阳春光华

最新全国成人高考

统一命题招生考试教材

最新版

专科起点升本科

高等数学（一）

KAOSHI

全国成人高考命题研究组　编审

北京广播学院出版社

最新全国成人高考统一命题招生考试教材

（专科起点升本科）

高等数学（一）

全国成人高考命题研究组　编审

北京广播学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/姜月主编；易良军编著 .—北京:北京广播学院出版社,2002.8
最新全国成人高考统一命题招生考试教材. 专科起点升本科
ISBN 7-81085-072-5

Ⅰ.高 ... Ⅱ.①姜 ...②易 ... Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051539 号

前　言

《教育部关于从2003年起调整成人高校招生科目设置的通知》规定，从2003年起，取消专升本的师范类、非师范类的生源类别设置，改为按学科门类设置，统考政治、外语和专业基础课三门，其中专业基础课根据学科特点设置八门，分别为大学语文、高等数学(一)、高等数学(二)、教育理论、艺术概论、民法、生态学基础和医学综合。

专升本各学科统考专业基础课如下：1. 哲学、文学(艺术类除外)、历史学以及中医学类(一级学科)考大学语文；2. 艺术类(一级学科)考艺术概论；3. 工学、理学(生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类等四个一级学科除外)考高等数学(一)；4. 经济学、管理学以及职业教育类、生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类、药学类六个一级学科考高等数学(二)；5. 法学考民法；6. 教育学(职业教育类一级学科除外)考教育理论；7. 农学考生考生态学基础；8. 医学(中医学类、药学类等两个一级学科除外)考医学综合。

为了帮助报考各类成人高等学校(包括广播电视大学、职工高等学校、农民高等学校、管理干部学院、教育学院和教师进修学校、独立设置的函授学院、普通高等学校举办的成人高等学历教育等)考生系统复习中学课程，参加各类成人高等学校招生教育，我们特邀请了中国成人教育界对历年成人高考考试有专门研究的高等学校的专家、教授，根据教育部最新颁布的2003年《全国各类成人高等学校(专升本)招生复习考试大纲》，精心编写了这套丛书。该丛书具有以下五大特点：

1. **全：考纲考点覆盖全**——每章都以强化练习题的方式覆盖所有考纲考点。
2. **新：考试体现信息新**——体现了最新成人高考考试题型、最新成人高考精神。
3. **准：扣紧考纲复习准**——严格按照最新考试大纲编写。
4. **真：题型题量模拟真**——题型、题量及难易程度均与实际成人高考一致。
5. **快：突出复习见效快**——针对性强，切题率高，短期复习见效特别快。这一显著特点已在历年的成人高考中得到充分证实。

本书的最大特点在于：按照考试大纲要求，针对成人考试复习时间短、基础不扎实的特点，按知识点一个一个地验收和检测。

本丛书最适宜于作为各类“成人高考辅导班”师生的教学用书和课本。事实上，由于本丛书具备以上的显著优点，而早已被北京、上海、天津、哈尔滨、长春、沈阳、呼和浩特、石家庄、济南、长沙、广州、成都等全国各大中城市中几百所大学的成人教育学院“专升本辅导班”的师生作为教学和课本用书。因为此书中的模拟题与全国统考中的试题吻合率高、命中率高，故各地师生都认为此书能让他们达到事半功倍的效果！

本册《高等数学(一)》，我们严格按照2003年新大纲的规定精心修订编写。以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容，避开复杂的运算与特殊的技巧性运算。在整体结构上不仅注重知识的系统性，而且更加精炼了每一章的重点知识；

练习题在总结近几年考题的基础上进行了筛选，使之内容更翔实，覆盖考点更精确。

“争渡，争渡，惊起一滩鸥鹭”。相信读者在认真读完本书后，能在全国成人高考中得心应手，取得满意成绩，实现自己的夙愿！

全国成人高考命题研究组

2002年9月

目录

第一章　函数、极限、连续

一　函　　数

基本要求

1. 理解函数的概念;会求函数的定义域、表达式及函数值;会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数的图象.

2. 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性,会判断所给函数的类别.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图象),会求单调函数的反函数.

4. 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握复合函数的复合过程.

5. 掌握基本初等函数的定义域和单调性.

6. 了解初等函数的概念.

基本知识

1. 函数的定义

设在所考察的某一过程中,有两个变量 x 和 y,x 的变化范围为数集 D,如果对于 D 中的每个数 x,变量 y 按照某一规律总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫做自变量,y 叫做因变量;自变量 x 的变化范围即数集 D 称为函数的定义域,函数值的集合称为函数的值域,记作 w.

对应规律和定义域是函数定义中的两个要素,所以两个函数仅当它们的对应规律和定义域都相同时,才是两个相同的函数.

函数常用的三种表示方法有:解析法;图象法;表格法.

2. 函数解析表示法中常见的几个形式

(1) 由一个解析式表示,如 $y=f(x)=x^2+2x+3$.

(2) 分段函数　如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的,则称之为分段函数.

$$y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x<1 \\ x^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数,而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,它是由三个解析式来表达.

(3) 隐函数　如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出,则称 y 为 x 的隐函数.

如由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 为隐函数.

相对于隐函数来说,人们称由解析表达式 $y=f(x)$ 确定的函数为显函数.

(4) 参数方程表示的函数　如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来,如

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

3. 定义域的求法

函数的定义域是指使函数有定义的,变量 x 所允许的取值范围,因此求定义域常常是排除那些使函数没定义的点.通常对于由解析表达式表达的函数所要求的是:

分式中的分母不能为零;

偶次方根号下的表达式不能取负值;

对数的真数必须大于零;

取反正弦、反余弦的值的绝对值不能大于1;

取正切的角不能为 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$(k 为整数);

对于实际问题则需保证其有符合题意的实际意义.

4. 函数的简单性质

(1) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果存在正数 M,使得对于一切 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是有界的;如果这样的 M 不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是无界的.

在定义域内有界的函数称为有界函数.有界函数 $y=f(x)$ 在平面直角坐标系中的图形界于两条水平直线之间.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,任给 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.单调增加与单调减少统称为单调性.

在定义域内单调增加(或单调减少)的函数称为单调增加(或单调减少)函数.单调增加(或单调减少)函数 $y=f(x)$ 在 xOy 直角坐标系中的图形自左至右是上升(或下降)的曲线.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称.如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.奇函数的图形关于坐标原点对称,如函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$;偶函数的图形关于 y 轴对称,如函数 $y=x^2$.如图1-1所示.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T(T\neq0)$,使得对于定义域 D 中的任何 x,$x\pm T$ 也在定义域 D 中,且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正常数

T 称为 $f(x)$ 的周期.

例如: $y=\tan x, y=\cot x$ 的周期是 π. $y=\sin x, y=\cos x$ 的周期是 2π.

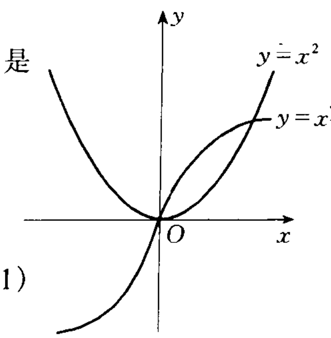

图 1－1

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

5. **反函数**

定义　设已知函数为

$$y=f(x) \tag{1}$$

如果由此解出的

$$x=\varphi(y) \tag{2}$$

是一个函数,则称它为 $f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $f(x)$ 为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,为了与习惯一致,通常将(2)式中的自变量 y 改写为 x,而将函数 x 改写为 y,于是(1)式的反函数就变为

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

记为 $y=f^{-1}(x)$. 当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数,也就是说它们互为反函数.

要注意:函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是同一个函数,所以当 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数时, $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数.

明确了反函数的定义之后,还应知道:在什么条件下直接函数 $y=f(x)$ 有反函数存在.

以下的反函数存在定理可以回答这个问题.

定理　如果函数 $y=f(x)$, $D(f)=X$, $Z(f)=Y$ 是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数 $x=\varphi(y)$, $D(\varphi)=Y$, $Z(\varphi)=X$ 并且也是严格单调增加(或减少)的.

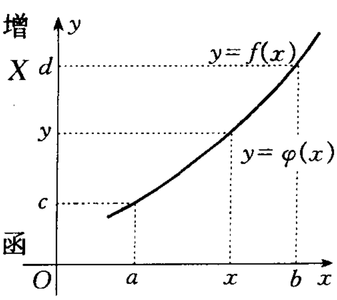

图 1－2

这个定理我们很容易从图 1-2 上来加以理解.

求反函数的步骤:

第 1 步:从直接函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$ 看它是否能成为函数;

第 2 步:如果 $x=\varphi(y)$ 是函数,将字母 x 换成 y,将字母 y 换成 x,得 $y=\varphi(x)$. 这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

结论:

① 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形,必定对称于直线 $y=x$(一般地,二者是不同的函数,其图形是不同的曲线);

② 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线(二者是不同的函数,但是,它们的图形是同一条曲线).

根据这个结论,当我们知道了直接函数 $y=f(x)$ 的图形之后,就可利用对称于直线 $y=x$ 的性质画出其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形;但若要画反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形,则就是直接函数 $y=f(x)$ 的图形.

6. **基本初等函数及其性质和图形**

(1) 幂函数

函数 $y = x^{\mu}$(μ 是常数)叫做幂函数.它的定义域要看 μ 是什么数而定,例如当 $\mu = 2$ 时,$y = x^2$ 定义域是$(-\infty, +\infty)$;当 $\mu = -\frac{1}{2}$,$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是$(0, +\infty)$,但不论 μ 取什么实数值,幂函数在$(0, +\infty)$内有定义.

当 $\mu > 0$ 时,幂函数在定义域内是单调增加的.当 $\mu < 0$ 时,幂函数在定义域内是单调减少的.

(2) 指数函数

函数 $y = a^x$(a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$)叫做指数函数.它的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时,函数是单调增加的;

当 $0 < a < 1$ 时,函数是单调减少的.

(3) 对数函数

指数函数 $y = a^x$ 的反函数,记作 $y = \log_a x$(a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$),叫做对数函数.它的定义域是区间$(0, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时,函数是单调增加的;

当 $0 < a < 1$ 时,函数是单调减少的.

(4) 三角函数

三角函数共有 6 个:

① 正弦函数

函数 $y = \sin x$ 称为正弦函数.它的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

② 余弦函数

函数 $y = \cos x$ 称为余弦函数.它的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

③ 正切函数

函数 $y = \tan x$ 称为正切函数.它的定义域为$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

④ 余切函数

函数 $y = \cot x$ 称为余切函数.它的定义域是$(k\pi - \pi, k\pi)$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,值域为$(-\infty, +\infty)$.

⑤ 正割函数

函数 $y = \sec x$ 称为正割函数.它是余弦函数的倒数,即 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,它的定义域是区间$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

⑥ 余割函数

函数 $y = \csc x$ 称为余割函数.它是正弦函数的倒数,即 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$,它的定义域是区间$(k\pi - \pi, k\pi)$$(k \doteq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(5) 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数.

正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数为反正弦函数 $y = \arcsin x$.它的定义域是区间$[-1,1]$.它是单调增函数.

余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数为反余弦函数 $y = \arccos x$.它的定义域是区间$[-1,1]$.它是单调

减函数.

正切函数 $y = \tan x$ 的反函数为反正切函数 $y = \arctan x$. 它的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$. 它是单调增函数.

余切函数 $y = \cot x$ 的反函数为反余切函数 $y = \mathrm{arccot} x$. 它的定义域是区间 $(-\infty, +\infty)$. 它是单调减函数.

上面 5 种函数统称为基本初等函数,是最常用、最基本的函数,它们的定义域和单调性务必牢记.

7. 复合函数、初等函数

(1) 复合函数

定义:设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,又设 X 表示函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一个子集,如果对于 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值,函数 $y = f(u)$ 都有定义,则 y 通过 $u = \varphi(x)$ 而成为 x 的函数,记为 $y = f[\varphi(x)]$. 这个函数叫做由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,它的定义域为 X,u 叫做中间变量.

所以复合函数实际就是将中间变量代入后所构成的函数.

注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 3$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = x^2 + 3$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于 3),$y = \arcsin u$ 都没有定义.

复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有更多的中间变量,如 u, v, w, t 等等.

在求函数的导数时,我们往往要反过来考虑问题. 即一个函数是由哪几个基本初等函数(或简单函数)复合而成的.

(2) 初等函数

所谓初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)和复合所构成的函数.

初等函数是能用一个解析式表示的.

例如　$y = \lg(1 + \sqrt{1 + x^2})$, $y = \sqrt{\cos \dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

例题分析

1. 求函数的定义域

【例 1.1】　求下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{\sqrt{\ln(2 + x)}}{x(x - 4)}$

(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}} + \arcsin\left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)$

(3) $y = \arcsin(1 - x) + \dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1 + x}{1 - x}$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \ln(x + 4)$

解 (1)此函数可以看作是函数$\frac{1}{x(x-4)}$与函数$\sqrt{\ln(2+x)}$的乘积,它的定义域是这两个函数定义域的交集.

函数$\frac{1}{x(x-4)}$的定义域为$x \neq 0, x \neq 4$即$(-\infty,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$.

对于函数$\sqrt{\ln(2+x)}$由$\ln(2+x) \geqslant 0$得$2+x \geqslant 1$即$x \geqslant -1$.定义域为$[-1,+\infty)$.

故函数$y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$的定义域为它们的交集,即$[-1,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$.

(2)此函数是函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$与函数$\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$的和.它的定义域是这两个函数的定义域的交集.

对于函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$由$2-x^2>0$得$|x|<\sqrt{2}$,因此其定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

对于函数$\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$,由$\left|\frac{1}{2}x-1\right| \leqslant 1$,得$0 \leqslant x \leqslant 4$,因此其定义域为$[0,4]$.

故函数$y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$的定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \cap [0,4]=[0,\sqrt{2})$;

(3)此函数的定义域是函数$\arcsin(1-x)$的定义域与函数$\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$定义域的交集.

函数$\arcsin(1-x)$的定义域为$[0,2]$;

对于函数$\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$,由$\frac{1+x}{1-x}>0$得$-1<x<1$,即定义域为$(-1,1)$.

故函数$y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$的定义域为$[0,2] \cup (-1,1)=[0,1)$.

(4)此函数是$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$与$\ln(x+4)$的和.它的定义域是这两个函数定义域的交集.

对于$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$,由$x^2-4>0$得$x>2$或$x<-2$,定义域为$(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

对于$\ln(x+4)$的定义域是$x+4>0$得$x>-4$,即$(-4,+\infty)$.取它们的交集,故原函数的定义域为$(-4,-2) \cup (2,+\infty)$.

【例1.2】 设函数$f(x)$的定义域是$[1,5]$,求$f(1+x^2)$,$f(\ln x)$的定义域.

解 已知$f(x)$的定义域是$[1,5]$即$1 \leqslant x \leqslant 5$,$f(1+x^2)$函数关系没变,自然有$1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 5$,所以$0 \leqslant x^2 \leqslant 4$即$|x| \leqslant 2$.$f(1+x^2)$的定义域为$[-2,2]$.

对于$f(\ln x)$的定义域,显然应有$1 \leqslant \ln x \leqslant 5$,即$e \leqslant x \leqslant e^5$,定义域为$[e,e^5]$.

【例1.3】 设$f(x)=\frac{x}{1-x}$,求$f\{f[f(x)]\}$.

解 求$f[f(x)]$就是用$f(x)$代x然后化简.

$$f[f(x)]=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x},$$

由此可推得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}.$$

【例 1.4】 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$, $u=\psi(x)=x+1$,求复合函数 $f[\psi(x)]$ 的定义域.

解 易知 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$,即 $[-2,2]$;$\psi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由 $|u|=|x+1|\leqslant 2$,得 $f[\psi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$.

【例 1.5】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(\sin x)$;　(2) $f(x+a)$,$(a>0)$;　(3) $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

解 (1) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$ 得 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(2) 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 得 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$;

(3) 由 $0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant 1$ 得 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$,由 $0\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant 1$ 得 $f(x-\frac{1}{3})$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$,故函数 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

小结 求由解析表达式给出的函数的定义域,应注意以下几条原则:

(1) 若函数表达式是多项式,则函数的定义域为全体实数;

(2) 若函数表达式中含有分式,则分式的分母不能为零;

(3) 若函数表达式中含有偶次方根,则根号下的表达式必须大于等于零;

(4) 若函数表达式中含有对数,则真数必须大于零;

(5) 若函数表达式中含有反正弦函数或反余弦函数,则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域,例如,对于 $\arcsin(2x-1)$,必须 $|2x-1|\leqslant 1$;

(6) 若函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的定义域分别为数集 D_1 与 D_2,则函数 $f(x)\pm g(x)$ 或 $f(x)\cdot g(x)$ 的定义域都是 $D_1\cap D_2$;

(7) 求复合函数的定义域,可以先求各简单函数的定义域,再求复合函数的定义域;也可以先求出复合函数,直接讨论复合函数的定义域.

2. 求函数的表达式

(1) 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式.

这里的问题相当于:已知函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$. 根据复合函数的概念或函数记号的意义,方法是用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x,即可得到 $f[g(x)]$ 的表达式.

【例1.6】 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,$g(x)=1+x^2$,求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f[f(x)]$,$g[g(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$ 的表达式,并指出它们的定义域.

解
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}\quad(x\neq-1),$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1+x+1}=\frac{1+x}{2+x}\quad(x\neq-2),$$

$$g[g(x)]=1+(1+x^2)^2=x^4+2x^2+2\quad(x\in(-\infty,+\infty)),$$

$$f[g(x)] = \frac{1}{1+(1+x^2)} = \frac{1}{x^2+2} \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$$

$$g[f(x)] = 1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1} \quad (x \neq -1).$$

【例 1.7】(1) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$,求 $f(x-2), f(-x)$.

解 $f(x-2) = \begin{cases} 1+(x-2), & x-2<0 \\ 1, & x-2 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x<2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} 1-x, & -x<0 \\ 1, & -x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x, & x>0 \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$.

(2) 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式.

这是上一种情形的反问题.求解的一般方法是令 $g(x)=u$,解出 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式.但由于要从 $g(x)=u$ 反解 x,有时很繁,甚至不易解出,这时可根据所给表达式凑成 $g(x)$ 的函数就变得简单多了.

【例 1.8】 已知 $f(e^x+1) = e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 设 $u = e^x+1$ 即 $x = \ln(u-1)$

$$\begin{aligned} f(u) &= e^{2\ln(u-1)} + e^{\ln(u-1)} + 1 \\ &= (u-1)^2 + (u-1) + 1 \\ &= u^2 - u + 1 \end{aligned}$$

从而有 $f(x) = x^2 - x + 1$.

此题也可直接将 $f(e^x+1)$ 的表达式凑成 e^x+1 的函数

$$\begin{aligned} f(e^x+1) &= e^{2x}+e^x+1 \\ &= (e^x+1)^2 - (e^x+1) + 1 \end{aligned}$$

故 $f(x) = x^2 - x + 1$.

【例 1.9】 已知 $f\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 3, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $x \neq k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 $$\begin{aligned} f\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) &= \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 3 = \tan^2 x + 2 + \frac{1}{\tan^2 x} + 1 \\ &= \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

故 $f(x) = x^2 + 1$.

3. 求函数的值

如果已给出函数 $f(x)$ 的具体表达式,要求 $f(x)$ 在其定义域内某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,这是比较简单的.如果函数 $f(x)$ 的解析表达式未直接给出,而是涉及到其他方面的知识,如极限、导数、积分等,则情况就要复杂一些.这里不细讨论,仅举一两个简单的例子予以说明.

【例 1.10】 设 $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leqslant -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 < x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$,求 $f(-2), f(0), f(2)$.

解 这是分段函数,求函数值时必须从自变量所在的区间的解析表达式中去计算.