SHINIANZHENTI

全国硕士研究生入学考试十年真题精解系列精品丛书

2010年
全国硕士研究生入学考试
十年真题精解

数学一

全国硕士研究生入学考试辅导用书
编审委员会 编著

赠送100元
考研权威专家
网络课堂卡

- 来自北京大学、清华大学和中国人民大学的最新权威信息
- 资深专家亲自执笔，20多位一线专家深度审稿，倾力推出2010年考研整体解决方案
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握考研命题脉搏
- 彻底揭密历年试题内涵和隐含信息，剖析解题思路，拓展内在联系
- 解题技巧亮点回映，穷尽题型变化，提供模拟实战机会

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

全国硕士研究生入学考试十年真题精解系列精品丛书

全国硕士研究生入学考试
十年真题精解
数学一

全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学一/全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会编著.—6版.—北京：北京大学出版社，2009.3

ISBN 978-7-301-07234-9

Ⅰ.全…　Ⅱ.全…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第030388号

书　　　名：全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学一(第6版)

著作责任者：全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会　编著

责 任 编 辑：刘　勇

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-07234-9/O·0708

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871

网　　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn

电　　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62752021　出版部62754962

印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂

经　销　者：新华书店

787×1092　16开本　11印张　280千字

2004年5月第1版　2009年3月第6版

2009年3月第1次印刷

定　　　价：20.00元

系列丛书总序

时下，报考硕士研究生已经成为我国当代大学生选择发展方向的重要途径．2009 年全国考研人数达到了 124.6 万人，“考研热”是我国社会发展的大趋势和当代青年谋求发展相结合的产物．全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次、高水平人才的考试，考试的侧重点在于考查考生的综合能力．公共课是参加研究生入学考试道路上最大的障碍和挑战．许多考生并非由于专业课的缘故，而是公共课未达到国家最低录取分数线而与自己理想的学校失之交臂．

历史是一面镜子，了解昨天才能明白今天，掌握了历史和现在才能把握未来．研习历年的试题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节，也是考生掌握考试动态，赢得高分的最佳捷径．历年的考题是标准的复习题．自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如 2007 年数学四的第一大题的第(7)小题与 1997 年数学四的第二大题的第(3)小题、2006 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一第四大题、2003 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一的第一大题第(3)小题、2003 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第一大题第(5)小题、2003 年数学一的第三大题与 2001 年数学三的第六大题、2003 年数学四的第四大题与 2001 年数学一的第五大题是基本雷同的．英语与政治也有真题重复出现的情况，2003 年英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题、2003 年英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题、2003 年英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题、2003 年英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题、2003 年英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题、1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题，等等，都是非常相似的；2003 年政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题、2003 年政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题、2003 年政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题，等等，都是相同或非常相似的．所以，对往年真题的研究是最有帮助的．循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在．为了让广大参加研究生入学考试的考生能够进行有效的复习，我们倾情推出这套《全国硕士研究生入学考试十年真题精解》系列辅导用书．

这套《全国硕士研究生入学考试十年真题精解》共包括五册，分为《全国硕士研究生入学考试十年真题精解・数学一》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解・数学二》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解・数学三》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解・政治》和《全国硕士研究生入学考试十年真题精解・英语》．这套书是在清华大学、北京大学和中国人民大学的专家、教授的组织和策划下进行编写的，以北京、上海、深圳等全国著名考研辅导班的内部资料为基础，以在一线进行考研辅导的专家和教授的教案为蓝本，经过精心整理和严格按照大纲的要求编写而成．本书按照年代顺序，对历年的考试试题进行精心的讲解和思路点拨，阐释考点和难点，启迪考生的智慧．考生可以以此进行认真研习，准确掌握试题的内容和要求，进行“有的放矢”的考前复习．本书编写时将试题解

析与大纲考点相结合，总结出考试特点和规律，考生可以通过试题解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和发展趋势．相信这套书能让广大考生如虎添翼，在研究生入学考试中取得理想的成绩，迈进心仪的学校，实现自己的夙愿．

本套系列丛书中，数学一、数学二、数学三由童武、卢明、陶卫琼、赵晓敏、张孜编写；英语分册由周槐雄、刘仕文、苗红宜、谭莉、刘爽、王新会编写；政治分册由宋纪新、崔杰凯、姜宝静、赵艳萍、阮耀明、谢描编写．另外，为了尊重作者自己的意愿，还有一部分参与编写的教授和专家在此不再一一列出．在本丛书的编写过程中，得到了北京大学光华管理学院和清华大学经管学院部分专家和教授的大力支持，在此表示衷心的感谢．

由于时间仓促，不当和疏漏之处在所难免，望广大专家和读者批评指正．

本套丛书附有超值赠送服务．凡是购买本书者，都将**免费获得由考研著名辅导专家主讲的价值100元**的“中国大手笔教育在线一卡通”．考生可以登录 www.firstedu.org.cn，免费注册“用户名”和“密码”，登录系统，进行“学习卡注册”，然后可以自由选择考研名师课堂精讲班和模拟冲刺班的相关辅导课程进行学习．考研名师课堂辅导班课程均由辅导专家团名师主讲，领衔主讲老师具有丰富的命题研究、讲课和阅卷评卷的经验．

本套丛书由中国大手笔教育在线提供全程的技术服务与网络课堂支持．凡是购买本书的考生均可享受中国大手笔教育在线提供的一系列教学服务，如免费下载网络教学资料、最新大纲信息以及本书修订文件、权威考试资讯等．

中国大手笔教育在线客服咨询热线：010-58608676

网址：www.firstedu.org.cn

编　者

2009年3月于北京

目　录

2010年全国硕士研究生入学考试
数学解题思路与技巧分析

众所周知，报考硕士研究生近年来已经成为我国社会的一大热点，成为当代大学毕业生选择发展方向的主流．据统计，我国参加全国硕士研究生入学考试的人数在逐年递增，2009年全国考研人数达到了124.6万人．这其中，应届大学本科毕业生的报考人数和往届毕业生的报考人数基本已经持平．出现这样愈演愈烈的“考研热”并非偶然现象，它是我国社会发展的大趋势和当代青年学子谋求个人发展相结合下的必然产物，充分反映了我们这个时代的特征．毋庸置疑，“考研热”的出现对于国家和个人都具有不可估量的积极意义．一方面，我国自实施改革开放以来，现代化建设事业可谓日新月异，中国已经融入世界舞台，参与国际交流与竞争，无形中对于高学历、高素质人才的需求量越来越大．国家之间的竞争，说到底是人才的竞争；国家综合实力的提高，也在相当大的程度上取决于人才的培养．在我国政府提出“科教兴国”的战略性举措的时代背景下，考研大潮的风起云涌也就不足为奇了．另一方面，由于高等教育的普及率不断提高，越来越多的青年学子认识到了知识经济时代个人的发展必须与时代要求相结合，只有不断提高自己的知识水平，才能适应形势，为个人创造更广阔的发展空间，实现自己的人生价值．时代在召唤，成为高水平复合型人才，跨入研究生行列，已是大势所趋．

【全国硕士研究生入学考试的性质与特点】

全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次高水平人才的考试，并不同于大学在校期间以检验学生学习水平和掌握知识程度为目的的考试．明确研究生入学考试的选拔性质，就不难认识到此项考试具有相当的难度．基于这一点，考试的侧重点在于考查考生的综合能力．其中具体的深度和广度，需要考生在长期的复习备考过程中逐渐领会．此外，考生们在投身于考研大军之初，应该有充分的心理准备：考研是一项艰苦而细致的系统工程，需要耐心、信心和决心．

【全国硕士研究生入学考试(数学)大纲】

由国家考试中心制定的“数学考试大纲”是数学考试命题的纲领，它对数学考试的性质、内容、要求、分类和适用专业等方方面面进行了详尽的阐述．因此，大纲对考生有重要的指导性作用，是考生复习备考的重要依据，应引起高度的重视．考生应认真阅读，仔细研究，对于大纲所涉及的一切方面都要了然于胸，这样才能有的放矢，事半功倍．自1989年全国硕士研究生入学考试实行全国统考以来，国家考试中心就严格依照大纲所规定的内容和要求来命题，在此期间，大纲历经若干次修订，例如，考试中心于1996年、2002年都对大纲进行了修订，从2003年起数学一增加了“几何型概率”，删除了“两曲线的交角”和“包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组”，数学二增加了“实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角矩阵”；数学四增加了“常微分方程”，同时将数学试卷的满分调整为150分．**从2004年起，数学二增加了“多元函数微积分学”，并将选择题和填空题的考分比例由原来的48分增加到56分．**

【全国硕士研究生人学考试(数学)试题分析】

本丛书收录了自1998年至2009年历年的全部考研数学试题，目的是帮助考生全面准确地掌握试题的内容、要求、试卷的结构及命题的特点和走向等. 考生只有在解答真题、研究真题的基础上才能知己知彼，提高复习效率，直至取得满意的成绩. 考生在研读本丛书的过程中，要善于归纳总结，提炼出规律性的东西. 尽管数学考试最具难度和挑战性，并且试题不断推陈出新，但其基本模式却是相对稳定的，因此考生应学会以不变应万变. 在此，编者提纲挈领地将历年真题中呈现出的几大特点一一阐述如下，希望能对考生起到抛砖引玉的作用.

一、试题着重考查基本概念、基本理论、基本方法，这一点不仅体现在试题中直接考查“三基”的内容占相当大的比重上，也贯穿渗透到考查综合能力、技巧的题目当中. 没有扎实过硬的基本功，取得好成绩是不可能的. 就2006年的试题而言，直接考查“三基”的题目就有**接近60分值**的题目，可见试题对于“三基”的要求是非常高的. 以下编者举出若干例题予以具体说明.

例1（1999年数学一、二、三、四中共同的一道选择题）

设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

本题涉及到了原函数，不定积分，变上限定积分，函数的奇偶性、单调性、周期性等基本概念.

例2（2000年数学二的一道选择题）

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

本题涉及到了极值点、拐点等基本概念，考查了判别极值点、拐点的基本方法.

例3（2006年数学一的一道选择题）

设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

本题涉及到一元函数的极值问题、二阶偏导数的概念和计算方法.

例4（2005年数学一的一道选择题）

设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

本题考查了隐函数存在定理和偏导数之间的关系，有一定的技巧性，但归结为基本概念的灵活运用.

二、试题有相当比重在于考查重要定理、公式的灵活运用，这一点是由数学学科自身的特点决定的，数学是思维的艺术体操，对学习者的思维能力要求颇高. 数学中本身包含有大量的公理、定理、公式等，这些知识点并不是简单堆砌在教科书和文献中的，它们是融会贯通，有机结合在一起的. 在正确理解公式、定理的基础上，更重要的就是灵活运用它们，试题中有很多热点集中于此. 例如，1998 年数学一(第九题)、数学二(第八题)、数学三(第六题)、数学四(第七题)是分别应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题，都是考查重要定理的题目；再如 2001 年数学三(第七题)考查的是积分中值定理、罗尔定理. 特别值得一提的是 2000 年数学一、二、三、四的一道相同证明题：

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$；$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

这道题普遍得分较低，它涉及到了函数零点定理、罗尔定理等重要定理，有一定难度. 因此，灵活运用定理、公式解题(尤其是证明题)是颇具难度的，需要大量的思考、练习和归纳总结.

三、试题中有很多题目是考查考生运用数学知识，建立简单数学模型、解决实际问题的能力. 数学的理论性很强，但在实际中有广泛的应用，提高运用数学工具解决实际问题的能力，应引起考生的足够重视. 近几年的试题中明显反映出考查这一方面的分量在不断加强. 具体而言，这些应用性题目包括了几何、物理、经济以及其他社会生活中的相关问题. 例如：1998 年数学一(第五题)、数学二(第七题)求测量仪器的下沉深度与速度的关系，数学三(第五题)、数学四(第六题)求新酒窖藏多少年后出售总收入的现值最大；1999 年数学一(第七题)、数学二(第六题)求抓斗提升污泥做多少功，数学三(第五题)、数学四(第五题)求生产某产品的投入总费用最小；2000 年数学一(第八题)求球体的重心坐标，数学二(第七题)求经过多少年湖泊中污染物的治理达标，数学三(第五题)和数学四(第五题)求产品销售价格使利润取最大值；2001 年数学一(第八题)、数学二(第九题)求雪堆全部融化所需时间，数学三(第六题)求面积最大值；2002 年数学二(第七题)求闸门矩形部分的高等等，都是和实际问题相关的题目.

四、综合性题目的考查. 如前文所述，数学中的知识点并非孤立存在，彼此之间有着千丝万缕的联系. 试题中出现的综合性题目，要求考生有较强的综合能力，而不是仅仅局限于某些方面. 例如 1998 年数学一(第一题的(4))：

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的，讨论两直线

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2} \quad \text{与} \quad \frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

的关系就是空间解析几何与线性代数的综合题；又如 1999 年数学三(第一题的(5))：

设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布，$\mathrm{E}(X_{ij})=2$，求行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 E(Y)，这是线性代数与概率论的综合题.

【全国硕士研究生入学考试(数学)的复习】

在明确了考试的性质、内容和要求之后，就是长期的分阶段、分层次的复习备考过程. 结合数学考试的特点，制定切实可行的复习计划是必要的. 如前文所涉及的无论对考试大纲的了解还是对试题精髓的掌握，一言以蔽之，就是打好基础，提高能力. 数学考试的三个主要组成部分：高等数学、线性代数、概率论，在大学本科的课程设置里，基本都是分布在大学一、二年级中来学习，到本科毕业前夕参加考研时已相隔甚远，因此第一阶段宜从基础入手，将教材、课本系统地进行复习. 切不可轻视这一步，因为这一步是奠基性的工作，后续步骤都是以此为出发点的. 当然，复习教材不同于大学一、二年级时学习新课，无须面面俱到，只需依据大纲所列内容全面复习，大纲不要求的内容不必过多纠缠. 复习教材过程中，除了书本知识的重新熟悉外，可以适当做一些基本的习题(如书上的课后习题)，意在尽早进入状态. 第一阶段对于基本内容的复习结束后，就是提高能力的阶段. 购买考研用书、参加考研辅导班是绝大多数考生的必经之路. 学好数学很关键的一点就是多做习题，但是考研参考书、习题集却并非多多益善. 当前市面上的此类书籍可谓多如牛毛，很容易使人无所适从. 就编者看来，好的复习用书不外乎满足以下两点要求：一是紧扣考研这一主题；二是难度适中，不宜太难或太易. 考生需多了解信息，仔细甄别选择. 至于考研辅导班的选择，按大众心理，所谓名师讲授的辅导班当为首选，但要与自己的实际情况、时间安排相协调，毕竟，辅导班的作用是辅助性的，不可过分依赖，因为知识的消化、能力的提高更主要来自于考生自己的学习和锻炼. 总而言之，提高阶段需要考生在物质、精力和时间上大量投入. 在临考之前的一段时间里，考生应脱身于题海苦战，以归纳整理、查缺补漏为主要工作，为了进入应试状态，可合理安排模拟自测，时间及强度因人而异.

【临场经验与技巧】

硕士研究生入学考试是高水平的选拔考试，竞争激烈，关乎考生前途，紧张在所难免. 考生应有充分心理准备，不可过分怯场，要相信自己的水平. 上了考场，困难必定存在，考生应摆正心态，切忌一遇不顺就惊慌失措以致影响后面的考试，更不能轻言放弃. 就数学考试而言，历年的单科分数线在 50～55 分之间，最低时(1998 年)仅 40 多分，所以遇到不会做的题目时，万不可放弃希望，应避重就轻，将相对较易题目的分数拿到手，做到不该失分的题不失分. 真正的难题对所有人都是有难度的，况且评分是按步给分，能够做对多少就做多少，完全无把握的题目可以列出相关的公式、定理. 整个考试的过程中，对于时间的分配要得当，尤其对于完全没有思路的题目要敢于舍去，以尽可能留出时间争取在其他题目上多拿分或不失分. 总之，考场上只要不躁不慌，充分发挥自己的水平，就一定能取得满意的成绩.

最后，本丛书编者衷心祝愿广大考生在复习备考过程中百尺竿头更进一步，以优异的成绩跻身研究生行列.

2009 年全国硕士研究生入学考试
数学一试题

一、选择题（1—8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则（　　）.

（A）$a=1,\ b=-1/6$　　　（B）$a=1,\ b=1/6$

（C）$a=-1,\ b=-1/6$　　　（D）$a=-1,\ b=1/6$

（2）如图 1 所示，正方形 $\{(x,y)\,\big|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$（　　）.

（A）I_1　　（B）I_2　　（C）I_3　　（D）I_4

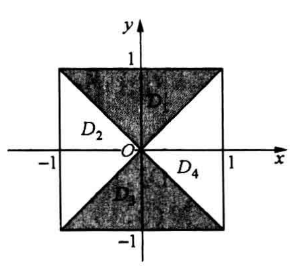


图 1

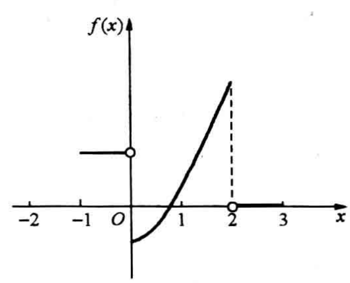
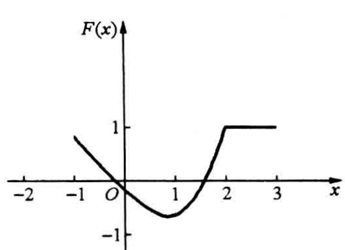
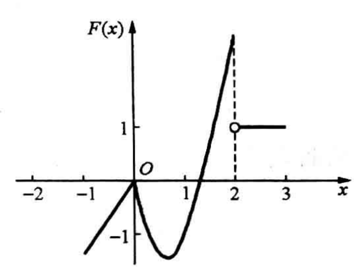


图 2

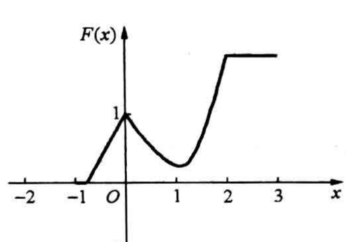
（3）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图 2 所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为（　　）.



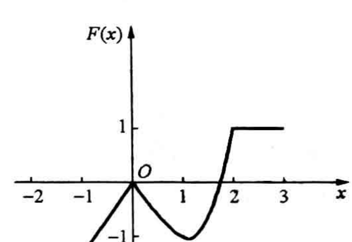
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则(　　).

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛　　(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛　　(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散

(5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1/2&1/4&-1/6\\-1/2&1/4&1/6\\1/2&-1/4&1/6\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1/2&-1/2&1/2\\1/4&1/4&-1/4\\-1/6&1/6&1/6\end{bmatrix}$

(6) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为二阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的伴随矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

(7) 设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$\mathrm{E}(X)=$(　　).

(A) 0　(B) 0.3　(C) 0.7　(D) 1

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/2$，记$F_z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_z(z)$的间断点个数为(　　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

二、填空题(9—14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程$y''+ay'+by=0$的通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程$y''+ay'+by=x$满足条件$y(0)=2,y'(0)=0$的解为________.

(11) 已知曲线L：$y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则$\int_L x\mathrm{d}s=$________.

(12) 设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，则$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

(13) 若三维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，其中$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{\alpha}$的转置，则矩阵$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$的非零特征值为________.

(14) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自二项分布总体$B(n,p)$的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差. 若$\overline{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，则$k=$________.

三、解答题(15—23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分9分)

求二元函数$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$的极值.

(16)（本题满分 9 分）

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $s_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$s_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 s_1 与 s_2 的值.

(17)（本题满分 11 分）

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕轴旋转而成.

(Ⅰ) 求 S_1 及 S_2 的方程；　　(Ⅱ) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)（本题满分 11 分）

(Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a);$$

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19)（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

(Ⅰ) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

(22)（本题满分 11 分）

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球和白球的个数.

(Ⅰ) 求 $P\{X=1|Z=0\}$；

(Ⅱ) 求二维随机变量 (X,Y) 概率分布.

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求参数 λ 的矩估计量；

(Ⅱ) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2008 年全国硕士研究生入学考试
数学一试题

一、选择题(1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　).

(A) $(1,0)$　　(B) $(-1,0)$　　(C) $(0,1)$　　(D) $(0,-1)$

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$(其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

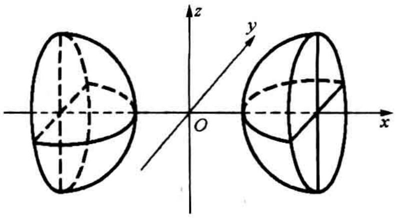
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶非零矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为(　　).



(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

(7) 随机变量 X,Y 独立同分布且 X 的分布函数为 $f(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　).

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8) 随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　).

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9—14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点$(0,1)$处的切线方程为________.

(11) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 收敛,在 $x=-4$ 发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的二维列向量,$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=\mathrm{E}(X^2)\}=$________.

三、解答题(15—23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L\sin2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 C:$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$求曲线 C 上与 OXY 面的距离最远点和最近点.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$连续.(Ⅰ) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,用定义证明 $F(x)$可导,且 $F'(x)=f(x)$.(Ⅱ) 设 $f(x)$是周期为 2 的连续函数,证明 $g(x)=\int_0^x 2f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是周期为 2 的周期函数.

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$展开成余弦形式的傅里叶级数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$的和.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.

(Ⅰ) 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant2$;　(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a & 1 & & 0\\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & a^2 & 2a\end{bmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{b}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅰ) 证明行列式$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ) a 为何值，方程组有唯一解？求 x_1；

(Ⅲ) a 为何值，方程组有无穷多解？求通解.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ) 求 $P\{Z\leqslant 1/2\,|\,X=0\}$；　　(Ⅱ) 求 Z 的概率密度.

(23)（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；　　(Ⅱ) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 $\mathrm{D}(T)$.

2007年全国硕士研究生入学考试
数学一试题

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分.在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

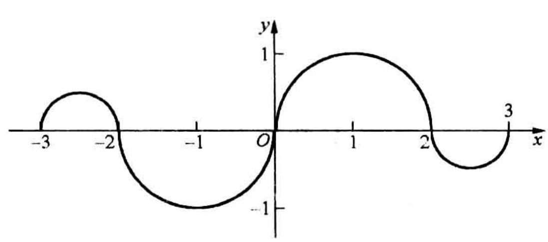
(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$,渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 的图形分别是直径为2的上、下半圆周,设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是(　　).

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(3)=-\dfrac{5}{4}F(2)$



(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n$. 则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛　　(B) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(C) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛　　(D) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(6) 设曲线 L: $f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数),过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列小于零的是(　　).

(A) $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s$　　(D) $\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$