古 今 数 学 思 想

（第 四 册）

〔美〕M.克莱因　著
北京大学数学系数学史翻译组　译
申又枨　冷生明　校

上海科学技术出版社

MATHEMATICAL THOUGHT
FROM ANCIENT TO MODERN TIMES
Morris Kline
Oxford Univ. Press, New York, 1972

古今数学思想

（第四册）

北京大学数学系数学史翻译组 译

申又枨 冷生明 校

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 12.125 字数 298,000
1981年7月第1版 1981年7月第1次印刷
印数 1—17,000

书号：13119·910 定价：（科四）1.35元

翻译说明

很多数学工作者、数学教师和爱好数学的同志，早就希望能有一本比较简明的、阐述一些重要数学思想的来源和发展的书．看到 Morris Kline 教授写的这本 Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972)，我们感到相当满意，就组织人力把它翻译了出来．

这本书，内容丰富，全面地论述了近代数学大部分分支的历史发展；篇幅不大，简明扼要．正如书名所指出的，本书着重在论述数学思想的古往今来，而不是单纯的史料传记，努力说明数学的意义是什么，各门数学之间以及数学和其他自然科学尤其是和力学、物理学的关系是怎样的．本书厚今薄古，主要篇幅是叙述近二、三百年的数学发展，着重在十九世纪，有些分支写到本世纪的三十或四十年代．作者对一些重要数学分支的历史发展，对一些著名数学家的评论，都很有一些独到的见解，并且写得很引人入胜．Morris Kline 教授本人，深受 Göttingen 大学数学传统的影响，注意研究数学史和数学教育，是一位著名的应用数学家和数学教育家，因此，他很能体会读者的心情，在书中能通过比较丰富的史料来阐述观点，把科目的历史叙述和内容介绍结合起来．另外，为了方便读者，许多古代的数学成就或资料，都翻译成近代数学的语言，通俗易懂．这些都是本书突出的优点．

当然，本书也有不足之处．例如忽视了我国的数学成就及其对数学发展的影响，这对于论述数学的发展来说，无疑是有片面性的．关于对现代数学高度抽象这一特征的看法，作者是持一定保留态度的．他的这种态度，给本书带来了某种倾向性，我们认为这

是可以商榷的．另外，关于数学中的有些问题，在历史上一直是争论不休的，而数学就在这种争论中发展着；作者的一些看法，也只是一家之言，还是值得研究的．但是总的看来，本书仍不失为一本难得的好书．外国的书评也说："就数学史而论，这是迄今为止最好的一本．"*)

原书五十一章共1238页，我们把译本分成四册出版．为便于读者了解全书，在每册中我们都印上原作者的序，并附上其余各册的目录．

参加本书翻译的有江泽涵(序言、第50章)、张锦炎(第11、12章)、申又枨(第15、16章)、朱学贤(第17、18、25、42章)、钱敏平(第19章)、邓东皋(第20、45、46、47章)、丁同仁(第21章)、刘西垣(第22章)、叶其孝(第23、24、40章)、庄圻泰(第26、27章)、万伟勋(第28、29、30章)、石生明(第31、32、33章)、张顺燕(第34章)、姜伯驹(第35章)、章学诚(第37、48章)、程民德(第41章)、张恭庆(第43、44章)、聂灵沼(第49章)、吴光磊(第51章)．我们特邀张理京同志翻译了第1～10、13、14章、北京工业学院孙树本教授翻译了第36、38、39章．第一册是张理京同志校阅的；参加第二册校阅的有申又枨、江泽涵、冷生明；第三册主要由冷生明校阅，其中有一部分是张理京校阅的；第四册由申又枨、冷生明校阅了大部分．另外，叶其孝、朱学贤两同志参加校阅了全书的部分章节，并协同做了许多组织工作．申又枨教授生前十分关心本书的翻译出版，病中还亲自参加本书的翻译与校阅工作．不幸在本书付印之前，他已与世长辞．这本书的出版，也是对申又枨同志的一个纪念．

本书是1976年初组织翻译的．当时，出于对"四人帮"糟蹋数学的愤怒，我系几位教授和部分教师，建议组译本书，目的是便于自己学习．在"四人帮"横行的日子里，原没有指望能够出版．现

*) 见 Bulletin of the American Mathematical Society, 1974, 9, Vol. 80, No. 5, pp. 805～807.

在，在华国锋同志为首的党中央领导下，广大数学工作者、上海科学技术出版社和校内外的许多同志，给予我们大力支持和帮助，使这译本得以和广大读者见面。我们希望本书的翻译出版，能增进读者对数学史和数学本身的了解，对数学的教学改革、以及对数学和数学史的研究有所裨益。限于水平，译文一定有许多不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

北京大学数学系数学史翻译组　邓东皋

1978.7.11.

序

如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状.

Henri Poincaré

本书论述从古代一直到本世纪头几十年中的重大数学创造和发展. 目的是介绍中心思想；特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作. 本书所极度关心的还有：对数学本身的看法，不同时期中这种看法的改变，以及数学家对于他们自己的成就的理解.

必须把本书看作是历史的一个概述. 当人们想到 Euler 的全集满满的约七十卷，Cauchy 的二十六卷，Gauss 的十二卷，人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述. 本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本，可是我坚信这些样本最具有代表性. 再者，为着把注意力始终集中于主要的思想，我引用定理或结果时，常常略去严格准确性所需要的次要条件. 本书当然有它的局限性，但我相信它已给出整个历史的一种概貌.

本书的组织着重在居领导地位的数学课题，而不是数学家. 数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印，并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用. 但是，特意叙述的是他们的思想，传记完全是次要的. 在这一点上，我遵循 Pascal 的意见："当我们援引作者时，我们是援引他们的证明，不是援引他们的姓名."

为使叙述连贯，特别是在1700年以后的时期，对于每一发展要等到它已经成熟、在数学中占重要地位并且产生影响的时候，我才进行论述. 例如，我把非欧几里得几何放在十九世纪的时期介绍，虽然企图寻找欧几里得平行公理的替代物或证明早在 Euclid 时代就开始了并且继续不断. 当然，有许多问题会在不同的时期反复提及.

为着不使资料漫无边际，我忽略了几种文化，例如中国的[1]、日本的和玛雅的文化，因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响. 还有一些数学中的发展，例如概率论和差分演算，它们今天变得重要，但在所考虑的时期中并未起重要作用，从而也只得到很少的注意. 这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些二十世纪的，并且在该时期变成有特殊意义的创造. 我没有在二十世纪时期继续讨论象常微分方程或变分法的扩展，因为这将会需要很专门的资料，而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣，并且将会大大增加本书的篇幅. 此外还考虑到，对于许多较新的发展的重要性，目前还不能作客观的估价. 数学的历史告诉我们，许多科目曾经激起过很大的热情，并且得到最好的数学家的注意，但终于湮没无闻. 我们只需要回忆一下 Cayley 的名言：射影几何就是全部几何，和 Sylvester 的断言：代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华. 确实的，历史给出答案的有趣问题之一便是：数学中哪些东西还生存着而未被淘汰？历史作出它自己的而且更可靠的评价.

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述，也不能指望读者知道所有这些发展的内容. 因此，我在本书中论述某科目的历史时，除去一些极初等的领域外，也说明科目的内容，把科目的历史叙述和内容说明融和起来. 对各种数学创造，这些说明也许不能

---

(1) 中国数学的历史的一个可喜的叙述，已见于 Joseph Needham 的 *Science and Civilization in China*，剑桥大学出版社，1959，卷3，第1～168页.

把它们完全讲清楚，但应能使读者对它们的本质得到某些概念.从而，在某种程度上，本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书.这无疑地是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一.

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助.专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去，使得他没有机会去熟悉他的学科的历史.而实际上，这历史背景是重要的.现在的根，深扎在过去，而对于寻求理解“现在之所以成为现在这样子”的人们来说，过去的每一事件都不是无关的.再者，虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标.如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果.我们的被分裂的学科就面临着这种危险；跟这种危险作斗争的最稳妥的办法，也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识，使得能把研究工作导入有成果的渠道.如同 Hilbert 所说的：“数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合.”

对于学数学的学生来说，本书还会另有好处.通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断.历史可以提供整个课程的概貌，不仅使课程的内容互相联系，而且使它们跟数学思想的主干也联系起来.

在一个基本方面，通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉.它们给出一个系统的逻辑叙述，使人们有这种印象：数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局.学生被湮没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候.

历史却形成对比.它教导我们，一个科目的发展是由汇集不同方面的成果，点滴积累而成的.我们也知道，常常需要几十年，甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步.不但这些科目并未锤

炼成无缝的天衣，就是那已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展还有待创造.

课本中的字斟句酌的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路. 学生一旦认识到这一点，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气，并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧. 实在说，叙述数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果，应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气.

为着使本书能包罗所涉及的这个大范围，我曾经试着选择最可靠的原始资料. 对于微积分以前的时期，象 T. L. Heath 的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*) 无可否认地是第二手的资料，可是我并未只依靠这样的一个来源. 对于以后时期中的数学发展，通常都能直接查阅原论文；这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到. 对研究工作的大量报导和概述也帮助了我，其中一些实际上也就在全集里. 对于所有的重要结果，我都试着给出出处. 但并没有对于所有的断言都这么做；否则将会使引证泛滥，浪费篇幅，而这些篇幅还不如用来充实报导.

每章中的参考书目指出资料来源. 如果读者有兴趣，他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报导. 这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献. 把它们列在书目中，是因为它们供给额外的报导，或者表达的水平可以对一些读者更有帮助，或者它们比原始资料更易于找到.

在此，我想对我的同事 Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意，感谢他们回答了大量的问题，阅读了本书的许多章节，提出了许多宝贵的批评意见. 我特别感激我的妻子 Helen，她以批评的眼光编辑我的手稿，

广泛地核对人名、日期和出处，而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码. Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作，对我是一个极大的帮助. 我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激，感谢他们细心地印刷了本书.

Morris Kline

纽约 1972 年 5 月

其他各册简目

第 一 册

1. 美索波达米亚的数学
2. 埃及的数学
3. 古典希腊数学的产生
4. Euclid 和 Apollonius
5. 希腊亚历山大里亚时期：几何与三角
6. 亚历山大里亚时期：算术和代数的复兴
7. 希腊人对自然形成理性观点的过程
8. 希腊世界的衰替
9. 印度和阿拉伯的数学
10. 欧洲中世纪时期
11. 文艺复兴
12. 文艺复兴时期数学的贡献
13. 十六、十七世纪的算术和代数
14. 射影几何的肇始

第 二 册

15. 坐标几何
16. 科学的数学化
17. 微积分的创立
18. 十七世纪的数学
19. 十八世纪的微积分
20. 无穷级数
21. 十八世纪的常微分方程
22. 十八世纪的偏微分方程
23. 十八世纪的解析几何和微分几何
24. 十八世纪的变分法
25. 十八世纪的代数
26. 十八世纪的数学

第 三 册

27. 单元复变函数
28. 十九世纪的偏微分方程
29. 十九世纪的常微分方程
30. 十九世纪的变分法
31. Galois 理论
32. 四元数，向量和线性结合代数
33. 行列式和矩阵
34. 十九世纪的数论
35. 射影几何的复兴
36. 非 Euclid 几何
37. Gauss 和 Riemann 的微分几何
38. 射影和度量几何
39. 代数几何

第四册目录

第 40 章　分析中注入严密性 ……1

1．引言 ……1

2．函数及其性质 ……3

3．导数 ……10

4．积分 ……13

5．无穷级数 ……19

6．Fourier 级数 ……25

7．分析的状况 ……32

第 41 章　实数和超限数的基础 ……41

1．引言 ……41

2．代数数与超越数 ……43

3．无理数的理论 ……45

4．有理数的理论 ……51

5．实数系的其它处理 ……54

6．无穷集合的概念 ……57

7．集合论的基础 ……59

8．超限基数与超限序数 ……65

9．集合论在 1900 年代的状况 ……70

第 42 章　几何基础 ……74

1．Euclid 中的缺陷 ……74

2．对射影几何学基础的贡献 ……77

3．Euclid 几何的基础 ……80

4．一些有关的基础工作 ……86

5．一些未解决的问题 ……88

第 43 章　十九世纪的数学 ……95

1．十九世纪发展的主要特征 ……95

2．公理化运动 ……99

3．作为人的创造物的数学 ……101
4．真理的丧失 ……106
5．作为研究任意结构的数学 ……112
6．相容性问题 ……115
7．向前的一瞥 ……116
第44章 实变函数论 ……118
1．起源 ……118
2．Stieltjes 积分 ……119
3．有关容量和测度的早期工作 ……120
4．Lebesgue 积分 ……123
5．推广 ……131
第45章 积分方程 ……133
1．引言 ……133
2．一般理论的开始 ……138
3．Hilbert 的工作 ……143
4．Hilbert 的直接继承者 ……153
5．理论的推广 ……157
第46章 泛函分析 ……160
1．泛函分析的性质 ……160
2．泛函的理论 ……161
3．线性泛函分析 ……167
4．Hilbert 空间的公理化 ……179
第47章 发散级数 ……184
1．引言 ……184
2．发散级数的非正式应用 ……186
3．渐近级数的正式理论 ……193
4．可和性 ……200
第48章 张量分析和微分几何 ……214
1．张量分析的起源 ……214
2．张量的概念 ……215
3．协变微分 ……220
4．平行位移 ……223
5．Riemann 几何的推广 ……227

第 49 章　抽象代数的出现 ……231
1．十九世纪历史背景 ……231
2．抽象群论 ……232
3．域的抽象理论 ……243
4．环 ……249
5．非结合代数 ……253
6．抽象代数的范围 ……256
第 50 章　拓扑的开始 ……260
1．拓扑是什么 ……260
2．点集拓扑 ……261
3．组合拓扑的开始 ……266
4．Poincaré 在组合拓扑方面的工作 ……274
5．组合不变量 ……282
6．不动点定理 ……283
7．定理的推广和领域的扩展 ……285
第 51 章　数学基础 ……289
1．引言 ……289
2．集合论的悖论 ……290
3．集合论的公理化 ……293
4．数理逻辑的兴起 ……295
5．逻辑派 ……301
6．直观派 ……307
7．形式派 ……316
8．一些新近的发展 ……322
杂志名称缩写一览表 ……327
人名索引 ……330
内容索引 ……000

40

分析中注入严密性

如果认为只有在几何证明里或者在感觉的证据里才有必然，那会是一个严重的错误.

A. L. Cauchy

1. 引　言

大约在 1800 年前后，数学家们开始关心分析的庞大分支在概念和证明中的不严密性. 函数概念本身就是不清楚的；使用级数而不考虑它们的收敛和发散已经产生了悖论和不同意见的争论；关于用三角级数来表示函数的论战进一步引起了混乱；当然，导数和积分的基本概念还从来没有恰当地定义过. 所有这些困难最终导致人们对分析的逻辑状况的不满.

Abel 在 1826 年给 Christoffer Hansteen 教授的一封信[1]中抱怨说："人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处. 这样一个完全没有计划和体系的分析，竟有那么多人能研究过它，真是奇怪. 最坏的是，从来没有严格地对待过分析. 在高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明的. 人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是这种方法只导致了极少几个所谓的悖论."

一些数学家决心从这种混沌中整理出一个秩序来. 常被人们称为批判运动的领导者们决心把分析只在算术概念的基础上重新

---

(1) *Œuvres*, 2, 263～265.

建立起来. 这个运动的开端正好是非欧几何的创立时期. 一个完全不同的集体,除了 Gauss 外卷入了这后一活动,因而要追溯这个活动和把分析奠定在算术基础上的决心之间的任何直接联系是困难的. 这种决心的出现大概是由于企图把分析奠基于几何之上的希望——十七世纪的许多数学家断言这种希望是能够实现的——因十八世纪分析发展中日益增长的复杂性而受到破灭所致. 不过 Gauss 早在 1799 年就已表示了他对欧氏几何真理性的怀疑, 而且在 1817 年他就认定真理只存在于算术之中. 此外,甚至在 Gauss 和其他作者关于非欧几何的早期著作中就注意到欧氏几何发展中的缺陷. 因此很可能就是这两个因素造成了对几何的不信任而决心把分析奠基在算术概念之上. 这无疑是批判运动的领导者们要着手去作的事.

严密的分析是从 Bolzano、Cauchy、Abel 和 Dirichlet 的工作开始,而由 Weierstrass 进一步发展了的. 在这方面, Cauchy 和 Weierstrass 最为著名. Cauchy 关于分析基础的基本著作是他的《代数分析教程》(*Cours d'analyse algébrique*)(2),《无穷小分析教程概论》(*Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*)(3), 以及《微分计算教程》(*Leçons sur le calcul différentiel*).(4) 实际上, 用现代的标准来衡量, Cauchy 著作中的严密性是不够的. 他用了诸如"无限趋近","想要多小就多小","无穷小增量的最后比"以及"一个变量趋于它的极限"之类的话. 可是,如果人们把 Lagrange 的《解析函数论》(*Théorie des fonctions analytiques*)(5) 和《函数计算教程》(*Leçons sur le calcul des fonctions*)(6) 以及 Lacroix 的有影响的书《微积分计算专著》(*Traité du calcul différentiel et du calcul*

(2) 1821, *Œuvres*, (2), III.

(3) 1823, *Œuvres*, (2), IV, 1~261.

(4) 1829, *Œuvres*, (2), IV, 265~572.

(5) 1797; 2nd ed., 1813=*Œuvres*, 9.

(6) 1801; 2nd ed., 1806=*Œuvres*, 10.

intégral)[7]同 Cauchy 的«代数分析教程»相比较，就开始看到十八和十九世纪的数学之间的明显不同. 特别要指出，Lagrange 纯粹是形式的. 他用符号表达式来进行运算. 在他那里没有极限、连续等根本性的概念.

Cauchy 在他的 1821 年著作的导言中说得非常明白，他企图给分析以严密性. 他指出对一切函数自由地使用那些只有代数函数才有的性质以及使用发散级数都是不合法的. 虽然 Cauchy 的工作只是迈向严密化方向的一步，他自己却相信而且在«概论»(*Résumé*) 中说他已经把分析的严密化进行到底了. 至少对初等函数，可以说他确实开始给出了定理的确切证明并作出了有适当限制的断言. Abel 在他 1826 年关于二项式的论文中赞扬 Cauchy 的成就："每一个在数学研究中喜欢严密性的人都应该读这本杰出的著作[«分析教程»]." Cauchy 抛弃了 Euler 的显式表示和 Lagrange 的幂级数而引进了处理函数的新概念.

2. 函数及其性质

十八世纪的数学家大多相信一个函数必须处处都有相同的解析表达式. 在十八世纪的后半叶，很大程度上作为弦振动问题上争论的一个结果，Euler 和 Lagrange 允许函数在不同的区域上具有不同的表达式，而且在那些有同一表达式的点上用连续这个词，而在那些改变了表达式形式的点上用不连续这个词(虽然在现代意义上讲整个函数可能都是连续的). 当 Euler、d'Alembert 和 Lagrange 不得不重新考虑函数的概念时，他们既没有得到任何广泛被采用的定义，也没有解决什么样的函数可以用三角级数来表示的问题，但是多方面的逐渐发展以及函数的应用迫使数学家接受一个更广的概念.

(7) 3 vols., 1st ed., 1797～1800; 2nd ed., 1810～1819.