

诺贝尔物理学奖获得者 玻恩 经典名著

**Born & Wolf**

# Principles of Optics

Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light  
Seventh (Expanded) Edition

# 光学原理

第七版 下册



Principles of  
Optics



## 光的传播、干涉和衍射的电磁理论

[德] 马科斯·玻恩

[美] 埃米尔·沃耳夫

著

杨葭荪

译



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry  
<http://www.phei.com.cn>

# 光 学 原 理

( 第七版 ) ( 下册 )

Principles of Optics:  
Electromagnetic Theory of Propagation,  
Interference and Diffraction of Light  
Seventh (Expanded) Edition

[ 德 ] 马科斯·玻恩      著  
[ 美 ] 埃米尔·沃耳夫

杨葭荪    译

电子工业出版社  
Publishing House of Electronics Industry  
北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书是一部经典光学世界名著,全书以麦克斯韦宏观电磁理论为基础,系统阐述光在各种媒质中的传播规律,包括反射、折射、偏振、色散、干涉、衍射、散射以及金属光学(吸收媒质)和晶体光学(各向异性媒质)等。几何光学也作为极限情况( $\lambda \rightarrow 0$ )而纳入麦克斯韦方程系统,并从衍射观点讨论了光学成像的像差问题。新版增加了计算机层析术、宽带光干涉、非均匀媒质光散射等内容。

本书引文丰富且所涉广泛,上溯历史,下至近代,旁及有关学科和应用,故能于一专著中给读者以宽阔视野与充分求索之空间。全书共十五章,中译本分上下册出版。上册包括“历史引言”和前八章,内容多属基础;下册包括后七章和附录,层次较深。

本书基础性、系统性和学术性兼备,可供光学教学与研究人员包括高年级本科生、研究生等阅读和参考。

This work is an authorized translation of the 2002 reprint, with corrections, of the seventh (expanded) edition published by Cambridge University Press in 1999.

© Estate of Max Born and Emil Wolf 1999.

本书中文简体版专有出版权由 Cambridge University Press 授予电子工业出版社,未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权贸易合同登记号 图字:01-2004-0903

## 图书在版编目(CIP)数据

光学原理,下册:第7版/(德)玻恩(Born, M.), (美)沃耳夫(Wolf, E.)著;杨葭荪译.

北京:电子工业出版社,2006.4

书名原文:Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Seventh (Expanded) Edition

ISBN 7-121-02424-1

I. 光... II. ①玻... ②沃... ③杨... III. 光学 IV. 043

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第024451号

责任编辑: 窦 昊

印 刷: 北京天宇星印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787 × 1092 1/16 印张: 25 字数: 624 千字

印 次: 2006年4月第1次印刷

定 价: 53.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

## 下册出版说明

《光学原理》第七版中译本的下册是一全新译本,其原有章节亦全部重新由本次译者独立专注译出,以求提高译文质量,出版时间因而推迟,望读者鉴谅。

为便于使用者查阅所需资料,译本末尾特增加了全书内容索引和著者索引,内容索引仍按原书索引英文字母为序而并列中文对照,以便于查索及简化编排工作。

下册中所包含的新增内容计有:第 10 章 10.5 节,宽带光的干涉和衍射;关联感生的光谱改变;第 13 章整个一章,不均匀媒质产生的散射,各含有启迪性的课题,甚具阅读研究之价值。

# 目 录

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 第 9 章 像差的衍射理论 .....                 | 429 |
| 9.1 存在像差时的衍射积分 .....                | 430 |
| 9.1.1 衍射积分 .....                    | 430 |
| 9.1.2 位移定理;参考球的更换 .....             | 431 |
| 9.1.3 强度和波阵面平均形变之间的关系 .....         | 433 |
| 9.2 像差函数的展开 .....                   | 433 |
| 9.2.1 泽尼克圆多项式 .....                 | 433 |
| 9.2.2 像差函数的展开 .....                 | 436 |
| 9.3 初级像差的容限条件 .....                 | 438 |
| 9.4 单种像差衍射图样 .....                  | 442 |
| 9.4.1 初级球差 .....                    | 444 |
| 9.4.2 初级彗差 .....                    | 447 |
| 9.4.3 初级像散 .....                    | 447 |
| 9.5 广延物的成像 .....                    | 450 |
| 9.5.1 相干照明 .....                    | 450 |
| 9.5.2 不相干照明 .....                   | 453 |
| 第 10 章 部分相干光的干涉和衍射 .....            | 459 |
| 10.1 引言 .....                       | 459 |
| 10.2 实多色场的复数表示 .....                | 461 |
| 10.3 光束的关联函数 .....                  | 466 |
| 10.3.1 两束部分相干光的干涉;互相干函数和复相干度 .....  | 466 |
| 10.3.2 互相干的谱表示 .....                | 469 |
| 10.4 准单色光的干涉和衍射 .....               | 471 |
| 10.4.1 准单色光的干涉;互强度 .....            | 472 |
| 10.4.2 扩展不相干准单色光源光场互强度和相干度的计算 ..... | 474 |
| (a) 范西特-泽尼克定理 .....                 | 474 |
| (b) 霍普金斯公式 .....                    | 478 |
| 10.4.3 一个例子 .....                   | 479 |
| 10.4.4 互强度的传播 .....                 | 484 |
| 10.5 宽带光的干涉和谱相干度;关联感生的光谱改变 .....    | 486 |
| 10.6 几项应用 .....                     | 491 |
| 10.6.1 扩展不相干准单色光源像中的相干度 .....       | 491 |

|               |                   |            |
|---------------|-------------------|------------|
| 10.6.2        | 聚光器对显微镜分辨率的影响     | 494        |
| (a)           | 中肯照明              | 494        |
| (b)           | 科勒照明              | 496        |
| 10.6.3        | 部分相干准单色照明成像       | 498        |
| (a)           | 互强度在光学系统中的传输      | 498        |
| (b)           | 透射照明下物的成像         | 500        |
| 10.7          | 有关互相干的几个定理        | 503        |
| 10.7.1        | 不相干光源光场互相干的计算     | 503        |
| 10.7.2        | 互相干的传播            | 505        |
| 10.8          | 严格的部分相干性理论        | 506        |
| 10.8.1        | 互相干的波动方程          | 506        |
| 10.8.2        | 互相干传播定律的严格表述      | 508        |
| 10.8.3        | 相干时间和有效光谱宽度       | 511        |
| 10.9          | 准单色光的偏振特性         | 514        |
| 10.9.1        | 准单色平面波的相干矩阵       | 515        |
| (a)           | 完全非偏振光(自然光)       | 519        |
| (b)           | 完全偏振光             | 519        |
| 10.9.2        | 几种等效表示;光波的偏振度     | 520        |
| 10.9.3        | 准单色平面波的斯托克斯参量     | 523        |
| <b>第 11 章</b> | <b>严格的衍射理论</b>    | <b>526</b> |
| 11.1          | 引言                | 526        |
| 11.2          | 边界条件和表面电流         | 527        |
| 11.3          | 平面屏衍射;电磁形式的巴比涅原理  | 529        |
| 11.4          | 平面屏产生的二维衍射        | 530        |
| 11.4.1        | 二维电磁场的标量性质        | 530        |
| 11.4.2        | 平面波组成的角谱          | 530        |
| 11.4.3        | 对偶积分方程形式的表述       | 533        |
| 11.5          | 平面波的半平面二维衍射       | 534        |
| 11.5.1        | $E$ 偏振情况的对偶积分方程之解 | 534        |
| 11.5.2        | 解的非涅耳积分表示         | 536        |
| 11.5.3        | 解的性质              | 539        |
| 11.5.4        | $H$ 偏振情况的解        | 543        |
| 11.5.5        | 一些数值计算            | 544        |
| 11.5.6        | 与近似理论和实验结果的比较     | 546        |
| 11.6          | 平面波的半平面三维衍射       | 547        |
| 11.7          | 定域光源所产生的场在半平面上的衍射 | 550        |
| 11.7.1        | 一个平行于衍射边的线电流      | 550        |

|               |                                                   |            |
|---------------|---------------------------------------------------|------------|
| 11.7.2        | 一个偶极子 .....                                       | 554        |
| 11.8          | 其他问题 .....                                        | 556        |
| 11.8.1        | 两个平行半平面 .....                                     | 556        |
| 11.8.2        | 平行错位叠加半平面的无穷堆垛 .....                              | 558        |
| 11.8.3        | 一条窄带 .....                                        | 559        |
| 11.8.4        | 其他相关问题 .....                                      | 560        |
| 11.9          | 解的惟一性 .....                                       | 561        |
| <b>第 12 章</b> | <b>光在超声波上的衍射 .....</b>                            | <b>562</b> |
| 12.1          | 现象的定性描述和麦克斯韦微分方程的理论处理(概述) .....                   | 562        |
| 12.1.1        | 现象的定性描述 .....                                     | 562        |
| 12.1.2        | 麦克斯韦方程的理论处理(概述) .....                             | 564        |
| 12.2          | 超声衍射的积分方程处理方法 .....                               | 567        |
| 12.2.1        | $E$ 偏振情况的积分方程 .....                               | 568        |
| 12.2.2        | 积分方程的试探解 .....                                    | 569        |
| 12.2.3        | 衍射谱中和反射谱中的光波振幅表达式 .....                           | 572        |
| 12.2.4        | 逐次逼近法的方程解 .....                                   | 572        |
| 12.2.5        | 一些特别情况的一级和二级谱线强度表达式 .....                         | 575        |
|               | (a) $\delta/\xi \ll 1$ 并且 $\xi$ 远大于 1 .....       | 575        |
|               | (b) $\xi \approx \frac{1}{2}, \delta \ll 1$ ..... | 575        |
|               | (c) 正入射( $\xi = 0$ ), $\delta \ll 1$ .....        | 576        |
| 12.2.6        | 一些定性结果 .....                                      | 576        |
| 12.2.7        | 拉曼-纳斯近似 .....                                     | 578        |
| <b>第 13 章</b> | <b>不均匀媒质产生的散射 .....</b>                           | <b>580</b> |
| 13.1          | 标量散射理论基础 .....                                    | 580        |
| 13.1.1        | 基本积分方程的推导 .....                                   | 580        |
| 13.1.2        | 一级玻恩近似 .....                                      | 583        |
| 13.1.3        | 周期势产生的散射 .....                                    | 587        |
| 13.1.4        | 多重散射 .....                                        | 590        |
| 13.2          | 散射势重建衍射层析术原理 .....                                | 592        |
| 13.2.1        | 散射场的角谱表示 .....                                    | 593        |
| 13.2.2        | 衍射层析术的基本定理 .....                                  | 595        |
| 13.3          | 光学截面定理 .....                                      | 598        |
| 13.4          | 倒易关系 .....                                        | 604        |
| 13.5          | Rytov 级数 .....                                    | 606        |
| 13.6          | 电磁波的散射 .....                                      | 608        |
| 13.6.1        | 电磁散射理论的积分-微分方程 .....                              | 608        |

|               |                              |            |
|---------------|------------------------------|------------|
| 13.6.2        | 远场 .....                     | 609        |
| 13.6.3        | 电磁波散射的光学截面定理 .....           | 611        |
| <b>第 14 章</b> | <b>金属光学 .....</b>            | <b>614</b> |
| 14.1          | 波在导体中的传播 .....               | 614        |
| 14.2          | 金属面的反射和折射 .....              | 618        |
| 14.3          | 金属光学常数电子论初探 .....            | 626        |
| 14.4          | 波在分层导电媒质中的传播;金属膜理论 .....     | 628        |
| 14.4.1        | 透明基片上的单层吸收膜 .....            | 629        |
| 14.4.2        | 吸收基片上的单层透明膜 .....            | 633        |
| 14.5          | 导电球产生的衍射;米氏理论 .....          | 634        |
| 14.5.1        | 问题的数学解 .....                 | 635        |
|               | (a) 场的德拜势表示 .....            | 635        |
|               | (b) 场分量的级数展开式 .....          | 639        |
|               | (c) 缔合勒让德函数和柱面函数有关公式一览 ..... | 646        |
| 14.5.2        | 米氏公式的一些结果 .....              | 647        |
|               | (a) 分波 .....                 | 647        |
|               | (b) 两种极端情况 .....             | 648        |
|               | (c) 散射光的强度和偏振 .....          | 652        |
| 14.5.3        | 总散射和消光 .....                 | 656        |
|               | (a) 某些一般考虑 .....             | 656        |
|               | (b) 计算结果 .....               | 657        |
| <b>第 15 章</b> | <b>晶体光学 .....</b>            | <b>661</b> |
| 15.1          | 各向异性媒质的介电常数 .....            | 661        |
| 15.2          | 各向异性媒质中单色平面波的结构 .....        | 663        |
| 15.2.1        | 相速度和光线速度 .....               | 663        |
| 15.2.2        | 光在晶体中传播的非涅耳公式 .....          | 666        |
| 15.2.3        | 确定传播速度和振动方向的几何作图法 .....      | 669        |
|               | (a) 波法线椭球 .....              | 669        |
|               | (b) 光线椭球 .....               | 671        |
|               | (c) 法线曲面和光线曲面 .....          | 672        |
| 15.3          | 单轴晶体和双轴晶体的光学特性 .....         | 673        |
| 15.3.1        | 晶体的光学分类 .....                | 673        |
| 15.3.2        | 光在单轴晶体中的传播 .....             | 674        |
| 15.3.3        | 光在双轴晶体中的传播 .....             | 676        |
| 15.3.4        | 晶体折射 .....                   | 679        |
|               | (a) 双折射 .....                | 679        |
|               | (b) 圆锥折射 .....               | 681        |

|        |                                      |     |
|--------|--------------------------------------|-----|
| 15.4   | 晶体光学测量 .....                         | 686 |
| 15.4.1 | 尼科耳棱镜 .....                          | 686 |
| 15.4.2 | 补偿器 .....                            | 687 |
|        | (a) 1/4 波片 .....                     | 687 |
|        | (b) 巴比涅补偿器 .....                     | 688 |
|        | (c) 索累补偿器 .....                      | 689 |
|        | (d) Berek 补偿器 .....                  | 690 |
| 15.4.3 | 晶片干涉 .....                           | 690 |
| 15.4.4 | 单轴晶片的干涉图 .....                       | 694 |
| 15.4.5 | 双轴晶片的干涉图 .....                       | 696 |
| 15.4.6 | 晶体媒质的光轴定位和主折射率测定 .....               | 698 |
| 15.5   | 应力双折射和形序双折射 .....                    | 699 |
| 15.5.1 | 应力双折射 .....                          | 699 |
| 15.5.2 | 形序双折射 .....                          | 702 |
| 15.6   | 吸收晶体 .....                           | 704 |
| 15.6.1 | 光在吸收型各向异性媒质中的传播 .....                | 704 |
| 15.6.2 | 吸收晶片的干涉图 .....                       | 709 |
|        | (a) 单轴晶体 .....                       | 709 |
|        | (b) 双轴晶体 .....                       | 710 |
| 15.6.3 | 二向色性偏振器 .....                        | 711 |
| 附录 A   | 变分法 .....                            | 714 |
| A.1    | 欧拉方程——极值的必要条件 .....                  | 714 |
| A.2    | 希尔伯特独立性积分和哈密顿-雅可比方程 .....            | 715 |
| A.3    | 致极曲线场 .....                          | 717 |
| A.4    | 从哈密顿-雅可比方程的解确定全部致极曲线 .....           | 719 |
| A.5    | 哈密顿正则方程 .....                        | 720 |
| A.6    | 自变量不显现在被积函数中时的特殊情况 .....             | 721 |
| A.7    | 不连续地段 .....                          | 722 |
| A.8    | Weierstrass 条件和勒让德条件(极值的充分性条件) ..... | 724 |
| A.9    | 当路线的一端点被约束在一曲面上时变分积分的极小值 .....       | 726 |
| A.10   | 雅可比极小值判据 .....                       | 727 |
| A.11   | 例一:光学 .....                          | 727 |
| A.12   | 例二:质点力学 .....                        | 729 |
| 附录 B   | 光学、电子光学和波动力学 .....                   | 732 |
| B.1    | 基本形式的哈密顿类似 .....                     | 732 |
| B.2    | 变分形式的哈密顿类似 .....                     | 734 |
| B.3    | 自由电子的波动力学 .....                      | 737 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| B.4 光学原理对电子光学的应用 .....                                | 738 |
| 附录 C 积分的渐近近似 .....                                    | 740 |
| C.1 最陡下降法 .....                                       | 740 |
| C.2 稳定相法 .....                                        | 744 |
| C.3 二重积分 .....                                        | 745 |
| 附录 D 狄拉克 $\delta$ 函数 .....                            | 747 |
| 附录 E 洛伦兹-洛伦茨定律严格推导所用的一个数学引理(2.4.2 节) .....            | 752 |
| 附录 F 电磁场中不连续态的传播(3.1.1 节) .....                       | 754 |
| F.1 各场矢量中不连续变化的相互关系 .....                             | 754 |
| F.2 运动不连续面处的场 .....                                   | 756 |
| 附录 G 泽尼克圆多项式(9.2.1 节) .....                           | 758 |
| G.1 一些一般考虑 .....                                      | 758 |
| G.2 径向多项式 $R_n^{*m}(\rho)$ 的显表达式 .....                | 760 |
| 附录 H 谱相干度不等式 $ \mu_{12}(v)  \leq 1$ 的证明(10.5 节) ..... | 764 |
| 附录 I 倒易不等式的证明(10.8.3 节) .....                         | 765 |
| 附录 J 两个积分的计算(12.2.2 节) .....                          | 767 |
| 附录 K 标量波场中的能量守恒(13.3 节) .....                         | 770 |
| 附录 L 琼斯引理的证明(13.3 节) .....                            | 772 |
| 著者索引 .....                                            | 774 |
| 英汉内容索引 .....                                          | 790 |

## 第9章 像差的衍射理论

第5章在几何光学的基础上研究了各种像差对成像的影响。在该处理中,像被看成是几何光线与像平面交点所形成的图形,但因光线聚焦失锐而变得有些模糊。因为几何光学给出的是一种近似模型,仅在波长很短的极限情况下有效,故可预料当像差变小时几何光学必将逐渐失去其有效性。例如,一个理想的球面会聚波从一圆孔射出时,在极短波长极限情况下几何光学预言焦平面上焦点的强度为无穷大,其他各处强度皆为零,而实际情况却如8.5.2节所证,像的中央是一个亮区,周围环绕着明暗相间的圆环(爱里斑)。在焦平面附近,光的分布状态亦呈现复杂性质(见图8.41),比几何光学所设想的要复杂得多。这就促使我们采用衍射理论来研究像差的影响。

这一领域最早的研究始自瑞利<sup>①</sup>。他的主要贡献是对成像系统所可容许的球差给出一个定量判据(在9.3节中讨论),该项判据,其形式经推广后,业已广为用来确定光学仪器可以容许的像差最大量,即所谓像差容限。之后,该项课题经众家之研究而大为推进,他们仔细探讨了各种不同像差的影响<sup>②</sup>,其中尤以 Steward, Picht 和玻恩<sup>③</sup>论著为广,可特予提出。

用衍射来处理存在像差时的成像问题,奈波尔(Nijboer)<sup>④</sup>做了极其大量的工作,其中一部分系同泽尼克合作完成。奈波尔的工作在小像差的影响方面,即波阵面偏离球面仅在一个波长以内。大像差影响的衍射理论研究,则归于 van Kampen<sup>⑤</sup>,他借助渐近近似求解。该处理的出发点是将稳定相原理的形式推广到二元函数。但此原理的严格表述后来才由福克(J. Focke)给出(见附录C,第745页)。

本章主要部分是讲述奈波尔-泽尼克理论,并将研讨受各种初级像差影响的衍射像结构。最后一节(9.5节)将从点物跨越到广延物,并研究相干照明和非相干照明成像。部分相干照明成像则在第10章中讨论。

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), 8(1879), 403. 重印于其 *Scientific Papers*, Vol. 1 (Cambridge, Cambridge University Press, 1899), p. 428.

② E. Wolf 对像差和衍射理论做了历史回顾,其文载于 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), 14(1951), 95.

③ G. C. Steward, *Phil. Trans Roy. Soc.*, A, 255(1925), 131; 及其书著 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge, Cambridge University Press, 1928)。J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4), 77(1925), 685. *ibid.*, 80(1926), 491; 及其书著 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931)。M. Born, *Naturwissenschaften*, 20(1932), 921; 及其书著 *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), p. 202.

④ B. R. A. Nijboer, Thesis, University of Groningen, 1942. 其主要部分并发表于 *Physica*, 10(1943), 679; *ibid.*, 13(1947), 605; F. Zernike and B. R. A. Nijboer, contribution to *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227. K. Nienhuis and B. R. A. Nijboer, *Physica*, 14(1948), 590, 曾讨论将该理论推广到更大一些的像差。此外需要提到的还有 K. Nienhuis (University of Groningen, 1948) 的一篇学位论文,内容主要有像差影响的实验研究。9.4节中翻印有几张 Nienhuis 所拍摄的漂亮照片。

在微波频段,当存在像差时,关于像区结构的实验研究, M. P. Bachynski 和 G. Bekefi 曾有过报道,见第407页所引有关论文,亦见 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4(1956), 412.

⑤ N. G. van Kampen, *Physica*, 14(1949), 575; *ibid.*, 16(1950), 817; *ibid.* 25(1958), 437.

## 9.1 存在像差时的衍射积分

### 9.1.1 衍射积分

考虑一个置有一单色点光源  $P_0$  的共轴光学系统(即合轴组——译者注)(见图 9.1)。取一笛卡儿坐标系,令其原点位于  $P_0$  的高斯像点  $P_1^*$ ,  $z$  轴沿  $CP_1^*$ ,  $C$  为出射光瞳中心。 $y$  轴则取在子午面(包含  $P_0$  和系统之轴的平面)上。 $P_0$  和  $P_1^*$  的高轴距离分别用  $Y_0$  和  $Y_1^*$  表示。

同第 5 章中一样,出射光瞳区中波阵面的形变将用像差函数  $\Phi$  来描写。设  $\bar{Q}$  和  $Q$  是像空间中某条光线分别与过  $C$  点的实际波阵面和高斯参考球的交点。假设像空间中的折射率为 1, 则  $\Phi$  (在图 9.1 中取为正)代表沿该光线所测的距离  $\bar{Q}Q$ 。

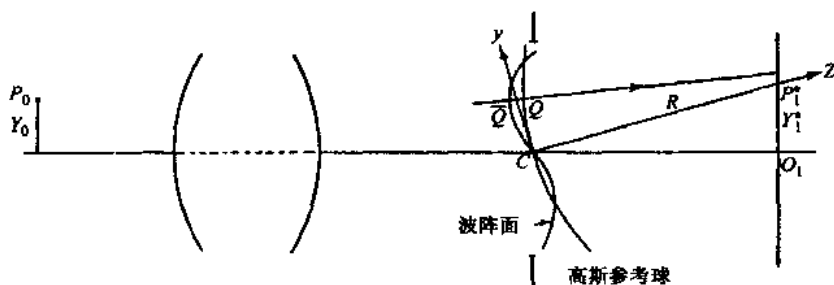


图 9.1 参考系的选择和符号

设  $R$  代表高斯参考球的半径  $CP_1^*$ ,  $s$  是  $Q$  和像区中任意一点  $P$  之间的距离。 $Q$  点处的场扰动用  $Ae^{ik(\Phi-R)}/R$  来表示,其中  $A/R$  是  $Q$  点处的振幅。按照惠更斯-菲涅耳原理,  $P$  点的扰动由下式给出:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Ae^{-ikR}}{R} \iint \frac{e^{ik(\Phi+s)}}{s} dS, \quad (1)$$

式中积分范围为参考球面上将出射光瞳大致覆盖住的地区。(1)式中曾假设所涉及的角都很小,因而参考球上倾斜因子的变化可予忽略。此外还曾假设波阵面上各处的振幅基本不变,因而  $A$  可提到积分号外。

设  $(\xi, \eta, \zeta)$  是  $Q$  点的坐标,  $(x, y, z)$  是  $P$  点的坐标,并设  $a$  是出射光瞳的半径。按照 8.8 节对无像差会聚球面波这一特殊情况 ( $\Phi=0$ ) 的处理,令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a\rho \sin \theta, & x &= r \sin \psi, \\ \eta &= a\rho \cos \theta, & y &= r \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

经过同 § 8.8(2) 和 § 8.8(9)① 一样的运算,最后得到

$$k(s-R) = -v\rho \cos(\theta-\psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u, \quad (3)$$

式中  $u$  和  $v$  是  $P$  点的两个“光学坐标”,即

① 这里的  $R$  对应于 8.8 节的  $f$ 。值得注意的是,如采用 § 8.8(2) 和 § 8.8(3),则衍射积分可再表成平面波角谱形式 [见 J. Focke, *Optica Acta*, 3(1956), 110]。

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R}\right)^2 z, \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R}\right) \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

为可方便处理,现将  $\Phi$  看成为  $Y_1^*$ ,  $\rho$  和  $\theta$  的函数:

$$\Phi = \Phi(Y_1^*, \rho, \theta). \quad (5)$$

高斯参考球的面元为  $dS = a^2 \rho d\rho d\theta$ , 而且如果  $CP_1^*$  与系统之轴的夹角很小,则积分范围可取为  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ 。此外,对像区中的观察点而言,被积函数分母中的  $s$  可用  $R$  代替。因此将(3)式代入(1)式即得到

$$U(P) = U(u, v, \psi) = -\frac{i A a^2}{\lambda R^2} e^{i(\frac{A}{R})^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta, \quad (6)$$

所以  $P$  点的强度

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{A a^2}{\lambda R^2}\right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \quad (7)$$

按照(7)式,如果不存在像差,即  $\Phi = 0$  时,则高斯像点  $P_1^*$  ( $u = v = 0$ ) 处的强度将等于

$$I^* = \pi^2 \left(\frac{A a^2}{\lambda R^2}\right)^2, \quad (8)$$

为方便起见,现将强度  $I(P)$  表成为强度  $I^*$  的百分数,即取归一化强度<sup>①</sup>

$$i(P) = \frac{I(P)}{I^*} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[k\Phi(Y_1^*, \rho, \theta) - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2]} \rho d\rho d\theta \right|^2. \quad (9)$$

没有像差时,高斯像点的强度为一极大。存在像差时,情况一般将不再如此,这时强度极大之点可称为衍射焦点<sup>②</sup>。人们常仅关注某一特别观察面上的极大强度,这一强度当按(9)式归一化时,叫做 Strehl 强度<sup>③</sup>。

从(9)式可立即推导出几个稍后将要用到的结果,兹分述于下。

### 9.1.2 位移定理;参考球的更换

设  $\Phi$  和  $\Phi'$  是两个像差函数,二者之间存在下列关系:

$$\Phi' = \Phi + H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M, \quad (10)$$

式中  $H, K, L$  和  $M$  均为  $\lambda$  量级的常数。此外设  $i(u, v, \psi)$  和  $i'(u, v, \psi)$  为相对应的两个归一化强度。于是由(9)式

$$i(u, v, \psi) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i f(u, v, \psi; \rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \right|^2, \quad (11)$$

式中

- ① 这里归一化强度符号  $i$  当不致与  $\sqrt{-1}$  的符号  $i$  混淆,因为前者总是同自变量一起出现,例如  $i(\rho)$ ,  $i(\mu, v, \psi)$ , 等等。  
 ② 一般来说,衍射焦点当然可多于一个,但如果像差足够小,衍射焦点就只有一个。  
 ③ 此词概念出自 K. Strehl, *Z. f. Instrumkde.*, 22(1902), 213, 他称之为“Definitionshelligkeit”(德文,可译为“明亮度”——译者注)。英文文献中常采用“definition”(明晰度)一词,有欠妥当。近来,“Strehl ratio”(Strehl 比)一词亦有人使用。见,例如, V. N. Mahajan, *J. Opt. Soc. Amer.*, 71(1981), 75 和 *ibid.*, 72(1982), 1258。

$$f(u, v, \psi; \rho, \theta) = k\Phi - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2, \quad (12)$$

$i'$  的表达式与此类似。按照(10)式,上式亦可写成如下形式:

$$\begin{aligned} f(u, v, \psi; \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M] - v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho \cos(\theta - \psi') - \frac{1}{2}u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \psi'; \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$u' = u + 2kH, \quad v' \sin \psi' = v \sin \psi + kK, \quad v' \cos \psi' = v \cos \psi + kL. \quad (14)$$

据(2)和(4)两式可知,(14)式代表下列变换:

$$z' = z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, \quad x' = x + \left(\frac{R}{a}\right) K, \quad y' = y + \left(\frac{R}{a}\right) L. \quad (15)$$

因此由(11)和(13)两式得到

$$i(u, v, \psi) = i'(u', v', \psi'). \quad (16)$$

这样我们就建立了下列位移定理:一个像差函数,加上一项  $H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M$  时,其中  $H, K, L$  和  $M$  均为  $\lambda$  量级的常数,结果并不改变焦点附近三维强度分布的形态,而仅仅是使该分布整体上按变换式(15)产生位移;位移量是:沿主方向  $CP_1^*$  为  $2(R/a)^2 H$  (远离出射光瞳),沿正  $x$  和正  $y$  方向分别为  $(R/a)K$  和  $(R/a)L$ 。

(10)式右方所加之项可解释为代表参考球的更换。假设选择一个新参考球,其中心位于像区中的  $P'(x', y', z')$  点,半径为  $R'$ ,而且离高斯参考球最多不超过几个波长。设光线  $\overline{QQ}$  与新参考球相交于  $N$  点,这时以该新球为参考面的波像差  $\Phi'$  为(见图 9.2)

$$\Phi' = \overline{QN} = \overline{QQ} - NQ \approx \overline{QQ} - NG, \quad (17)$$

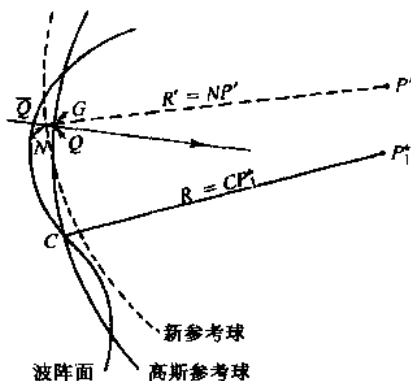


图 9.2 参考球的更换

式中  $G$  是直线  $NP'$  与高斯参考球的交点,像空间中的折射率同前仍假设为 1。这里  $\overline{QQ} = \Phi$  是以高斯球为参考面时的波像差,而且  $NG = NP' - GP' = R' - s$ ,其中  $s$  代表  $G$  到  $P'$  的距离。因此(17)式可写成为

$$\Phi' \approx \Phi + s - R' = \Phi + \frac{\lambda}{2\pi} \left[ -v\rho \cos(\theta - \psi) - \frac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u \right] + (R - R'), \quad (18)$$

其中曾用了(3)式关系。这里  $u, v$  和  $\psi$  仍由(3)和(4)两式给出,但需用  $x', y', z'$  替代原来的  $x, y, z$ 。关系式(18)可写成(10)式的形式,其中取

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z', \quad K = -\left(\frac{a}{R}\right)x', \quad L = -\left(\frac{a}{R}\right)y', \quad M = z' + R - R'. \quad (19)$$

### 9.1.3 强度和波阵面平均形变之间的关系

当像差很小时,参考球球心处的强度可用波像差的方均值表出。设参考球球心位于像区中的  $P$  点,  $\Phi_p$  是以此球为参考的波像差。于是,按照(9)和(18)两式,  $P$  点处的归一化强度可表成下列形式:

$$i(P) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_p} \rho \, d\rho \, d\theta \right|^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [1 + ik\Phi_p + \frac{1}{2}(ik\Phi_p)^2 + \dots] \rho \, d\rho \, d\theta \Big|^2. \quad (20)$$

设  $\overline{\Phi_p^n}$  代表  $\Phi_p$   $n$  次幂的平均值,即

$$\overline{\Phi_p^n} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_p^n \rho \, d\rho \, d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, d\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi_p^n \rho \, d\rho \, d\theta. \quad (21)$$

如果假设像差非常小,因而可将(20)式中  $k\Phi_p$  的三次和更高次幂略去,则  $P$  点的归一化强度可写成下列形式:

$$i(P) \approx |1 + ik\overline{\Phi_p} - \frac{1}{2}k^2\overline{\Phi_p^2}|^2 = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [\overline{\Phi_p^2} - (\overline{\Phi_p})^2]. \quad (22)$$

上式右边方括号中的量是波阵面的“方均形变” $(\Delta\Phi)^2$ ,

$$(\Delta\Phi_p)^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\Phi_p - \overline{\Phi_p})^2 \rho \, d\rho \, d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, d\theta} = \overline{\Phi_p^2} - (\overline{\Phi_p})^2, \quad (23)$$

所以(22)式可写成为

$$i(P) \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_p)^2. \quad (24)$$

这一公式意味着,当像差很小时,焦点区域中高斯参考球球心处的归一化强度与像差的性质无关,而且比理想值1所小之量正比于波阵面的方均形变<sup>①</sup>。

## 9.2 像差函数的展开

### 9.2.1 泽尼克圆多项式

在第5章中根据几何光学讨论像差的影响时,曾将像差函数  $\Phi$  展开成一幂级数。在本章

① 当光瞳的照度不均匀时,(24)式仍然有效,只要设  $(\Delta\Phi_p)^2$  代表波阵面的振幅加权方均形变即可[见 V. N. Mahajan, *loc. cit.*, (1981)]。

的处理中,须对单位圆进行积分,这就更加适宜将  $\Phi$  展开成单位圆域内正交的多项式完全集<sup>①</sup>。具有该种性质的多项式全集可有多种构成形式,然而泽尼克<sup>②</sup>所引进的这种集与众不同,还具有简单的不变性特性。附录 G 将说明可用什么方法推导该泽尼克圆多项式,并讨论它们的某些特性。这里仅概括列出所需的一些公式。

泽尼克圆多项式是两个实变量  $X, Y$  的多项式  $V_n^l(X, Y)$ , 用极坐标 ( $X = \rho \sin \theta, Y = \rho \cos \theta$ ) 表出时,其形式为

$$V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = R_n^l(\rho) e^{il\theta}, \quad (1)$$

式中  $l \geq 0$ , 并且  $n \geq 0$ , 均为整数,  $n \geq |l|$ , 而  $n - |l|$  是偶数。其正交性和归一化性质则由下列公式表出:

$$\iint_{X^2+Y^2 \leq 1} V_n^{l*}(X, Y) V_{n'}^l(X, Y) dX dY = \frac{\pi}{n+1} \delta_{ll'} \delta_{nn'}, \quad (2)$$

式中  $\delta_{ij}$  是克罗内克符号, 星号表示复共轭。径向函数  $R_n^l(\rho)$  是  $\rho$  的多项式, 由  $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^{|l|}$  各次幂组成, 并且如附录 G 所证, 与雅可比多项式(有穷超几何级数)有密切关系。由(1)和(2)两式可见, 该径向多项式满足下列关系式:

$$\int_0^1 R_n^l(\rho) R_{n'}^l(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}. \quad (3)$$

其具体形式由下列公式( $m = |l|$ )给出:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \rho^m} \left[ \frac{d}{d(\rho^2)} \right]^{\frac{n-m}{2}} [(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}} (\rho^2 - 1)^{\frac{n-m}{2}}] \quad (4)$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}. \quad (5)$$

其归一化则如此选定, 即对所有可允许的  $n$  和  $m$  值, 有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \quad (6)$$

径向多项式  $R_n^{\pm m}(\rho)$  有下列生成函数

$$\frac{\left[1 + z - \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}\right]^m}{(2z\rho)^m \sqrt{1 - 2z(1 - 2\rho^2) + z^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \quad (7)$$

当  $m=0$  时, 上式左方化为自变量为  $2\rho^2 - 1$  的勒让德多项式<sup>③</sup> 生成函数, 所以

$$R_{2n}^0(\rho) = P_n(2\rho^2 - 1). \quad (8)$$

表 9.1 给出该径向多项式前几个  $m, n$  值的显函数形式。

① 此处“完全”这个词意指, 任何相当规范的函数均可展开成该集函数的级数。关于该词的更精确定义见, 例如, R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I (New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), pp. 51 - 54。

② F. Zernike, *Physica*, 1(1934), 689。

③ 见, 例如, R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 85。

表 9.1  $m \leq 8, n \leq 8$  的各径向多项式  $R_m^n(\rho)$ 

| $m \backslash n$ | 0 | 1      | 2             | 3                 | 4                       | 5                             | 6                                    | 7                                        | 8                                                |
|------------------|---|--------|---------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 0                | 1 |        | $2\rho^2 - 1$ |                   | $6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$ |                               | $20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$ |                                          | $70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$ |
| 1                |   | $\rho$ |               | $3\rho^3 - 2\rho$ |                         | $10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$ |                                      | $35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho$ |                                                  |
| 2                |   |        | $\rho^2$      |                   | $4\rho^4 - 3\rho^2$     |                               | $15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$      |                                          | $56\rho^8 - 105\rho^6 + 60\rho^4 - 10\rho^2$     |
| 3                |   |        |               | $\rho^3$          |                         | $5\rho^5 - 4\rho^3$           |                                      | $21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3$         |                                                  |
| 4                |   |        |               |                   | $\rho^4$                |                               | $6\rho^6 - 5\rho^4$                  | $7\rho^7 - 6\rho^5$                      | $28\rho^8 - 42\rho^6 + 15\rho^4$                 |
| 5                |   |        |               |                   |                         | $\rho^5$                      |                                      |                                          |                                                  |
| 6                |   |        |               |                   |                         |                               | $\rho^6$                             |                                          | $8\rho^8 - 7\rho^6$                              |
| 7                |   |        |               |                   |                         |                               |                                      | $\rho^7$                                 |                                                  |
| 8                |   |        |               |                   |                         |                               |                                      |                                          | $\rho^8$                                         |