中学数学难点剖析丛书

数列·极限·数学归纳法

江相铭　王清政编著

西南师范大学出版社

中学数学难点剖析丛书

数列·极限·数学归纳法

江相铭　王清政　编著

敬赠：

母校——重庆师范学院图书馆惠存．

数学系七七级学生
江相铭

1995.5.10于江津二中

西南师范大学出版社

责任编辑：晓　虹
装帧设计：傅孝修

中学数学难点剖析丛书
数列·极限·数学归纳法
江相铭　王清政　编著

西南师范大学出版社出版、发行
（重庆　北碚）
新华书店重庆发行所经销
西南师范大学出版社印刷厂印刷

•

开本：787×1092 1/32 印刷：4.75 字数：103千
1992年4月第一版　　1992年4月第1次印刷
印数：1—5,200

•

ISBN 7—5621—0675—4/G·489

定价：1.40元

○前　言○

《中学数学难点剖析》丛书，是以国家教委制定的教学大纲（修改稿）为依据，在现行教材的基础上，吸收了几年来中学教学改革的经验与研究的新成果，邀请了十六个省、市有丰富经验的特级、高级教师，教学研究人员和优秀青年教师参加编写的.

本丛书有以下特色：

有针对性地弥补和加强现行教材中的薄弱环节，帮助师生解决教与学的疑难问题，提高教学质量.

既可与教材同步加深对教材的理解，又可为毕业复习、参加竞赛提供综合训练；既有系统知识，又有重、疑、难点的剖析；既有标准化题，又有综合训练题；并注重知识的纵横联系与数学思想方法相结合，是一套具有科学性、系统性、针对性和可读性的中学数学参考读物.

适于配合新课学习的各册，有【基础知识】、【剖析与例题】、【基础练习】、【知识应用】（A）、（B）、【检测题】五个栏目. 书末附有【习题答案或提示】.

适于初三、高三毕业专题复习的各册，有专题讲座、综合测试题、解答或提示. 各专题又分概述、例题、习题三部分.

例、习题均经作者精选，量多、典型、新颖. 剖析或说明是撰写人多年教学经验的体现，对启迪思维，解决疑难，预防错误，培养能力颇有帮助.

本册作者对数列，极限，数学归纳法的重、难点进行了较深入地分析、探究．逻辑严，层次明．程晓刚、李远杰．也参加了本书的编写工作．

本书主要供高中二、三年级作教与学的参考，也可供中专及师范院校学生阅读．

由于时间仓促，水平所限，疏漏错误在所难免，希读者予以指正！

编　者

1991年12月

○目　录○

第一章　等差、等比数列

（一）数列

【基础知识】

1）数列的定义；

2）数列的通项公式；

3）由数列的通项公式写出它的项；

4）已知数列的前几项写出它的通项公式.

【剖析与例题】

1）由数列的定义知：如果两个数列相同，必须且只须满足下列三个条件：

（1）构成数列的数完全相同；

（2）数的排列顺序完全相同；

（3）两个数列的项数完全相同.

比如

2，0，2，0，2，0，….

0，2，0，2，0，2，….

0，2，0，2，0.

是两两不同的三个数列；

2）数列与数集（由数构成的集合）的区别和联系：

（1）、相同之处：数列和数集都是由一些数组成的.

（2）、不同之处：①、组成数列的数是按一定顺序排成的一列数，而组成数集的数是没有先后顺序的一组数*；

* 这里为学习排列、组合埋下了伏笔.

②、同一个数在数列中可以两次或多次重复出现，而同一个数在数集中最多只能出现一次

［例 1］ 写出下列数列的一个通项公式：

1〉 3，6，9，12，…；

2〉 −2，4，−8，16，…，

3〉 0，$\frac{3}{4}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{15}{16}$，….

剖析：因为通项公式是第 n 项 a_n 与该项的序号即项号 n 之间的一个函数关系式 $a_n=f(n)$，因此在写（或找）通项公式时，一定要认真、仔细、逐项地观察各项与其项号间的内在联系，找出共同点和不同点，发现其规律.

解：1〉、∵数列的各项都是其项号的 3 倍.

∴ 通项公式为 $a_n=3n$；

2〉、∵ 数列的各项都以 −2 作底数其项号作指数的幂.

∴ 通项公式为 $a_n=(-2)^n$；

3〉、∵ 数列的各项的分母都是其项号的平方，分子等于分母减去 1.

∴ 通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2}$.

说明：有些数列，从不同角度去考虑，所得的通项公式的形式不同. 比如

−1，1，−1，1，−1，1，….

其通项公式有：$a_n=(-1)^n$，$a_n=\cos n\pi$，$a_n=\mathrm{tg}\dfrac{2n+1}{4}\pi$ 等不同的形式，但本质上是等价的，都表示同一个数

又如 1，3，9，…. 其通项公式有 $a_n=3^{n-1}$，$a_n=2n^2-$

$4n+3$，$a_n=3^{n-1}+(n-1)(n-2)(n-3)b$ （$b\in R$）等不同形式，但其前3项都分别为1，3，9，因此都可以用来表示上述数列. 然而，这些通项公式从第4项起，后面的项不是分别相等的，因而它们不是等价的，不能说成是同一个数列.

［**例2**］ 由条件写出数列 $\{a_n\}$ 的前6项：

1〉 $a_1=2$，$a_n=a_{n-1}-3n+1$ （$n=2$，3，…）；

2〉 $a_1=-1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n-n$.

剖析：这类没有给出通项公式，而给出相邻几项间的递推公式和初始条件的数列，我们称为递推数列，它的各项须由递推公式和初始条件逐项计算. 如果求出了通项公式（我们将在本书第三章中研讨其求法）就简便多了.

解：根据条件逐项依次计算即得数列 $\{a_n\}$ 的前6项：

1〉 2，-3，-11，-22，-36，-53；

2〉 -1，2，-1，1，-4，-6.

【基础练习（1——1）】

1．根据通项公式，写出数列 $\{a_n\}$ 的前4项、第83项和第 $3m-1$（$m\in N$）项：

1〉 $a_n=2n^2-3$；　　2〉 $a_n=n-(-1)^n$.

2．写出下列数列的一个通项公式：

1〉 1，4，7，10，…；

2〉 0，3，8，15，…；

3〉 3，5，9，17，…；

4〉 -1，6，-15，28，-45，66，….

3．由条件写出下列数列 $\{a_n\}$ 的前6项：

1〉 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-3$；

2〉 $a_1=-2$，$a_n=2na_{n-1}+n^2+1$ （$n\geqslant 2$）；

3〉 $a_1=-2$，$a_2=0$，$a_{n+2}=a_{n+1}-2na_n+5n-3$.

（二）等差数列

【基础知识】

1)、等差数列的定义；

2)．等差数列的通项公式及前 n 项和公式．

【剖析与例题】

1)、等差数列定义的等价叙述：在数列 $\{a_n\}$ 中，如果存在一个常数 d，使得当 $n\geqslant 2$ 时，等式 $a_n-a_{n-1}=d$ 恒成立，则数列 $\{a_n\}$ 叫做等差数列，常数 d 叫做它的公差；

2)．要判断即证明一个数列 $\{a_n\}$ 是不是等差数列，不能只验证数列的一些项满足条件，而是要验证数列的所有项满足条件，这是无法办到的（比如无穷数列）．于是我们就验证数列 $\{a_n\}$ 中的任意两项 a_n、a_{n-1} 满足条件，即证明

$a_n-a_{n-1}=$ 常数（与 n 无关即不含 n）；

3)、根据等差中项的定义，任何两个数都有且只有一个等差中项（又叫算术平均数）．

[例 3] 求以 a_1 为首项，d 为公差的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

剖析：课本上用不完全归纳法得出等差数列的通项公式，逻辑上是不严密的．下面我们用另一方法推出通项公式，借以帮助同学们提高思维和推理能力．

解：由等差数列的定义得

$a_2-a_1=d$，$a_3-a_2=d$，$a_4-a_3=d$，…，

$a_{n-1}-a_{n-2}=d$，$a_n-a_{n-1}=d$．

将这 $n-1$ 个式子相加即得通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$．

说明：①例 3 的解法叫做叠加法，这种方法在解题中作

用较大，我们将在第二章进一步探讨；②等差数列通项公式中有 a_n、a_1、n、d 四个量，若已知其中任意三个量就能求出第四个量.

[例 4] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的第 5 项和第 18 项分别等于 -2 和 24，求它的通项公式.

解：设公差为 d，则由条件得

$$\begin{cases} a_5=a_1+4d=-2 \\ a_{18}=a_1+17d=24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1=-10 \\ d=2 \end{cases}$$

∴ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=-10+(n-1)2=2n+12$.

说明：由此例可知，只要知道等差数列的任意两项（包括项的值及项号），则这个数列就确定了.

[例 5] **求证** 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是它的通项公式为 $a_n=an+b$ （a、b 为常数）.

证明：充分性 ∵ $a_n=an+b$

∴ $a_{n-1}=a(n-1)+b\ (n\geqslant 2)$

则 $a_n-a_{n-1}=(an+b)-[a(n-1)+b]=a=$常数

∴ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=a+b$ 为首项，a 为公差的等差数列.

必要性 ∵ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

∴ 可设它的首项为 a_1，公差为 d

则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$.

令 $d=a$，$a_1-d=b$ 则 $a_n=an+b$.

[例 6] 设 $\{a_n\}$ 为等差数列.

1> 若 $m+n=i+j\ (m,\ n,\ i,\ j\in N)$.

求证 $a_m+a_n=a_i+a_j$；

2〉 由 1〉的结论求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

剖析：此题是由等差数列中的一些项的项号的关系得出这些项之间的关系，当然应考虑联系项与项号的通项公式.

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d

1〉 **证明**：由等差数列的通项公式得

$a_m+a_n=2a_1+(m+n-2)d$,

$a_i+a_j=2a_1+(i+j-2)d$.

$\because$ $m+n=i+j$ $\therefore$ $a_m+a_n=a_i+a_j$.

2〉 在 1〉中，令 $m=1$

则 $i+j=1+n$，$a_i+a_j=a_1+a_n$.

$$\begin{aligned}\because\quad 2S_n&=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\\&=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})\\&\quad+\cdots+(a_n+a_1)\\&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n(a_1+a_n)\end{aligned}$$

$\therefore$ $S_n=n(a_1+a_n)/2$.

说明：①不难证明1〉中的逆命题也成立. 因此，在等差数列 $\{a_n\}$ 中

$a_m+a_n=a_i+a_j \Longleftrightarrow m+n=i+j$

这就揭示了等差数列中的一些项与其项号之间的内在联系，即任意两项之和等于另两项之和的充要条件是这两项的项号之和等于另两项的项号之和.

②当 $m=n$ 时 $2a_n=a_i+a_j \Longleftrightarrow 2n=i+j$ 即是说等差数列中任意一项是另两项的等差中项的充要条件是这一项的项号是另两项项号的等差中项.

③等差数列的通项公式及前 n 项和公式中，共有 a_1、n、d、

a_n、S_n 五个量，只要已知其中任意三个量便能求另两个量.

［例 7］ 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式为 $S=n^2-3n+1$，求此数列的通项公式，并判断是不是等差数列.

解：$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n+1)-[(n-1)^2-3(n-1)+1]=2n-4$

∵通项公式是关于 n 的一次函数

∴此数列是等差数列.

剖析：这种解法是错的，结论也是错的. 原因是没有正确认识和掌握公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$. 由数列前 n 项和的定义知，对任何数列$\{a_n\}$都有 $a_n=S_n-S_{n-1}$，但必须是当 $n\geqslant 2$ 时才成立，对于 $n=1$ 要单独计算 $a_1=S_1$. 正确解法如下：

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2-3\cdot 1+1=-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n+1)-[(n-1)^2-3(n-1)+1]=2n-4$

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 2n-4 & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

∵$a_2-a_1=1\neq a_3-a_2=2$

∴原数列不是等差数列.

说明：①有些列的绝大多数项都满足等差数列的定义，只有个别项不满足，就不能误认为它是等差数列.

②一个数列的前 n 项和也是一个数列

S_1，S_2，S_3，…，S_n，….

它的通项公式就是 $S_n=F(n)$. 比如例 7 中，$S_n=n^2-3n+1$ 就是数列$\{S_n\}$的通项公式.

【基础练习（1—2）】

1. 选择题（单项选择．下同）

1）若$\triangle ABC$的内角A，B，C成等差数列，则角B等于 （ ）

(A)$\frac{\pi}{2}$；(B)$\frac{\pi}{3}$；(C)$\frac{\pi}{4}$；(D)$\frac{\pi}{6}$.

2）若$\triangle ABC$的边a，b，c成等差数列，则 （ ）

(A) A，B，C成等差数列；

(B) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$成等差数列；

(C) $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$成等差数列；

(D) $\operatorname{tg} A$，$\operatorname{tg} B$，$\operatorname{tg} C$成等差数列.

3）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_8=5$，$a_{23}=30$，则a_{38}等于 （ ）

(A)25； (B)50； (C)55； (D)75.

4）等差数列20，18.2，16.4，…从哪一项开始出现负数

(A)第10项；(B)第11页；(C)第13项；(D)第15项.

5）已知数列的前n项和为$S_n=n^2-3n$，则a_{26}等于 （ ）

(A)40；(B)42；(C)46；(D)48.

6）设等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$，当$n\geqslant 2$时，则 （ ）

(A) $S_n>a_1n$； (B) $a_1n<S_n<a_nn$；

(C) $S_n<a_nn$； (D) $a_nn<S_n<a_1n$.

7）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_n=m$，$a_m=n$（m、$n\in N$，$m\neq n$），则a_{m+n}等于 （ ）

(A)0；(B)正数；(C)负数；(D)不确定.

2. 求等差数列 1，5，9，…的第 25 项，第 $n+5$ 项和第 $2k-1$ 项（$k\in N$）．

3. 求等差数列 -1，2，5，…的前 n 项和，前 38 项和以及前 $3n-2$ 项的和．

4. 写出下列数列的一个通项公式：

1> -1，4，8，12，16，…；

2> $\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，3，$2\sqrt{3}$，$\sqrt{15}$，$3\sqrt{2}$，…；

3> 4，1，16，49，100，169，…；

4> 1，8，21，40，65，96，…．

5. 根据下列数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式，求它的通项公式，并判断是不是等差数列．

1> $S_n=-3n^2+4n$；2> $S_n=2n^2-5n+1$．

6. 求证 数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是它的前 n 项和为$S_n=an^2+bn$（a，b 为常数）．

7. 已知以 3 为公差的等差数列$\{a_n\}$与另一数列$\{b_n\}$满足条件$a_1=b_1=-2$，$a_n=b_{n+1}-b_n$．

1> 求数列$\{a_n\}$的前 n 项和；

2> 求数列$\{b_n\}$的通项公式．

（三）等比数列

【基础知识】

1）、等比数列的定义；

2）、等比数列的通项公式；

3）、等比中项的定义；

4）、等比数列前 n 项和公式．

【剖析与例题】

1）、等比数列定义的等价叙述：在数列$\{a_n\}$中，如果

存在一个常数 q，使得当 $n\geqslant2$ 时，等式$a_n/a_{n-1}=q$ 恒 成立，则数列$\{a_n\}$叫做等比数列，常数 q 叫做它的公比；

2）、由等比数列的定义知：$a_n\neq0$ 是数列$\{a_n\}$ 为等比数列的必要条件，但不是充分条件；任何比数列的公比不为零；

3）、要证明数列$\{a_n\}$为等比数列，必须证明 a_n/a_{n-1} ＝常数（$n\geqslant2$）；

4）．根据等比中项的定义，两个数都不为零，且符号相同才有等比中项，而且有两个．等比中项又叫做比例中项，其中正的个还叫做几何平均数．

［例 8］ 数列$\{a_n\}$是以 a_1 为首项，q（$q\neq1$）为 公比 的等比数列．

1〉求数列$\{a_n\}$的通项公式；

2〉求数列$\{a_n\}$的前 n 项和．

解：1〉由等比数列的定义得

$a_2/a_1=q$，$a_3/a_2=q$，$a_4/a_3=q$，…，$a_n/a_{n-1}=q$ 将这 $n-1$ 个式子相乘并约简整理得 $a_n=a_1q^{n-1}$．

2〉解：$\because a_n=S_n-S_{n-1}$（$n\geqslant2$）

$\therefore S_{n-1}=S_n-a_n=S_n-a_1q^{n-1}$

则 $S_n=a_1+(a_2+a_2+\cdots+a_n)$

$=a_1+(a_1q+a_2q+\cdots+a_{n-1}q)$

$=a_1+q(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$=a_1+qS_{n-1}=a_1+q(S_n-a_1q^{n-1})$

$$\therefore S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

解二：$\because\ a_n=a_1q^{n-1}\cdot\dfrac{1-q}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}(q^{n-1}-q^n)$

$\therefore S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$

$= \dfrac{a_1}{1-q}[(1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots+(q^{n-1}-q^n)]$

$= \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

说明：①1〉的解法叫做叠乘法，2〉的解二叫做拆项法．拆项法是数列求和的重要方法，我们将在第二章中进一步探讨．

②等比数列的通项公式和前n项公式中共有五个量a_1、q、n、a_n、S_n，已知任意三个量就能求出另两个量．

［**例 9**］ **已知**数列$\{x_n\}$是等差数列，设$a\neq 0$，$y_n = ae^{x_n}$，**求证** $\{y_n\}$是等比数列．

证明：设数列$\{x_n\}$的公差为d

则 $x_{n+1}-x_n = d\ (n\in N)$

$\because \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{ae^{x_{n+1}}}{ae^{x_n}} e^{x_{n+1}-x_n} = e^d =$ 常数

$\therefore \{y_n\}$是等比数列．

［**例 10**］ 写出下列数列的一个通项公式：

1〉 3，17，3，17，3，17，…；

2〉 a，b，a，b，a，b，…．

剖析：对于1〉难以入手，必须找一个突破口，找什么呢？当然应找与3和17有关的数，……．它们的等差中项$\dfrac{3+17}{2}=10$如何？对！从数轴上看，3与10，17与10都相距7个单位．7怎样来的？原来$\dfrac{17-3}{2}=7$．这样以7作桥梁，奇数项减7，偶数项加7，问题就解决为，如图1—1．