数值有一定的限制，如物体的温度永远不会低于 −273°C. 变量的变化范围常常是一个区间，而区间有开的、有闭的等等. 适合不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体记为 $[a, b]$，称为闭区间. 适合不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体记为 (a, b)，称为开区间. 适合不等式 $a \leqslant x < b$ 的实数 x 的全体记为 $[a, b)$. 同样，读者可以不难理解 $(a, b]$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$ 等.

但是在某一特定问题中，某些因素的变化极小，因而可以看作不变，这时相应的量叫做常量. 例如，地面上自由落体的重力加速度 g 在一定的范围内（例如在北京市的范围内）是看做常量的. 还有一种表现变化事物之间的一定关系的量也看作是常量，例如，无

论圆的直径如何变化，相应的圆周长随着变化，但周长与直径之比却是不变的，是个常量(即 $\pi=3.14159265\cdots$).

我们知道，客观世界中各个事物是互相联系、互相依赖与互相制约的，因此，从量的侧面来看，各个变量之间也是相互依赖、相互制约的．变量之间的这种互相依赖关系叫做函数关系．

例 1 物体从离地面某一高度处自由落下，设经过时间 t 落下的距离为 s，s 与 t 之间的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 表示重力加速度．

例 2 一天中气温 θ 与时间 t 是两个变量，某日气温的自动记录仪记录了这二者的关系如图 1·1．在某一时刻 t_0，从图可确定相应的气温 θ_0．

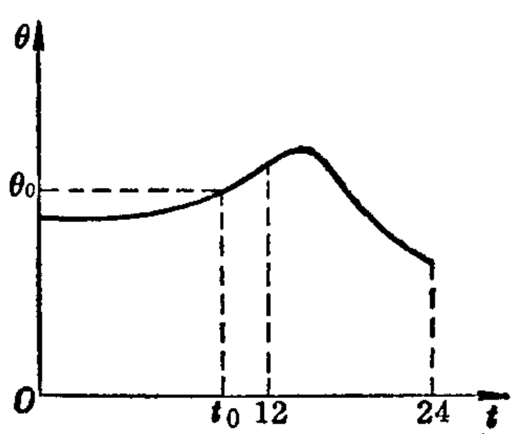

图 1·1

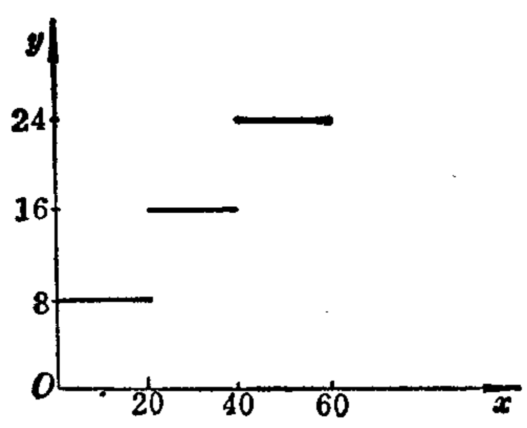

图 1·2

例 3 寄往外埠的信件，重量在 20 克以下者邮资为 8 分，每增加 20 克，邮资增加 8 分，因此邮资是重量 x 的函数，可以记作

$$y=\begin{cases}8 & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 16 & 20<x\leqslant 40\\ 24 & 40<x\leqslant 60\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

作图如图 1·2．

从这些例子可以看出，所谓函数关系，就是两个变量之间的一种对应规律，依据它，可以从一个变量 x 所能取到的每个值，确定出另一个变量 y 的相应值．这种关系一般地常用 $y=f(x)$ 表示，即 y 是 x 的函数，符号 f 表示对应规律，x 称为自变量，y 称为因变量．自变量变化的范围称为函数的定义域，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值记为 $f(a)$，函数值全体称为函数 $f(x)$ 的值域．

在很多自然现象中，遇到的函数往往是"连续"的．例如，一个质点运动时，它的一个坐标 x 就是时间 t 的连续函数 $x=f(t)$，因为质点从一个位置过渡到另一位置时，它必须经过一切中间位置．函数 $x=f(t)$ 的图形如图 1·3，它是一条连续不断的曲线．考察其中的一个时刻，例如 $t=t_0$．当 t 在 t_0 处有很小变化 Δt 时，$f(t)$ 也相应地有很小的变化 $\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$，且当 $\Delta t\to 0$ 时，Δx 也趋向于零，即当 $t\to t_0$ 时，有 $f(t)\to f(t_0)$．反之，如果当 $\Delta t\to 0$ 时，$f(t)$ 的相应的变化 $\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$ 不趋于零，那末曲线在 $t=t_0$ 处就会有一间断，如图 1·4．

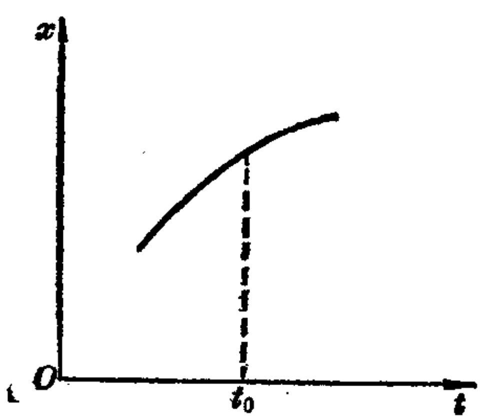

图 1·3

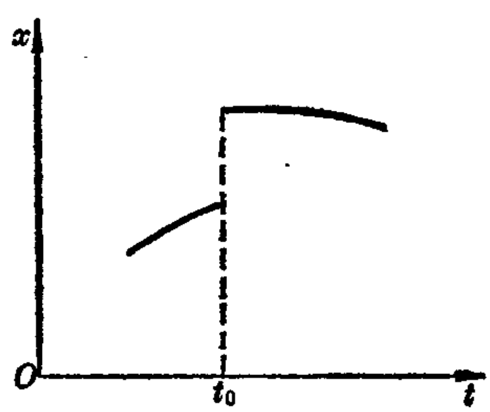

图 1·4

一般来说，函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点处连续，是指 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=f(t_0)$ 成立，否则称为间断．

如 $x=f(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$（或开区间 $a<t<b$）上每点都连续，则称 $f(t)$ 为 $[a, b]$（或 (a, b)）上的连续函数．

设 $f(t)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，又设 $f(a)$ 与 $f(b)$ 有相反的符号，即点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$ 是处在 t 轴上下不同的两侧. 因为 $x=f(t)$ 是连续函数，所以 $x=f(t)$ 的图形是一条联接点 $(a, f(a))$ 及 $(b, f(b))$ 的连续曲线，它必定穿过 t 轴(图 1·5)，即在 (a, b) 中至少有一点 c，使 $f(c)=0$. 从这里可以推出：若 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续，r 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数，则必有一点 $c(a<c<b)$，使 $f(c)=r$. 这只要考虑函数 $F(t)=f(t)-r$ 即可. 显然 $F(t)$ 仍为 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $F(a)=f(a)-r$，与 $F(b)=f(b)-r$ 异号，故必有一点 c，$a<c<b$，使 $F(c)=f(c)-r=0$，即 $f(c)=r$.

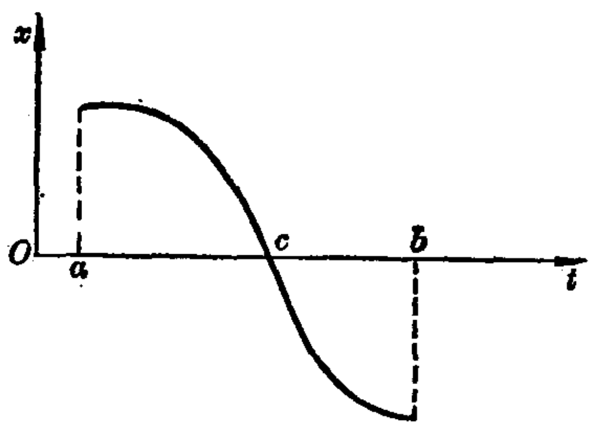

图 1·5

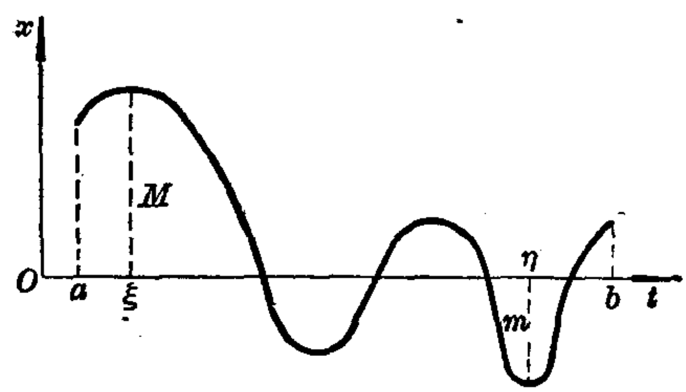

图 1·6

从图形(图 1·6)中还可以看出：在闭区间上连续的函数一定达到在这闭区间上的最大值 M 和最小值 m. 即在 $[a, b]$ 中能找到两点 ξ，η，使 $f(\xi)=M$，$f(\eta)=m$，而对于 $[a, b]$ 中所有的点 t 都有 $m\leqslant f(t)\leqslant M$. 而在开区间上这是不一定成立的.

习　　题

1. 设 $f(x)=x2^x$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)}$，$f(x)+1$，$f(x+1)$，$|f(-a)|$，$f(a^2)$，$[f(a)]^2$

2. 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 当\ x\neq 0 \\ 1, & 当\ x=0 \end{cases}$$

这是函数吗？是一个函数还是两个函数？它的定义域是什么？作出它的图形，并求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(t)$，它在哪些点上连续，哪些点上不连续？

3．已知两个点电荷 q_1, q_2 的距离为 r，试表示相互作用力 f 与距离 r 间的函数关系.

4．将半径为 R 的圆铁片，自中心剪去一扇形，其中心角为 θ，余下的铁片围成一个无底的圆锥，将其体积用 θ 表示出来.

5．横梁长 8 米，距左端 2 米到 4 米这段上均匀分布总重为 30 公斤的载荷，又在距左端 5 米处作用着一个 10 公斤的集中载荷，试将从左端起到 x 处长为 x 的这段上的总载荷 W 用 x 表示出来.

6．设 (1) $f(x)=ax+b$; (2) $f(x)=x^2$; (3) $f(x)=a^x$,

求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7．研究下列函数的连续性：

(1) $y=x^2$　　(2) $y=\sin x$　　(3) $y=x^2\sin x$

(4) $y=\dfrac{1-x^2}{2+x}$　　(5) $y=\dfrac{1}{\sin \pi x}$　　(6) $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

(7) $y=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 4x-2 & 1<x<3\\ 13-x & 3\leqslant x<\infty\end{cases}$

8．证明下列方程在指定区间上有根：

(1) $x^3-3x=1$, 在[1, 2]上

(2) $x2^x=1$, 在[0, 1]上

第二节　定　积　分

2·1　计 算 面 积

在中学数学里，我们学到了计算一些直线图形及圆的面积的公式，但是实际问题中遇到的许多图形不会如此简单．那末如何来计算面积呢？用以前的那些办法已经不够了，于是产生了用微元求和的想法来计算这些面积．以曲边梯形为例，这个想法的实质是：将图形分成有限块长条，把每块长条都近似地看作矩形，把

这些矩形的面积算出来加在一起作为这个图形面积的近似值. 长条分得愈细,这个近似值与面积真正值之差愈小,如果长条分得无穷多、无限小,这样,近似值就成为真正要求的值了.

举个具体例子,考虑抛物线 $y=x^2$,它的图形如图1·7,在 Ox 轴上取一点 C,设 OC 的长是1. 作垂直于 Ox 轴的直线 AC,交抛物线于 A,我们来求曲边三角形 OAC 的面积.

把区间[0, 1]三等分,算出抛物线下画有斜线的矩形的面积的和(图1·8):

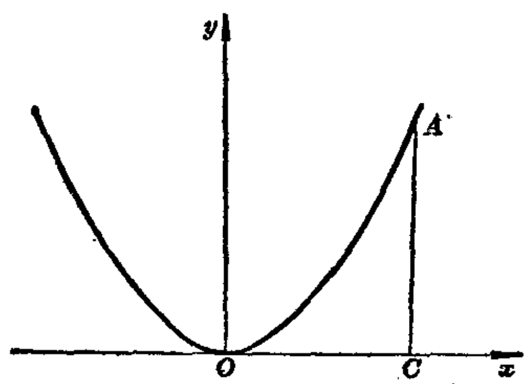

图 1·7

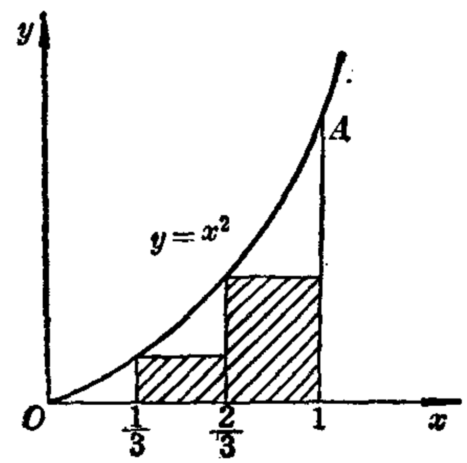

图 1·8

$$S_3=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{3^3}[1^2+2^2]=\frac{5}{27}$$

这个数可以作为所求图形面积的一个粗略的近似值.

如果把[0, 1]四等分,将画有斜线的三个矩形的面积加起来(图1·9),得到

$$S_4=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{4^3}[1^2+2^2+3^2]=\frac{7}{32}$$

从直观上看来,这是个比 S_3 稍好的近似值.

继续这种作法,把区间[0, 1]分成 n 等分,作出 $n-1$ 个矩形(图1·10). 把它们的面积一一加起来,得到

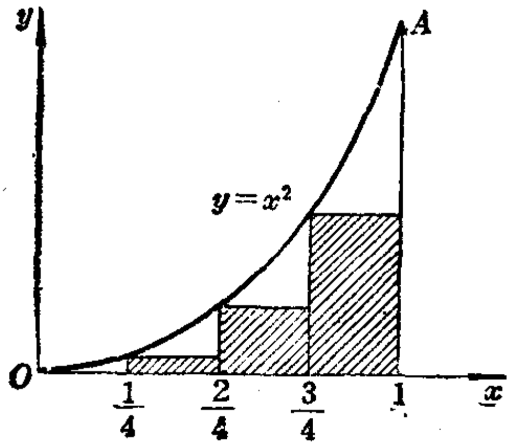

图 1·9

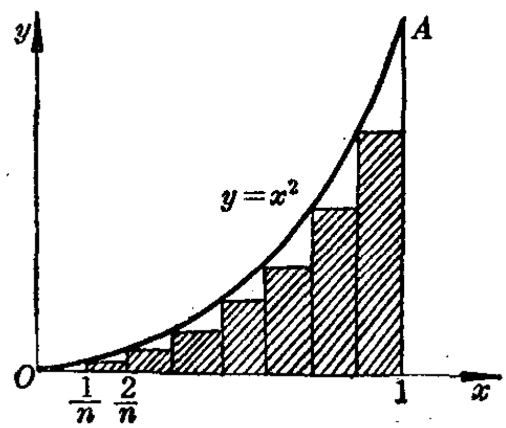

图 1·10

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\
&=\frac{1}{n^3}\ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}
\end{aligned}
$$

如果 n 相当大，直觉告诉我们，台阶形的面积 S_n 就更精确地接近所求图形的面积了．若无限继续下去，我们得到一个数列 $\{S_n\}$：S_3，S_4，…，S_n，…，就是

$$\frac{5}{27},\ \frac{7}{32},\ \cdots,\ \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),\ \cdots$$

我们看到，随着 n 无限增大，S_n 中的 $1/n$ 及 $1/n^2$ 就无限变小而接近于零，从而 S_n 越来越接近于一个定数 1/3，或者说 $\{S_n\}$ 极限是 1/3.

从这里可以看出，如果 OC 的长不是 1，而是任意实数 a，应用上述办法可以算出曲边三角形 OAC 的面积是 $a^3/3$．从这里还可以立刻得到，如果所求的面积是图 1·11 中的 $ACDB$，那末这块面积应该是 $(b^3-a^3)/3$，这里 $OC=a$，$OD=b$.

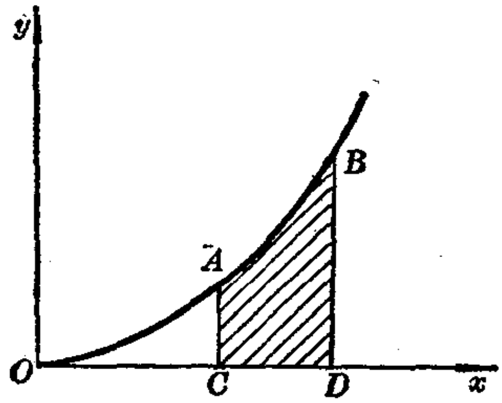

图 1·11

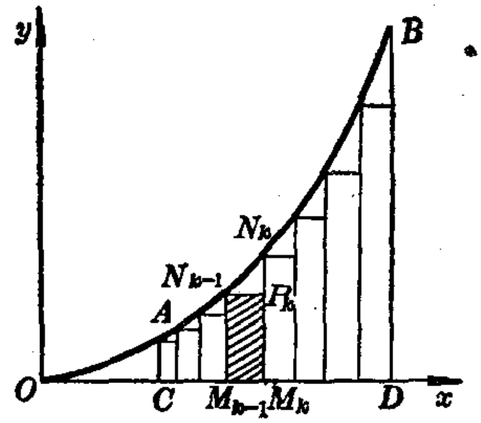

图 1·12

再来考虑一个比抛物线稍复杂一点的例子. 即以曲线 $y=x^3$ 作为一边的曲边三角形的面积，这时采用处理 $y=x^2$ 的同样的办法来进行，只要用到恒等式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

即可，至于这个恒等式，可以用数学归纳法来证明之.

再进一步，如果考虑曲线 $y=x^4$ 与 x 轴及 $x=a$ 围成的曲边三角形的面积. 这时应用上面同样的办法，就必须考虑和

$$1^4+2^4+\cdots+n^4$$

要求出这个和来已经比上面困难了，如果更一般，考虑曲线 $y=x^m$ (m 是整数)与 x 轴及 $x=a$ 围成的曲边三角形的面积，方法不变，则必须考虑和

$$1^m+2^m+\cdots+n^m$$

而这个和是不太好求的，于是就得另想办法. 我们来考虑曲线 $y=x^4$ 与 x 轴及 $x=a$，$x=b$ 之间的面积 $ACDB$(图 1·12)，把 CD 仍分成 n 段，分点是

$$(C=)M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n(=D)$$

如果 $OC=a$, $OD=b$, 我们这样来选取 $M_1,\cdots,M_n$, 使

$$OM_1=aq,\ OM_2=aq^2,\ \cdots,\ OM_n=aq^n$$

这里 $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$, 于是

$$M_1C=a(q-1),\ M_2M_1=aq(q-1),$$
$$M_3M_2=aq^2(q-1),\ \cdots,\ M_kM_{k-1}=aq^{k-1}(q-1),\ \cdots,$$
$$M_nM_{n-1}=aq^{n-1}(q-1)$$

这样，CD 之间并不是等分的，而是越靠近 C 分得越小，越靠近 D 分得越大，但是当分点越来越多，即越分越细时，每一段的长都趋于零.

这样分割后，矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积就是

$$aq^{k-1}(q-1)(aq^{k-1})^4=(q-1)(aq^{k-1})^5$$

把这些矩形的面积加起来就得到曲边三角形面积的近似值：

$$S_n=(q-1)(aq^{1-1})^5+(q-1)(aq^{2-1})^5+\cdots+(q-1)(aq^{n-1})^5$$
$$=(q-1)a^5(1+q^5+\cdots+q^{5(n-1)})=(q-1)a^5\,\frac{q^{5n}-1}{q^5-1}$$

但 $q^n=b/a$，所以

$$S_n=a^5\,\frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^5-1}{\dfrac{q^5-1}{q-1}}$$

当 $n\to\infty$ 时，q 显然趋于 1，故 $\dfrac{q^5-1}{q-1}=q^4+q^3+q^2+q+1$ 当 $n\to\infty$ 时趋于 5. 因此当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to\dfrac{b^5-a^5}{5}$.

用同样的办法，可以计算曲线 $y=x^m$（m 为任意整数，但 $m\neq-1$）与 x 轴之间的面积. 从 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的面积是 $\dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. 至于 $m=-1$，即 $y=1/x$ 的情形，可以看出应用上面的分割方法仍旧不能得到什么结果，我们将在 2·3 节中仔细讨论这个问题.

2·2 定积分的定义

前面我们已经考察了几个具体的函数所表示的曲线与 x 轴之

间的面积的计算. 每一个这样的图形,实际上是曲边梯形. 所谓曲边梯形, 就是由直线 $x=a$, $x=b$, x 轴及一条曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形. 现在再来更一般地考察由任意连续函数 $y=f(x)$ 所描绘的曲线组成的曲边梯形的情形,不妨假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $\geqslant 0$. 如同前一段中一样,先把 $[a, b]$ 分成 n 份(可以相等, 也可以不相等)(图 1·13), 也即插入分点:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

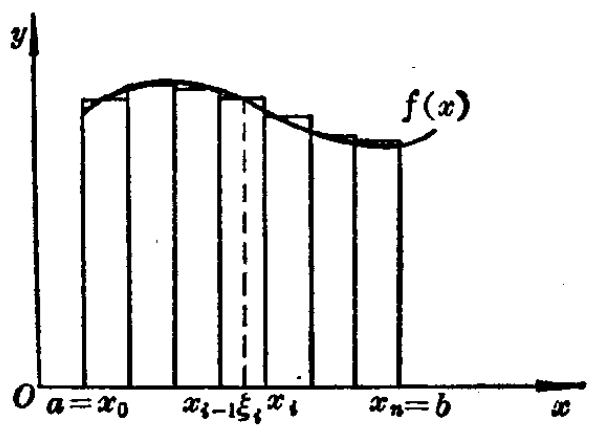

图 1·13

以每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为底, $f(\xi_i)$ 为高(ξ_i 是小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意一点)作矩形, 则其面积为 $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, 如此可得 n 个矩形,它们的面积之和为

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

为了方便起见,记作

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

它是我们所要求的面积 S 的一个近似值. 凭直观可以知道, 把区间 $[a, b]$ 分得越细, 则所得矩形的面积之和就越接近于 S. 因此, 只要把区间 $[a, b]$ 分得充分细,和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{1}$$

就可和真正的面积 S 接近到任意需要的程度. 换句话说, 若把区