

# 试验优化设计

李庆东 编著

Optimum Design of Experiments

6

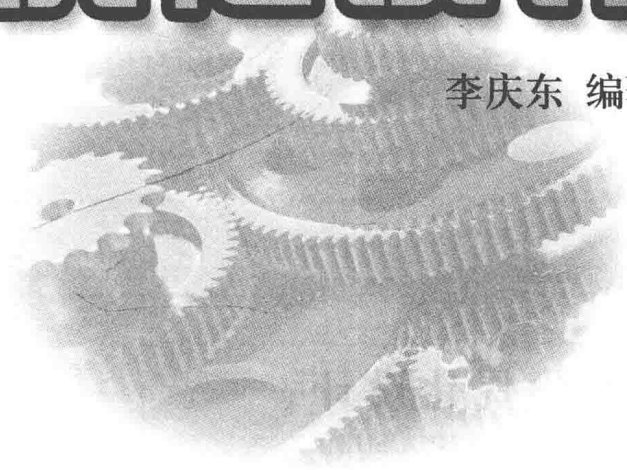


西南师范大学出版社  
国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

Optimum Design of Experiments

# 试验优化设计

李庆东 编著



西南师范大学出版社  
国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

## 图书在版编目(CIP)数据

试验优化设计 / 李庆东编著. -- 重庆: 西南师范大学出版社, 2015.9

ISBN 978-7-5621-7634-3

I. ①试… II. ①李… III. ①试验设计 IV.  
①O212.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第216167号

# 试验优化设计

SHIYAN YOUHUA SHEJI

李庆东 编著

---

责任编辑: 张浩宇 张燕妮

封面设计: 戴永曦

排 版: 重庆大雅数码印刷有限公司·文明清

出版发行: 西南师范大学出版社

地址: 重庆市北碚区

网址: [www.xscbs.com](http://www.xscbs.com)

印 刷: 重庆升光电力印务有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 15

字 数: 365千字

版 次: 2016年5月 第1版

印 次: 2016年5月 第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5621-7634-3

---

定 价: 30.00元

# 目录

导 论 .....	1
第一章 正交试验设计 .....	3
§1-1 试验设计概述 .....	3
§1-2 正交表简介 .....	6
§1-3 正交试验设计的基本方法 .....	10
§1-4 试验数据的结构 .....	17
§1-5 多指标试验 .....	23
§1-6 考察交互作用的正交试验设计 .....	28
§1-7 不等水平的正交试验设计 .....	32
思考题与习题 .....	38
第二章 随机区组试验设计 .....	39
§2-1 试验干扰与区组 .....	39
§2-2 单向干扰控制的区组设计 .....	39
§2-3 双向干扰控制的区组设计 .....	43
思考题与习题 .....	46
第三章 试验设计的方差分析 .....	47
§3-1 极差分析与方差分析比较 .....	47
§3-2 单因子试验方差分析 .....	48
§3-3 正交试验方差分析基本方法 .....	53
§3-4 重复试验和不等水平试验的方差分析 .....	57
§3-5 非饱和试验的方差分析 .....	63
§3-6 误差分析与试验水平 .....	66
思考题与习题 .....	70
第四章 软试验设计 .....	71
§4-1 软试验与软试验设计概述 .....	71
§4-2 寿命试验设计 .....	73
§4-3 产品销售试验设计 .....	74
§4-4 数学试验设计 .....	75

§4-5 生产计划试验设计 .....	78
思考题与习题 .....	80
<b>第五章 回归分析 .....</b>	<b>81</b>
§5-1 一元线性回归分析 .....	82
§5-2 多元线性回归分析 .....	92
§5-3 多元回归分析的显著性检验 .....	97
§5-4 多元线性回归方程的应用 .....	103
§5-5 逐步回归分析 .....	104
§5-6 多元非线性回归与多项式回归 .....	107
思考题与习题 .....	108
<b>第六章 均匀设计 .....</b>	<b>110</b>
§6-1 均匀设计与正交设计对比 .....	110
§6-2 均匀设计的基本方法 .....	111
§6-3 不等水平的均匀设计 .....	115
§6-4 均匀设计原理初步 .....	118
思考题与习题 .....	127
<b>第七章 一次回归设计 .....</b>	<b>128</b>
§7-1 回归设计的概念 .....	128
§7-2 一次回归正交设计 .....	129
§7-3 一次回归整体正交设计 .....	138
思考题与习题 .....	142
<b>第八章 二次回归组合设计 .....</b>	<b>143</b>
§8-1 二次回归模型 .....	143
§8-2 回归组合设计 .....	144
§8-3 回归正交设计 .....	146
§8-4 回归正交设计步骤与统计分析 .....	150
§8-5 回归连贯设计 .....	155
思考题与习题 .....	159
<b>第九章 回归旋转设计 .....</b>	<b>161</b>
§9-1 一次回归正交设计的旋转性 .....	161
§9-2 二次回归设计的旋转性 .....	162
§9-3 旋转组合设计 .....	164

§9-4 正交旋转组合设计 .....	168
§9-5 通用旋转组合设计 .....	171
§9-6 旋转设计的统计分析 .....	175
思考题与习题 .....	184
<b>附 录</b> .....	<b>186</b>
附录 I 常用正交表及交互列表 .....	186
附录 II $F(f_1, f_2)$ 表 .....	198
附录 III $t$ 分布的双侧分位数 ( $t_\alpha$ ) 表 .....	202
附录 IV 相关系数 $R$ 检验表 .....	203
附录 V 部分均匀设计表 .....	204
附录 VI 正交设计趣味试验指导 .....	216
附录 VII 软试验设计指导 .....	221
附录 VIII 正交试验设计练习指南 .....	222
<b>主要参考文献</b> .....	<b>234</b>



## 导 论

在现代社会中,实现过程和目标的最优化已成为解决科学研究、工程设计、生产管理、信息处理等多方面实际问题的一项重要原则。最优化就是高效率地找出问题在一定条件下的最优解。

现代优化技术主要分为三个方面:优化控制、优化设计与优化试验。通常认为试验优化设计方法包括两大类:试验设计和回归设计。

试验设计是在优化思想指导下,通过广义试验(包括实物试验和软试验<sup>[1]</sup>—非实物试验<sup>[2]</sup>)进行最优设计的一种方法。它从不同优良性(主要指正交性—正交设计和均匀性—均匀设计)出发,科学地、合理地设计试验方案,有效控制试验干扰,科学处理试验数据,全面进行优化分析,直接实现优化目标,已成为应用数学的一个重要分支。具体说来,试验设计不仅使试验设计方案具有一定优良性,同时大大减少了试验点,但少量实施的试验点都具有较强的代表性,能获取丰富的试验信息,得出全面的结论;实施试验方案时,能有效控制试验干扰,提高试验精度;处理试验结果时,通过简便计算及分析,可以获得较多的优化结果。可见,试验设计是全过程的多目标优化;对于多快好省地进行多因素试验,对于科学研究探索新规律,实际生产中探求新工艺,产品开发中进行优化设计,经营管理中寻求最佳决策,试验设计都是一种有效的方法。在试验领域,特别是对于多因素试验,传统试验方法一般只能被动地处理试验数据,试验中大量的信息被浪费;而对试验方案、试验过程及目标的优化,常常显得无能为力。这往往造成盲目增加试验次数,难以提供充分可靠的信息,以致达不到预期的目标,造成人力、物力和时间的浪费。近代创立和发展起来的试验优化设计方法才使试验真正走上科学的道路。

回归设计是现代建模的一种优化方法,主要是从正交性、旋转性和D-最优性出发,利用正交表、中心组合和回归分析等方法,直接寻求线性和非线性回归方程<sup>[2-4]</sup>;根据回归方程可以方便地进行计算机优化计算,进一步寻求更优化目标。常用的回归设计方法有多元线性回归正交设计、二次正交回归设计、二次正交旋转回归设计、二次通用设计和D-最优设计等。

试验设计既是优化试验技术的一个重要基本组成部分,也是相对独立的一门学科。20世纪20年代(1926),英国生物统计学家、数学家、英国洛萨斯台特试验农场工程师费歇尔(R.A.Fisher, 1890~1962)运用均衡排列的拉丁方和随机完全区组法,解决了长期未能解决的试验条件不均匀问题,提出了方差分析方法,创立了试验设计这门新兴学科;1935年Fisher出版了专著《试验设计》(Design of Experiments—DOE)。可见,试验设计的第一个必要性就是控制试验条件的干扰,但是运用均衡排列的拉丁方和随机完全区组法虽然能够控制试验条件,试验次数却成倍增加。

20世纪30~40年代,英、美、苏开展了试验设计的研究,并逐步推向机电工业、医药等领域。为减少试验次数,英国人首先提出了正交试验设计的概念。第二次世界大战结束后,日

本恢复经济建设,从英美等国引进 DOE 方法,作为质量管理技术之一。1949年以田口玄一(Genichi Tauchi)为首的研究人员在日本电讯研究所采用 DOE 研究电话通信系统质量,发现 DOE 存在的问题,并加以改进,在 20 世纪 60 年代成功地创立了以田口表(正交表)和极差分析为主要特征、便于推广应用的正交试验设计方法,有效减少了试验次数,对试验设计做出了巨大贡献。在此基础上,田口玄一又创造了 SN 比正交试验方法和基于正交设计的“三次设计”方法,尤以参数设计备受世界关注。在试验设计的发展道路上,如果把 Fisher 创立的传统试验设计方法作为第一个里程碑,正交表作为第二个里程碑,那么 SN 比设计和三次设计就是第三个里程碑<sup>[2,6]</sup>。它是试验设计的现代发展,为试验设计开拓了更加广阔的应用领域。

20 世纪 50 年代,回归分析与试验设计相结合形成了优化试验的另一分支——回归设计<sup>[2,3]</sup>。它将方案设计、数据处理与回归方程的精度统一起来进行优化,已成为现代通用的一种试验优化设计方法。试验设计因不能给出连续模型,很难用于系统连续优化;回归设计则提供便于系统连续优化和进一步计算机编程精确选优的条件,使工程技术、自然科学、社会科学等领域的多因素问题,有可能实现建模和低成本定量分析寻优。

我国一些学者自 20 世纪 50 年代开始研究试验优化设计方法,在理论研究、方法探索和应用技巧方面都有新的创见。中国科学院数学家方开泰教授 20 世纪 70 年代末提出了定量解决不等水平正交试验因子主次的确定方法<sup>[7]</sup>,但他更大的贡献还在于 1978 年与数论专家王元教授一道为减少多因素多水平试验次数而创立的均匀设计方法<sup>[8]</sup>。笔者不会忘记原西南农业大学袁振邦教授在不等水平正交试验因子主次确定方法研究中的奇妙发现<sup>[9]</sup>。

1982 年 8 月笔者跟随导师师孝权副教授在成都参加四川省农机学会举办的“数理统计班”学习《试验设计》,1988 年开始讲授《试验设计》选修课。20 世纪 90 年代,笔者提出软试验设计概念(Design of Soft Experiments—DOSE)<sup>[1,7]</sup>,使广义试验设计的内涵及分类更加清晰明确,并成功地应用于多因素敏感性分析;在教学中,成功地设计和应用了“纸折飞机”和“吹肥皂泡”两个趣味试验<sup>[10]</sup>,使学生更容易掌握试验设计方法。

试验设计的推广应用具有明显的经济效益。在日本,试验设计已成为企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员的必备技术。在日本一个工程师没学会正交设计法,只能算半个工程师。20 世纪 80 年代美国人开始接受田口思想和方法<sup>[12]</sup>。美国摩托罗拉公司的质量与生产改善顾问 Keki R. Bhole 在美国杂志《管理评论》(Management Review 1988.1)上发表文章,指出“试验设计是日本质量胜过美国质量的秘密武器”<sup>[13]</sup>。

我国各行业 20 世纪 70~80 年代开始普及试验设计,包括电视讲座、培训班、大学开课等,正交试验设计的应用成果超过数万项,经济效益若干亿元以上。



# 第一章 正交试验设计

## §1-1 试验设计概述

首先通过实例来说明试验设计的一些基本概念以及正交试验设计与传统试验方法的异同。

**例 1-1** 水稻栽培试验。试验目的是为了考察用什么品种,采取多大的种植密度,多少施肥量才能使水稻单产最高。表 1-1 为水稻栽培试验的因子水平表。

表 1-1 水稻栽培试验的因子水平表

水平	因子		
	A 品种	B 密度/万株·hm <sup>-2</sup>	C 施肥量/kg·hm <sup>-2</sup>
1	珍珠矮	350	35
2	南二矮	300	70
3	窄叶青	250	105

### 一、基本概念

#### (一) 试验指标

在一项试验中,用来衡量试验效果的指标,称为试验指标,或简称指标,也称试验结果,通常用  $y$  表示。试验指标可分为定量指标和定性指标两类。

能够用数量表示的试验指标称为定量指标,包括计量指标、计数指标和成数指标三种。

**计量指标:**如速度、温度、质量、产量、牵引力,它既可以用整数计量,也可用小数,是一种连续型指标。在实例中,水稻栽培试验的指标为水稻平均单产,kg/hm<sup>2</sup>,就是计量指标,计量指标也可用百分数表示,如损失率。

**计数指标:**仅用整数表示的指标,如雾滴密度为单位面积上的雾粒个数,播种量为每穴播种籽粒数等,实际上是一种离散型指标。

**成数指标:**计数指标的两者居一现象的资料用成数(百分数)表示,称为成数指标,如一批产品可以分成合格(合格率)或不合格(不合格率),两者必居其一。通常把研究现象的成数指标记作  $P$ ,把非研究现象的成数指标记作  $Q=1-P$ , $P+Q=1$ (或  $P\%+Q\%=100\%$ )。

**属性指标:**不能直接用数量表示的指标,称为定性指标。产品的外观质量、色泽、气味,例如金属、塑料等镀件的表面色泽、粗糙度,农副产品加工中(茶叶)的色、香、味等,都可作为定性指标。定性指标也称属性指标,在一定的条件下,定性指标可以转化为定量指标。

## (二) 试验因素

在试验中,凡对试验指标可能产生影响的原因都称为影响因素。需要在试验中考察研究的因素,称为试验因素,也称为试验因子,简称因子,通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。如在水稻栽培试验中,对水稻产量的影响因素有:水稻品种、土壤状况、施肥量、种植密度、植物保护措施、灌溉情况等。但在水稻栽培试验中,只选择了3个需要重点研究的因素,即试验因子:品种、种植密度和施肥量,以探索它们对试验指标的影响效果和作用,如表1-1所示。在试验中,有些因素能够严格控制,称为可控因素,例如品种、种植密度、施肥量、施药量等;有些因素难以控制,称为不可控因素,如室外试验时的风速、气温;特别需要注意:有些因素看起来可控,实际难以控制,例如,水田耕作试验,试验机行走速度看起来可以通过换挡来调整,而实际上,驱动轮打滑使得行走速度难以准确控制。

试验因素是试验中的已知条件,能严格控制,所以是可控因素,也只能是可控因素。固定因素也是一种可控因素,这些因素可以控制固定在某一适宜水平状态下进行试验,如机型、轮胎气压等。通常把未被选作试验因子的影响因素,包括可控因素和不可控因素统称为条件因素或试验条件。在例1-1水稻栽培试验中,除3个试验因素外,作业和管理质量,土壤水分和坚实度及其他环境条件,对水稻产量均有影响,它们构成了水稻栽培试验的试验条件。条件因素中对试验指标有明显干扰和影响的,称为干扰因素。

在试验设计时,因素与试验指标的关系为不确定性关系,即相关关系。试验结果的分析处理需应用数理统计的原理和方法。

## (三) 因素水平

在试验中因子所处的各种状态,或所取的不同数值、不同等级、不同规格,称为因素的水平,通常用下标 $1, 2, 3, \dots$ 表示。

若一个因子选取 $k$ 种状态或取 $k$ 个数值,就称该因素为 $k$ 水平因素,如表1-1中, $A, B, C$ 三因子都是三水平因素。 $A_1$ 表示 $A$ 因子的1水平,即品种为珍珠矮; $B_2$ 表示 $B$ 因子的2水平,即种植密度为300万株/hm<sup>2</sup>; $C_3$ 表示 $C$ 因子的3水平,即施肥量为105kg/hm<sup>2</sup>。对于因子的水平,根据专业理论知识和生产实践经验可取在适用、合理的范围内。当把握不大时,可把水平范围取大一些,或通过预备试验来确定,以防漏掉有用的水平。有的水平可取具体值,如例1-1, $B_1=350$ 万株/hm<sup>2</sup>;有的只能取大致范围或某个模糊概念,如软、硬、大、小、好、坏等;有的无法给出数值或范围,如例1-1的品种,还有机器的不同类型、不同操作方式等。

## (四) 处理组合

所有试验因子的水平组合所形成的试验点,称为处理组合,也称组合。表1-1所示为三因子三水平试验,所有处理组合数为 $3^3$ 即27种,例如组合 $A_2B_1C_3$ 表示采用南二矮品种、种植密度350万株/hm<sup>2</sup>和施肥量105kg/hm<sup>2</sup>进行水稻栽培试验。试验的目的之一就是找出使单位产量最高的处理组合即最优组合。

## 二、正交试验设计的优点

在多因子试验中,找出最优组合是试验的主要目的。如何用较少的试验次数找出最优组合,并尽可能从试验数据中获取较多的信息,正是试验设计要解决的问题。不同的试验设

计方法要达到上述目的,需要的试验次数不同,所获组合的优化程度不同。通常传统试验方法所需试验次数多或者虽然试验次数较少,但试验结果不可靠,从试验数据中所获信息太少。下面仍采用例1-1,对传统试验方法和正交试验设计法进行比较。

### (一) 全面试验法

对因子水平的全部处理组合都进行试验,即为全面试验。全面试验的试验次数即处理组合数 $n$ 应等于各因子水平数的乘积。若有 $k$ 个因子,每个因子的水平数为 $m$ ,则全面试验的试验次数为 $n=m^k$ 。例如,水稻栽培试验(见表1-1)为三因子三水平试验,全面试验次数为 $n=m^k=3^3=27$ 次。

可见,试验次数随因子数和水平数的增加而迅速增加。对于多因素多水平,当因子数和水平数超过4时,要实施全面试验,实际上有困难。全面试验的特点可归纳如下:

- 1.可以保证找到最优组合;
- 2.试验次数多,需要大量人力、物力、财力;
- 3.试验周期长,耗时多,需用人力和仪器多,干扰因素多,影响试验的准确性;
- 4.不能分清因子主次与交互作用;
- 5.不能分析误差和排除误差(重复试验例外)。

### (二) 因子轮换法(简单对比法)

在多因子试验中,根据经验或其他条件,逐一把某个因子固定在某一理想水平上,再轮换与另一因子的各水平构成处理组合进行试验,从而把多因子试验转化为单因子试验。如例1-1,一般认为种植密度大,施肥量多会提高水稻产量。因此,可以先将 $B, C$ 两因子分别固定在1,3水平上,变化 $A$ 因子,构成三种处理组合。在图1-1中,若在第I组试验中②号试验结果好,则固定 $A_2$ 再变化 $B$ 因子。

在第II组试验中,实际上只有两种处理组合,而另一种组合在第I组试验中已试验过。类似,若⑤号试验为5次试验中产量最高的一次,则固定 $B_3$ ,变化 $C$ 因子,这样总共进行7次试验;若⑥号为7次试验中产量最高的一次试验,则认为 $A_2B_3C_1$ 为优组合。

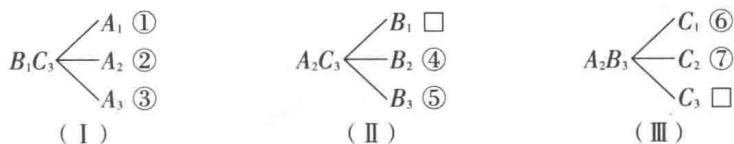


图1-1 因子轮换法示意图

因子轮换法的特点是:

- 1.试验次数少;
- 2.有一定效果,但不能保证得到最优组合,人为经验和判断直接影响试验结果;
- 3.不能分清因子主次和交互作用;
- 4.为序贯试验,后继试验须依据前面试验结果,则试验周期长;
- 5.不做重复试验就不能给出误差。

### (三) 选择组合法

从全部的处理组合中挑选少数组合进行试验,需要较高的专业水平和丰富的经验,不是科学的试验方法,特点是:

- 1.可以减少试验次数,有时可能得到较好的效果;
- 2.要事前清楚因子、水平对指标的关系,成败关键在于处理组合的选择,若漏掉最优组合,就无最佳效果;
- 3.不能分清因子主次;
- 4.当处理组合较多时,很难选择。

### (四) 正交试验设计法

根据数学家研究编制的正交表,从全面处理组合中选出最有代表性的组合作试验。对于三因子三水平或四因子三水平的试验,采用正交试验设计只需要试验9次,而做全面试验分别需27次或81次。正交试验设计的优点是:

- 1.试验次数较少;
- 2.能找出最优组合;
- 3.用极差分析方法能分清因子主次和交互作用;
- 4.能控制试验条件,给出误差,分析和减小误差;
- 5.可以指出进一步试验的方向;
- 6.计算表格化,简明,便于推广应用。

正交试验设计法已成为现代试验优化设计的主要方法,因子轮换法和选择组合法已经被淘汰多年,其试验研究结果不会被科研鉴定认可;全面试验虽然能够找到最优组合,但因试验次数多、成本高、信息量少,不能分析误差和排除误差而逐渐弃用。

## §1-2 正交表简介

正交表是正交试验设计的基本工具,由日本数学家、质量管理专家田口玄一于20世纪60年代提出,所以,又称“田口表”。正交表是根据均衡分布思想,运用组合数学理论构造的一种数学表格<sup>[4]</sup>。正交表由拉丁方(Latin Square)发展演变而来,其实质是正交矩阵(Orthogonal Array)。作为正交表核心的均衡分布思想,早在古代就有,但在国际上20世纪60年代才开始应用于科学研究和生产实际,我国应用正交表始于20世纪70年代,目前正交试验设计法已逐渐普及。

### 一、正交表构造

每一张正交表都有表号,如 $L_4(2^3)$ , $L_9(3^4)$ ,每一张正交表代表一个具体的数学表格,表1-2所示为正交表 $L_4(2^3)$ 。通常等水平正交表的通用表号可以写成 $L_n(m^k)$ ,其中“ $L$ ”是正交表代号,为英文Latin Square的第一个字母;“ $n$ ”为正交表的行数,或部分试验的处理组合数,也就是用该正交表安排试验时,应实施的试验次数;“ $m$ ”表示正交表同一列中出现的不同数字个数,即因子的水平数,不同的数字表示因素的不同水平,若一个正交表有 $m$ 个水平,就称该表

为  $m$  水平正交表;“ $k$ ”表示正交表列数,即正交表最多能安排的因子数。正交表的一列,可以安排 1 个因子,在试验设计时,安排的因子数可以小于或等于  $k$ ,但决不能大于  $k$ 。对于正交表  $L_n(m^k)$ ,括号内的  $m^k$  表示  $k$  个  $m$  水平的因子作全面试验时的处理组合数;而  $n/m^k$  为最小部分实施。

表 1-2 正交表  $L_4(2^3)$ 

试验号 \ 列号	1 A	2 B	3 C
1	1 A <sub>1</sub>	1 B <sub>1</sub>	1 C <sub>1</sub>
2	1 A <sub>1</sub>	2 B <sub>2</sub>	2 C <sub>2</sub>
3	2 A <sub>2</sub>	1 B <sub>1</sub>	2 C <sub>2</sub>
4	2 A <sub>2</sub>	2 B <sub>2</sub>	1 C <sub>1</sub>

由表 1-2 可知,  $L_4(2^3)$  是二水平正交表,有 4 行 3 列,最多能安排 3 个两水平因子做试验,试验次数为 4 次,而全面试验为 8 次,所以最小部分实施为 1/2。

如表 1-2 所示,正交表可以分成三个部分:表的第一行叫表头,左边第一列称为试验号列,余下部分称为正交表主体。

不等水平正交表又称混合型正交表或混合表,一般表示为  $L_n(m_1^{k_1} \times m_2^{k_2})$ ,  $m_1 \neq m_2$ ,各字母的具体含义与等水平表基本相同。当用混合表安排试验时,  $m_1$  水平的因子数应不大于  $k_1$ ,  $m_2$  水平的因子数应不大于  $k_2$ 。

## 二、正交表的性质

正交表的性质是指正交表主体的性质。

### (一) 正交性

正交性是均衡分布的数学思想在正交表中的实际体现,主要包括以下两点:

1. 任一列不同数码出现次数相同;
2. 任两列、同一横行两数码所组成的有序数对必然是完全有序数对,且各种有序数对出现次数相同。

下面具体分析  $L_8(2^7)$  的正交性(见附录 I 正交表)。由表知道,每列不同数码 1, 2 都重复出现 4 次,这种重复称为隐藏重复。再看任两列同一横行两数码组成的完全有序数对为 11, 12, 21, 22 共 4 种,且每种数对出现 2 次。

正交性的两条内容是判断正交表是否具有正交性的必要条件,以上分析可知,  $L_8(2^7)$  具有正交性。

正交表主体的数码表示因子的水平,因而正交性反映了每个因子各水平出现次数相同,任两个因子各水平相碰次数相同,搭配均匀的特点。由正交表的正交性还可以看出:

- (1) 正交表主体各列地位是平等的,各列之间可以互换,称为列间置换;
- (2) 正交表各行之间也可互换,即行间置换;
- (3) 正交表中同一列的数码即水平数也可以整体置换,称为水平置换。

## (二) 代表性

正交表的代表性是由正交性决定的,体现了正交表的均衡分布性质。代表性表现在:(1)任一列各水平都出现,使得部分试验中包含所有因子的所有水平;(2)任两列间所有组合都出现,使任意两因素都是全面试验。因此,部分试验中,所有因素的各水平信息和两两因素间的所有组合信息无一遗漏。这样,正交表虽然安排的只是部分试验,但却能了解到全面试验的情况。

另一方面,由于正交表的正交性,部分试验的试验点必然均衡地分布在全面试验的试验点中,图1-2为运用正交表 $L_4(2^3)$ (表1-2),安排二水平三因子试验时,试验点空间分布的展开示意图。

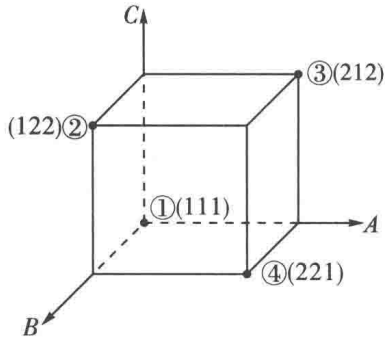


图1-2  $L_4(2^3)$  安排二水平三因子试验点分布示意图

图1-2中,三因子各水平面相交所得8个交点即为全面试验的8个试验点;而①②③④为正交表 $L_4(2^3)$ 的4个试验点,括号中的3位数字是试验点的处理组合情况,如③(212)表示第3号试验点是由 $A_2, B_1, C_2$ 组合形成的。很明显,4个试验点均衡地分布在6个面、12条棱上,具有很强的代表性。因此,部分试验的优化结果与全面试验的结果应有一致的趋势。

## (三) 综合可比性

可比性是分析试验结果,选取最优组合的必要条件。由表1-2知,正交表单行之间无可比性,例如要比较A因子两个水平 $A_1, A_2$ 对指标影响的差异,仅用第1行与第3行的试验结果进行比较是不行的,即1,3行之间无可比性,因为试验条件即B,C两因素各水平出现的情况不一致。但是,由于任一列各水平出现次数相同,任两列间所有可能的组合出现次数相同,以及所形成的隐藏重复,使得任一因素各水平的试验条件相同,这就保证了每列各个水平变化对指标的影响效果具有可比性,也就是正交表具有综合可比性。

若用正交表 $L_4(2^3)$ 安排3个二水平因子A,B,C进行正交试验,如表1-2所示。所谓 $A_1$ 的试验条件是指对应出现 $A_1$ 的1号和2号试验,因素B和C的各水平出现情况,或者说1,2号试验相加,B,C因子各水平出现的状况。本例中, $B_1, B_2$ 和 $C_1, C_2$ 各出现一次;同样 $A_2$ 的试验条件指3,4号试验相加,因子B,C各水平出现状况。本例中, $B_1, B_2$ 和 $C_1, C_2$ 也都各出现一次。可见 $A_1, A_2$ 具有相同的试验条件,因此就可以比较 $A_1, A_2$ 对试验指标的影响。这种综合可比性是正交试验设计对试验结果进行极差分析的理论基础。

在正交表的三个基本性质中,正交性是核心,而代表性和综合可比性是正交性的必然结果,推广到其他正交表,也具有这三个性质。



### 三、正交表分类及特点

正交表通常可以分为标准表、非标准表和混合表三类。

#### (一) 标准表

标准表都是等水平表。利用标准表可以考察试验因子之间的交互作用。

例如,二水平表,  $L_4(2^3)$ ,  $L_8(2^7)$ ,  $L_{16}(2^{15})$ , …

三水平表,  $L_9(3^4)$ ,  $L_{27}(3^{13})$ ,  $L_{81}(3^{40})$ , …

四水平表,  $L_{16}(4^5)$ ,  $L_{64}(4^{21})$ ,  $L_{256}(4^{85})$ , …

……

标准表中有序数对的种类和出现次数以及同列相同数码出现次数与试验因子水平  $m$  有关,其规律是水平相同的正交表,其有序数对的种类相同,只是出现次数随因子数目不同而异。

(1) 任两列有序数对出现次数  $\lambda$

$$\lambda = n/m^2 \text{ (试验次数/水平数平方)} \quad (1-1)$$

(2) 有序数对种类  $b$

$$b = m^2 \quad (1-2)$$

(3) 各列相同数码出现次数(即是水平重复数)  $r$

$$r = n/m = \lambda m \quad (1-3)$$

(4) 不同规格的正交表的试验次数  $n_i$

$$n_i = m_2 + i \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (1-4)$$

(5) 正交表列数  $k$

$$k_i = (n_i - 1)/(m - 1) \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (1-5)$$

对于任何水平的标准表,当  $i=0$  时,所确定的正交表为最小号的正交表。最小号正交表的试验次数  $n$  均为水平数  $m$  的平方;列数  $k$  均比水平数  $m$  大 1。

(6) 标准表可考察因子间的交互作用。

#### (二) 非标准表

二水平表,  $L_{12}(2^{11})$ ,  $L_{20}(2^{19})$ ,  $L_{24}(2^{23})$ , …

其他水平表,  $L_{18}(3^7)$ ,  $L_{32}(4^9)$ ,  $L_{50}(5^{11})$ , … 非标准表是为缩小标准表试验号的间隔而提出的。要特别注意:非标准表虽然也是等水平表,但却不能考察因子之间的交互作用。

两水平非标准表的构造特点:

$$\begin{aligned} n &= i \cdot m^2 \\ k &= n - 1 = i \cdot m^2 - 1 \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中  $i \geq 3$ , 且为非 2 的幂次方的自然数。式(1-6)表明,除了二水平标准表的试验号外,所有能被 4 整除的正整数,都是二水平非标准表的试验号,而非标准二水平表的列数  $k$  总比试验号  $n$  少 1。

### (三)混合表即混合型正交表

$L_8(4 \times 2^4)$ ;  
 $L_9(2 \times 3^3), L_9(2^2 \times 3^2)$ ;  
 $L_{12}(3 \times 2^4), L_{12}(6 \times 2^2)$ ;  
 $L_{16}(4 \times 2^{12}), L_{16}(4^2 \times 2^9), L_{16}(4^3 \times 2^6), \dots$   
 $L_{18}(2 \times 3^7), L_{18}(6 \times 3^6)$ ;  
 $L_{20}(5 \times 2^8), L_{20}(10 \times 2^2)$ ;  
 .....

编制混合表的目的仍然是为了减少试验次数。混合型正交表大致可分为两种情况:

(1)要着重考察的因素须多取水平,如 $L_8(4 \times 2^4)$ 为着重考察1个因素;(2)某一因素不能多取水平,如 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 。部分混合表可以采用并列法由标准表改造获得,例如,将 $L_8(2^7)$ 并列可改造得到 $L_8(4 \times 2^4)$ 。

混合表可用于安排多个不同水平的因子做试验,但一般不能考察交互作用。除由并列法改造者外,混合型正交表一般无一定规律可循。

## §1-3 正交试验设计的基本方法

对于各因子的水平数相等,因子间的交互作用均可忽略的试验,所采用的试验设计方法称为基本方法,即可以选用标准表和非标准表进行试验设计。这是实际试验问题中最简单、最基本的情况。一般试验过程为设计试验方案,按试验方案进行试验并记录,分析处理试验结果,而方案设计和结果处理是正交试验设计的主要内容。完整的正交试验过程分为三个阶段、八个步骤:

### 1. 设计试验方案

(1)确定试验目的和试验指标;(2)确定试验因子,合理选择因子水平;(3)正确选择正交表,设计试验方案。

### 2. 按照方案试验和记录数据

(4)按照试验方案进行试验和记录数据。

### 3. 试验结果分析

(5)极差计算;(6)确定因子主次;(7)在正交表中选择优组合;(8)确定最优组合。

以下用实例说明这三个阶段和八个步骤。

### 一、两水平试验

**例1-2 轴承圈退火工艺试验。**为了寻求一个最佳的退火工艺,使轴承圈硬度下降至合理范围,便于车削加工。

#### (一)设计试验方案

第一步,确定试验目的和试验指标。



试验设计是为了高效地实现试验目的而对试验方案进行的最优化设计。因此,试验设计是必须首先明确试验目的。试验目的通常有:

- (1)探求某设计、配方、工艺和生产等在试验空间内的最优化;
- (2)考察试验因素的变化规律或试验因素与试验指标之间的统计规律;
- (3)满足某些特殊的要求。

试验指标是由试验目的确定的。一个试验目的,至少需要一个试验指标。因此,试验设计前,必须明确试验目的。单一目的的试验有时不止需要一个试验指标,对于有多个试验目的的试验,相应就需多个试验指标,这要根据专业知识和试验要求,合理确定试验指标。

在例1-2中,轴承圈退火工艺试验的目的是为了寻求一个最佳的退火工艺,使轴承圈硬度下降至便于车削加工的程度。通过退火工艺使轴承圈硬度下降多少合适呢?在生产中常用硬度合格率来衡量硬度的高低。依据车削加工要求,设定轴承圈车削硬度值,经过退火处理后,测定轴承圈的硬度低于设定值,认为合格,否则不合格。硬度合格率的高低反映了退火工艺的好坏,要寻求最佳的退火工艺,使轴承圈的硬度合格率最高。因此,可用轴承圈硬度合格率作为本试验的指标,此指标为成数指标。试验指标一经确定,就应当把衡量和评定试验指标的原则、标准,测定试验指标的方法及所用仪器等确定下来。

第二步,选择试验因子和水平。

选择试验因素时,首先要根据专业知识和以往的试验研究经验,尽可能全面地考察影响试验指标的诸因素,选取对试验指标影响大的因素、尚未完全掌握其规律的因素和未曾被考察研究过的因素。一般情况下,应少选因子,但在用正交表安排初步试验筛选因素而人力、物力和时间又允许的情况下,在增加因子而可以不增加试验号的场合下,在试验目的只是为了寻求最优组合时,都可以多选定一些因子。所选试验因子必须是可控的。

试验因素的水平,一般以2~4为宜,以尽量减少试验次数。在多批试验中,在不增加试验次数的前提下,可以多选因子,少取水平,这意味着每批用小号正交表,做较少次试验,通过各批试验,能找到最优生产条件。

当试验因子要考察的范围较宽时,选择二水平试验,会导致考察范围过窄,得到的试验结果就可能是局部最优;对此试验因子应多选水平( $m=3$ ),以便找到全局最优。需要重点研究的试验因子应当多选择水平。

水平间距要适当。水平间距过小,难以判断因子水平变化对指标的影响趋势;水平间距过大,难以判断因子优水平范围,对设计后续试验不利。对于多水平试验( $m=3$ ),水平间距应该相等,有利于分析因子水平变化对指标的影响程度和影响趋势。

例1-2中,影响轴承圈退火硬度合格率的因素有:加热介质、加热方法、加热温度、加热速度、保温时间、出炉温度、冷却速度、试件材质、试件加工质量等。根据试验要求和生产实际情况,遵循少选因素和水平的一般原则,经全面分析,确定加热温度、保温时间和出炉温度为试验因素,分别用A、B、C表示,并且每个因子都取二水平,以减少试验次数。其余因素,无论可控与否,均作为试验条件处理。于是列出试验的因子水平表1-3,它是选用正交表的依据。

第三步,选用适当正交表,制定试验方案。

根据因子水平表选择正交表。如果选用的正交表既能安排下所有试验因素,又使试验