同济大学新编数学辅导丛书

西北工业大学高等数学教研室　编

高等数学中的典型问题与解法

（第二版）

（配同济四版、五版）

GAODENGSHUXUEZHONGDEDIANXINGWENTIYUJIEFA

同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

高等数学中的典型问题与解法

（第二版）

（配同济四版、五版）

西北工业大学高等数学教研室　编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是配合同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第四、五版)的辅导教材.全书将高等数学中的基本知识分为26个专题,每个专题从概念、定理、问题,典型例题与解题方法,常见错误剖析和练习题等四个方面对教材所介绍的知识进行深化、归纳总结.书中对基本概念与定理作了进一步的诠释,并回答教学中的一些概念性问题.对精选的各类问题的解法与证法加以总结,同时,阐明各类解题方法适用题型所具有的特征.针对读者容易忽视或混淆的问题及易犯的概念性与解题错误进行剖析.练习题分为A和B两类,A类为基础题,B类为提高题,书末附有答案与提示.

本书可作为高等院校师生的教学参考书,还可作为硕士研究生入学考试前的复习资料和自学考试有关人员的复习课本.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学中的典型问题与解法(配同济四版、五版)/西北工业大学高等数学教研室编.—上海:同济大学出版社,2001.6
(同济大学数学辅导系列丛书)
IBSN 7-5608-2268-1
Ⅰ.高… Ⅱ.西 Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44
中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第16582号

同济大学新编数学辅导丛书
高等数学中的典型问题与解法(第二版)
西北工业大学高等数学教研室 编
责任编辑 李炳钊 责任校对 徐 栩 封面设计 永 正

出版发行 同济大学出版社
(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂印刷 开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 29.25 插 页 8 字 数 605 000 印 数 6001—9100
版 次 2003年8月第2版 2004年9月第2次印刷
书 号 ISBN 7-5608-2268-1/O·188
定 价 30.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

同济大学
新编数学辅导丛书
编委会

第二版前言

本版在保留原版风格的基础上，对其中的一些数学术语及定理作了修订，使其与同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)保持一致. 对某些数学符号，如极限符号也按第五版的记号作了修改. 同时，在正文及课后练习中注意增加了填空题和单项选择题. 本版还修订了某些对概念和定理的诠释，使之更深刻、准确.

本书由西北工业大学应用数学系肖亚兰主编，参加本版修订的有陆全、孟雅琴、李云珠、刘小东、王雪芳、杨月茜、符丽珍、方珍珍、郑红婵、周晓莉、林伟和朗荣玲等.

编　者

2003 年 3 月

前 言

高等数学是高等工科院校最主要的基础课之一，学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后继课程的学习，而且对今后的提高和发展以及工作中的贡献都有着深远的影响.

许多读者在学习高等数学课的过程中都存在着这样的问题:“上课能听懂，课后解题却不知从何下手”. 这一问题的产生是由于一方面对基本概念、基本定理理解得不够深入，对定理的条件、结论理解得不够贴切，对各部分知识之间的联系、区别不甚清楚;另一方面的原因则在于做的题目类型较少，并且对做过的题目缺少归纳、总结，因而既不清楚常见的题目都有哪些类型，也不明了各类型题目常常采用哪些解法. 总之，是心中无数.

著名数学家、教育家乔治・波利亚(G・Polya)说过:“解题可以认为是人的最富有特征性的活动……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到指导的作用.”本书就是根据这一思路，将高等数学中常见的题目进行分类——分为 26 个专题. 在每一个专题中，从以下几方面对所学知识进行深化、归纳、总结:

一、概念、定理、问题

这一部分对教材中的基本概念、定理作进一步的诠释，帮助读者更深入、贴切地理解这些概念，掌握定理的核心内容、关键点，并回答教学中常见的一些概念性问题.

二、典型例题与解题方法

这一部分通过对精选的典型例题的分析、求解，以小结的形式对各种类型题常用的解题方法、证明方法加以归纳总结，同时，阐明各种解法适用的题目所具有的特征，还用较大的篇幅对教学中的难点作了重点讲解，如中值问题的证明，方程根的证明等. 对计算题，着重于方法的归纳总结，对证明题，则着重于证题思路的分析.

三、常见错误剖析

这部分针对在高等数学教学过程中常遇到的容易忽视或混淆的问题、初学者易犯的概念性错误或解题错误，对其进行剖析，从反面帮助读者搞清基本概念，深入理解基本定理，掌握正确的运算方法.

四、练习题

这部分是为读者检查自己对这部分内容掌握的程度而提供的练习题. 练习题分 A，B 两级. A 级为基本题，B 级为提高题. 书末附有习题答案及解题方法提示.

本书配合同济大学数学教研室编写的《高等数学》(四版)使用，可作为高等工科院校高等数学课程的教学参考书，也可作为考研的复习资料.

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系肖亚兰、陆全、孟雅琴、王禧祜、李云珠、刘小东、王雪芳、杨月茜、符丽珍、方珍珍、郑红婵、周晓莉、林伟、郎荣玲等，最后由肖亚兰教授统纂定稿.

限于编者水平，加之编写时间仓促，因而书中错误、疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编 者

2001 年 1 月

目 录

第1讲　求极限的方法与技巧

极限概念与求极限的运算贯穿了高等数学课程的始终，因此，全面掌握求极限的方法与技巧是高等数学课程的基本要求.本讲较为全面地介绍了求数列极限与函数极限的各种方法，并按方法分专题.有些例题给出了多种解法，对同一题目的不同解法以不同题号分别按专题排列，但前后注明，以便对照.

一、概念、定理、问题

(一) 数列极限与函数极限

1. 关于数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的下列论述正确吗？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$越大时，$|x_n-a|$越小；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$越大时，$|x_n-a|$越接近于零.

这两种说法均是不正确的.因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$无限增大时，$|x_n-a|$无限接近于零，或$n$无限增大时，$x_n$可以任意地接近于$a$.但上述两种说法均无法保证这一点.例如，设$x_n=-\dfrac{1}{n}$，$a=1$，则$n$越大时，$|x_n-a|=\left|-\dfrac{1}{n}-1\right|=1+\dfrac{1}{n}$越小，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0\neq1=a,$$

原因在于说$|x_n-a|$越小是指$|x_n-a|$单调减小，而不能保证$|x_n-a|$无限接近于零.

又如，设$x_n=2+\dfrac{1}{n}$，$a=1$，则n越大时，$|x_n-a|=1+\dfrac{1}{n}$越接近于零，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2\neq1=a,$$

原因在于越来越接近于零并不等同于无限接近于零.

2. 数列$\{x_n\}$的敛散性与数列$\{|x_n|\}$的敛散性有何关系？

数列$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$的关系是：若$\{x_n\}$收敛，则$\{|x_n|\}$也收敛，且当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$时，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.证明如下：由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$知，对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在着正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，从而

$$\big||x_n|-|a|\big|<|x_n-a|<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

但若$\{|x_n|\}$收敛，$\{x_n\}$却可能收敛，也可能发散.例如，$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但$\{(-1)^n\}$是发散的.如果$\{x_n\}$恒正或恒负，那么，$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$有相同的敛散性.此外，如果

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 这是今后经常用到的一个结论.

3. 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则一定有 $A>0$（或 $A<0$）吗？

不一定. 例如，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的去心邻域内大于零，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 即当 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内大于零（或小于零），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，结论仍然是 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

4. 数列极限与函数极限的区别与联系

(1) 数列 $x_n=f(n)$ 的极限与函数 $y=f(x)$ 的极限是有区别的. 它们之间的区别在于：数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的（只取正整数），且只有一种变化过程：$n\to\infty$（即 $n\to+\infty$）；而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限之间也有一定的联系：

（i）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 但当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在；

（ii）（海涅定理）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对于 $x_n\to x_0$（$n\to\infty$ 时）的任意数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由于数列极限与函数极限有上述关系，因此，可以得到数列极限在讨论函数极限时的下述应用：

1) 为了说明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$，使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大；或者找出两个收敛于 x_0 的数列 x_n 与 y_n $(x_n\neq x_0, y_n\neq x_0)$，使数列 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 有不同的极限. 例如，要说明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，可以找出两个收敛的数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ 与 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}=1$，所以，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

2) 为了说明当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不是无穷大，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$，而对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$（为定数）.

类似地，为了说明函数 $f(x)$ 在区间 $\boldsymbol{I}$ 上无界，常用的方法是找出数列 $\{x_n\}\subset\boldsymbol{I}$，而对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无穷大.

例 试证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 无界，但当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

证 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in(0,1]$，则 $f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$，

故函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 无界.

但若取 $y_n=\dfrac{1}{n\pi}$，则当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0^+$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin(n\pi)=0$，

故当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

3) 为求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，先找一个数列 $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$，求出 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，然后再证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例如先说明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,再用夹逼准则证明$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

根据函数极限与数列极限的这一关系,有时也利用函数极限的结果去求相应的数列极限.第三章中用洛必达法则求极限时,若遇到数列极限,便常常这样处理.

5. 关于准则Ⅱ:单调有界数列必有极限

这一条重要的极限存在准则在高等数学中一般是不予证明的,并且常常使用与之等价的说法:单调增加有上界的数列必有极限(或单调减少有下界的数列必有极限)来说明某个数列有极限.

6. 夹逼准则的条件可削弱为当$n>N_0$时,有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,$N_0$为某一确定的正整数,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则数列$\{x_n\}$的极限存在:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(二) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与函数极限的关系

如果函数$f(x)$以A为极限,那么,$f(x)-A=\alpha(x)$是无穷小,即$f(x)$等于一个常数A与无穷小$\alpha(x)$之和;反过来,如果$f(x)-A=\alpha(x)$是无穷小,即$f(x)$等于一个常数A与无穷小$\alpha(x)$之和,则$f(x)$以A为极限.由此可以把极限问题转化为无穷小的问题来处理.这一点可以看成是高等数学中特别要提出无穷小这类特殊变量的原因.

2. 无穷大与无界函数的区别与联系

它们之间的区别是:① 无穷大是指在自变量的某种趋向下,对应的函数值的变化趋势(其绝对值无限增大),即无穷大与自变量的"趋向"相联系;而无界函数是指自变量在某一范围内变化时,对应函数值的变化情况,即无界函数与自变量的变化"范围"相联系.② 无穷大定义中的不等式$|f(x)|>M$,要求适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$或$|x|>X$的"一切"x都要满足;而无界函数定义中的不等式$|f(x)|>M$只要求在相应的变化范围内"有"x满足即可.例如,我们说$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界,而说$g(x)=\dfrac{1}{x}$当$x\to 0$时为无穷大.

它们之间的联系是:如果$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大,则$f(x)$在包含x_0的某区间上或在以x_0为端点的某区间上无界;但反过来,当$f(x)$无界时,$f(x)$却不一定是无穷大.例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上无界,而$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to 0^+$时却不是无穷大.

3. 关于无穷多个无穷小的和

我们知道,有限多个无穷小的和仍然是无穷小,但是,把"有限多个"改为"无穷多个",结论就不一定成立了.

例如,当$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n^2},\dfrac{2}{n^2},\cdots,\dfrac{n-1}{n^2},\cdots$都是无穷小,设

$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

在这里，无穷多个无穷小之和是常数.

类似地，设 $x_n=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n-1}{n^3}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=0,$$

可知，无穷多个无穷小之和可以仍然是无穷小.

又设 $x_n=\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{3/2}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=+\infty,$$

所以，无穷多个无穷小之和还可能是无穷大.

4. 常用到的 $x\to 0$ 时的等价无穷小

常用到的 $x\to 0$ 时的等价无穷小有：

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $\mathrm{sh}x\sim x$, $\mathrm{th}x\sim x$.

5. 高阶无穷小的运算规律

这里仅以 $x\to 0$ 时的高阶无穷小为例给出运算规律：

(1) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(2) 当 $m>n$ 时，$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(3) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；

(4) 设 $\varphi(x)$ 有界，则 $\varphi(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$.

以上规律，根据高阶无穷小的定义，都不难证明. 这些规律在第三章用麦克劳林公式求极限时尤为有用.

同时，要提请读者注意下述两种错误：

(1) 认为 $o(x^m)-o(x^n)=0$，这是不对的. 例如，$x^3=o(x)$，$x^2=o(x)(x\to 0)$，但 $x^3-x^2\neq 0$.

(2) 认为 $o(x^m)/o(x^n)=o(x^{m-n})(m>n)$，这也是不对的. 例如，$x^3=o(x^2)$，$x^4=o(x)$，但 $x^3/x^4=\frac{1}{x}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷大.

二、典型例题与解题方法

这里，我们将通过一些典型的例题，对求极限的方法加以归纳、总结. 求极限的方法很多，且非常灵活，但掌握极限的性质及四则运算法则，掌握极限存在的两个准则、两个重要极限，掌握等价无穷小代换定理、洛必达法则，并会利用它们求极限是非常重要的. 本讲重点讨论未定式的极限求法.

(一) 利用极限四则运算法则求极限

对和、差、积、商形式的函数求极限，自然会想到极限四则运算法则. 法则本身很简单，但为了

能够使用这些法则，往往需要先对函数作某些恒等变形或化简. 采用怎样的变形与化简，要根据具体的算式确定. 常用的有分式的约分或通分，分式的分解，分子或分母的有理化，三角函数的恒等变形，某些求和公式与求积公式以及适当的变量替换等.

例 1.1　求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

分析　本题属$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型未定式，分子、分母均为有理多项式，往往采用约分的方法，消去分子与分母的零因式 h.

解法 1　原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h+x)(x+h-x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

解法 2　见例 1.39.

例 1.2　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（其中，$m,n$ 为正整数）.

分析　这是含根式的$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型未定式，应当先将其有理化，再约去分子、分母中的零因式.

解　令 $t=x^{\frac{1}{mn}}$，则当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$.

$$原式=\lim_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1}=\frac{n}{m}.$$

例 1.3　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

分析　$n\to\infty$时，它是$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型未定式，将分子分母同除以 3^n，使之变为适合于极限四则运算法则的函数极限.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}=3$.

例 1.4　设 $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x(1+x^4)}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=($　　$)$.　$\dfrac{1-x^4}{x^5+x}$　$\dfrac{\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^4}}$

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) ∞.

解

分子分母同除以 x^5.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^4}+1}=0.$$

故选(B).

例 1.5　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.　x^2+x-2

$\dfrac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$

$\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

分析 当 $x\to1$ 时，$\dfrac{1}{1-x}\to\infty$，$\dfrac{1}{1-x^3}\to\infty$，故这是 $(\infty-\infty)$ 型未定式，一般采用先通分的方法，然后视通分以后的极限类型再决定下一步应采取的方法.

解 $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}=\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$，

故通分以后将变成 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 型未定式，可约去分子分母中的零因式后求极限.

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-1.$$

例 1.6 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

分析 这是含有根式的 $(\infty-\infty)$ 型未定式，可以先将分子有理化，化为 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型未定式再求解.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

√**例 1.7** 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

分析 这是 $(\infty\cdot0)$ 型未定式，应当先将分子有理化，变为 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型极限，再作处理.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{1}{2}$.

这里，应当注意的是当函数中含有偶次根式时，若给分子、分母同除以 x 就应当看 $x>0$ 还是 $x<0$.

例 1.8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

分析 随着 $n\to\infty$，数列 $x_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$ 的项数也趋向于无穷，而极限的运算法则：代数和的极限等于极限的代数和只对有限多个函数成立. 因此，求无穷多项和的极限时应当先利用某些求和公式将其变为有限项再继续求解.

解法 1 使用自然数前 n 项和公式：

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

解法 2 见例 1.47.

√ **例 1.9**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中，$|a|<1$.

分析　由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子成立，因此，应当先用求积公式将其变形.

解　多次使用恒等式

$$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$$

化简　$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}).$$

当 $n\to\infty$ 时，$2^{n+1}\to+\infty$，而 $|a|<1$，故 $a^{2^{n+1}}\to0$，从而

$$原式=\frac{1}{1-a}.$$

例 1.10　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}$，其中，$|a|<1$，$|b|<1$.

分析　分子、分母均为无穷多项的和，应当先求出其和，再求极限.

解　利用等比级数求和公式：

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

$$1+b+b^2+\cdots+b^{2n}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b},$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\Big/\left(\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}\right)=\frac{1}{1-a}\Big/\left(\frac{1}{1-b}\right)=\frac{1-b}{1-a}.$$

小结　通过这几个例题我们看到，$\left(\frac{0}{0}\right)$，$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$，$(\infty-\infty)$，$(0\cdot\infty)$ 型未定式均可用极限的运算法则求极限. 不过，在使用前应当对函数作适当的恒等变形.

(二) 利用两个重要极限求极限

两个重要极限是指：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

利用它们求极限时，最重要的是对所给函数或数列作适当变形，使之具有相应的形式. 有时也可以通过变量替换使问题化简.

例 1.11　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

分析　分子是三角函数的差，应当先将其化成积的形式，再利用重要极限.