2002年

MPA联考高分突破

数学分册

胡显佑
褚永增 编著

深度总结考试规则

全面复习课程要点

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MPA 联考高分突破.数学分册/胡显佑,褚永增编著.2 版.
北京:中国人民大学出版社,2002

ISBN 7-300-04114-0/G·858

Ⅰ.M…
Ⅱ.①胡… ②褚…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 032791 号

MPA 联考高分突破
数学分册
胡显佑 褚永增 编著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街 31 号 邮编 100080)
发行部:62514146 门市部:62511369
总编室:62511242 出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经 销:新华书店
印 刷:北京密兴印刷厂

开本:890×1240 毫米 1/32 印张:10
2000 年 12 月第 1 版
2002 年 5 月第 2 版 2002 年 5 月第 1 次印刷
字数:280 000

定价:19.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

目　　录

第一章　函数、极限与函数的连续性

第一节　函　　数

[考点归纳]

1. 函数的概念、函数的定义域和值域.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 反函数.
4. 复合函数.
5. 基本初等函数的性质和图形.

[考点突破]

命题趋势

函数是微积分学的研究对象，有关函数性质的讨论将贯穿整个微积分学，在本节中，有关的重点题型为：求函数的定义域；求反函数；求复合函数；判断函数的奇偶性.

难点剖析

1. 分段函数. 分段函数的定义域是各段定义域的并集；其反函数、复合函数应分段求出.

2. 函数的有界性与单调性. 函数的这两个性质可应用导数进行讨论，我们将在第三章讨论这一问题. 一些简单的初等函数的有界性、单调性可根据基本初等函数的性质直接判定.

3. 函数的周期性. 有关三角函数周期的讨论请参阅附录.

[典型例题]

题型 1：求函数的定义域

基本初等函数的定义域可直接得出；分段函数的定义域为各段

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

定义域的并集;复合函数的定义域,则应根据基本初等函数的定义域,得到一个不等式组,解不等式组可得复合函数的定义域.

例 1(填空题)　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域为________.

解　由已知函数,自变量 x 应满足

$$\begin{cases} 9-x^2\geqslant 0 \\ x+2>0 \\ x+2\neq 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 3 \\ x>-2 \\ x\neq -1 \end{cases}$$

在数轴上表示(图 1—1)

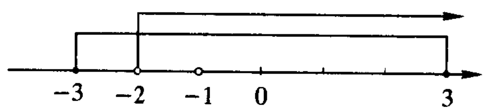

图 1—1

由此可得,定义域

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

例 2(填空题)　设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$,则 $f(\ln x)$ 的定义域为________.

解　由例 1. $f(x)$的定义域为

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

所以,对于 $f(\ln x)$,有

$$-2<\ln x<-1 \text{ 或} -1<\ln x\leqslant 3$$

即　$e^{-2}<x<e^{-1}$ 或 $e^{-1}<x\leqslant e^3$

于是 $f(\ln x)$的定义域为$(e^{-2},e^{-1})\cup(e^{-1},e^3]$.

例 3(选择题)　下列各选项中,两个函数相同的是(　　).

(A) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2},g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\sqrt{x(x-1)},g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$

解 (A) $f(x)$和 $g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但是

$$g(x)=|\cos x|$$

即 $f(x)$与 $g(x)$的对应规则不同. $f(x)$与 $g(x)$是不同的函数.

(B) 两函数有相同的定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,当 $x\neq0$ 时,$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,故 $f(x)$与 $g(x)$是相同的两个函数.

故本题应选(B).

小结 1.两个函数 $f(x),g(x)$的定义域相同,且对应规律相同时,两个函数相同.

2.如果已知函数 $y=f(x)$的解析表达式,求其定义域.应考虑:

(1)分母不能是零;(2)偶次根式下,被开方数非负;

(3)对数函数中底数大于 0,且不等于 1,而真数应大于 0.

(4)在反正弦、反余弦函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中,$|x|\leqslant1$.

根据这些要求,列出不等式组,即可求出定义域.

例 4(填空题) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2, & -3\leqslant x<0\\ x, & 0<x\leqslant4\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>4\end{cases}$$

则函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域为________.

解 函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域就是函数 $y=f(x)$的值域,故只需求 $f(x)$的值域.

对于 $y=f(x)$,

当$-3\leqslant x<0$ 时,有$-36\leqslant f(x)<0$;

当 $0<x\leqslant4$ 时,有 $0<f(x)\leqslant4$;

当 $x>4$ 时,有 $f(x)>4$.

由此得 $f(x)$的值域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$,即 $f^{-1}(x)$的定义

域为$[-36,0)\cup(0,+\infty)$

小结 求函数的定义域的方法.

(1) 根据基本初等函数的定义域,列出不等式组,求出其解集,一般,用区间表示.如例 1.

(2) 对于分段函数,其定义域是各段定义域的并集,如例 4.

(3) 对于复合函数 $f(g(x))$的定义域,应先求出 $f(x)$的定义域,再列出关于 $g(x)$的不等式,此不等式的解集就是 $f(g(x))$的定义域,如例 2.

题型 2:求反函数

求函数 $y=f(x)$的反函数,只需解出 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上,需将 x 换为 y,y 换成 x,即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 5(填空题) 函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的反函数为________.

解 由已知函数,得

$$e^x y+y=e^x$$

$$e^x=\frac{y}{1-y}$$

即, $$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

所以 $f(x)$的反函数 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

例 6 求函数

$$y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2\\ \ln x-\ln 2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

的反函数.

解 由 $x\leqslant 0$,$y=x-2$,得

$$x=y+2,y\leqslant -2$$

由 $0<x<2$ 和 $y=-\sqrt{4-x^2}$,得

$$x=\sqrt{4-y^2},-2<y<0$$

由 $x\geqslant 2$ 和 $y=\ln x-\ln 2$,得

$$x=2e^y,y\geqslant 0$$

即

$$x=\begin{cases} y+2, & y\leqslant -2 \\ \sqrt{4-y^2}, & -2<y<0 \\ 2e^y, & y\geqslant 0 \end{cases}$$

故所求反函数

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x<0 \\ 2e^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

注意　分段函数的反函数应分段求出，再合写在一起.

例 7　求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域.

解　函数的值域为其反函数的定义域，由已知函数，有

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$$

可得其反函数为

$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

解不等式$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，得$-1<x<1$. 即函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$的值域为$-1<y<1$.

题型 3：求复合函数的表达式

若已知 $f(x)$和 $g(x)$的解析表达式，求 $f(g(x))$的表达式，只需用 $g(x)$代入 $f(x)$中的 x.

若已知 $f(g(x))$的解析表达式，求 $f(x)$的表达式，可令 $t=g(x)$，并将 $f(g(x))$化为 t 的一个式子.

例 8(填空题)　已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f'(x)=$________.

解　要求 $f'(x)$，需由已知条件先求出 $f(x)$，

令　　$t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. 即

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以

$$f(t)=t^2-2$$

即 $\qquad f(x)=x^2-2$. 由此易得

$$f'(x)=2x$$

例 9 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $f(x+1)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}(x+1)-1, & x+1<0\\ (x+1)^2, & x+1\geqslant 0\end{cases}$

即 $f(x+1)=\begin{cases}x, & x<-1\\ (x+1)^2, & x\geqslant -1\end{cases}$

例 10 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=e^x$$

求 $f(g(x))$和 $g(f(x))$.

解 将 $f(x)$中的 x 代入 $g(x)$，得

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$

即

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

类似可得

$$g(f(x))=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

例 11 设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f(x)=$

________.

解 $f(x)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$变量之间互为倒数，于是用$\dfrac{1}{x}$代替 x，有等式

$\frac{1}{x^2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$,与原方程联立,可解得 $f(x)=\frac{2x-x^2}{3(x+1)}$

题型 4:判断函数的奇偶性、有界性和单调性

讨论函数 $y=f(x)$的奇偶性时,必须注意函数定义域的对称性.例如,定义在$[0,+\infty)$上的函数 $y=x^2$ 就不是偶函数.

判断函数 $y=f(x)$是否为奇函数或偶函数的基本方法是利用函数奇偶性的定义.

例 12 设 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,$f(x)$为奇函数,判断 $F(x)$的奇偶性.

解 设 $g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$.于是

$$
\begin{aligned}
g(-x)&=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\\
&=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\\
&=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\\
&=-g(x)
\end{aligned}
$$

即 $g(x)$为奇函数,又 $f(x)$为奇函数,故 $F(x)$为偶函数.

例 13(选择题) 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$是[ ].

(A) 奇函数,但非偶函数

(B) 偶函数,但非奇函数

(C) 既是奇函数,也是偶函数

(D) 非奇、非偶函数

解法 1 因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数.而 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$的曲线关于 $y=x$ 成轴对称,因此 $f^{-1}(x)$必为奇函数.本题应选(A).

解法 2 由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$可得

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

所以 $$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^x>0$，由上式舍去负号项，有

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

所以 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

反函数 $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

由于 $$f^{-1}(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=-f^{-1}(x)$$

所以 $f^{-1}(x)$ 为奇函数.

故本题应选(A).

例 14(选择题) 设 $f(x)=e^{\cos x}$，$g(x)=e^{-\sin x}$，则在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内 [ ].

(A) $f(x)$ 是单调增函数，$g(x)$ 是单调减函数

(B) $f(x)$ 是单调减函数，$g(x)$ 是单调增函数

(C) $f(x)$，$g(x)$ 都是单调增函数

(D) $f(x)$，$g(x)$ 都是单调减函数

解 基本初等函数 $y=e^x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单调增函数，而 $y=\cos x$，$y=-\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内均为单调减函数，所以 $f(x)$，$g(x)$ 都是单调减函数.

故本题应选(D).

例 15(选择题) 设定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的偶函数 $f(x)$ 存在导函数，下列函数可能既非奇函数也非偶函数的是[ ].

(A) $f'(x)$ (B) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

(C) $-f(2x)$ (D) $f(x)x^3$

解 可以验证，$f'(x)$为奇函数，$f(x)x^3$ 也为奇函数，$-f(2x)$为偶函数，仅(B)的奇偶性与 a 的取值有关，即仅当 $a=0$ 时，为偶函数. 故本题应选(B).

例 16 设 $F(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$是连续函数，判断 $F(x)$的奇偶性.

解 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t$，

令 $u=-t$，则 $t=0$ 时，$u=0$；$t=-x$ 时，$u=x$. $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$. 于是

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^x f(u^2)\mathrm{d}u\\&=-F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$为奇函数.

小结 一些有关奇函数、偶函数的结论可作为定理使用，应熟记. 其中较重要的是：

(1) 奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.

(2) 两个奇(偶)函数的积必为偶函数.

(3) 可导奇(偶)函数的导数必为偶(奇)函数.

(4) 若 $f(x)$为连续的奇(偶)函数，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

为偶(奇)函数.

[自测练习]

(一) 选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则[ ].

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的值域是(　　).

(A) $-1\leqslant y\leqslant 1$　　(B) $-1\leqslant y<1$

(C) $-1<y\leqslant 1$　　(D) $0\leqslant y\leqslant 1$

3. $f(x)=xe^{-|\sin x|}$,$(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 奇函数

4. 函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为[　　].

(A) $[-3,-2]\cup[3,4]$　　(B) $(-3,-2)\cup(3,4)$

(C) $(-3,2]\cup[3,4]$　　(D) $[-3,2)\cup(3,4]$

5. 设 $x\in(-1,1)$,则函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$[　　].

(A) 既是奇函数,又是单调减函数

(B) 既是奇函数,又是单调增函数

(C) 既是偶函数,又是单调减函数

(D) 既是偶函数,又是单调增函数

6. 下列函数中,非奇非偶的函数是[　　].

(A) $f(x)=3^x-3^{-x}$　　(B) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(C) $f(x)=x(1-x)$　　(D) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

7. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调减,则下列函数中单调增的是[　　].

(A) $f^2(x)$　　(B) $\dfrac{1}{f(x)}$

(C) $f(-x)$　　(D) $xf(x)$

8. $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x, & -\pi<x<0\\ e^{x^2}+x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$在其定义域内为[　　].

(A) 无界函数　　(B) 周期函数

(C) 单调函数　　　　　　(D) 偶函数

（二）填空题

1. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为________.

反函数为________.

值域为________.

2. 如果 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$,且 $f(f(x))=x$,则 $a=$________.

3. 设 $f(e^{2x})=xe^{-2x}$. 则 $f'(x)=$________.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,记 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n次}(x)))$,则 $f_n(x)=$________.

5. 函数 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$的定义域为全体实数,则 k 的取值范围是________.

6. 已知 $f(x)+f(y)=f(z)$. 如果 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $z=$________.

7. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,则 $a=$________,$b=$________.

8. 设 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x+1$,则 $f\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

（三）计算题

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^x f(t^2)dt\quad(a>0,a\neq 1)$

2. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\ln(1-e^{-x})$　　　　(2) $y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1 \\ \ln x, & 1\leqslant x \end{cases}$

3. 求函数 $f(x)=x^3+x^2+x+1$. 证明 $x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

4. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)>0$. 求 $\varphi(x)$，并确定其定义域.

5. 某商品供给量 Q 是价格 P 的函数：

$$Q=Q(P)=a+b\cdot c^P$$

若 $P=2$ 时 $Q=30$；$P=3$ 时 $Q=50$；$P=4$ 时 $Q=90$，求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

[参考答案]

（一）选择题

1. D　2. C　3. D　4. A　5. A　6. C　7. C　8. D

（二）填空题

1. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；$\dfrac{1-x}{1+x}$；$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

2. -3

3. $\dfrac{1}{2x^2}(1-\ln x)$

4. $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

5. 提示，对 $k<0$，$k=0$，$k>0$ 分别讨论；$0\leqslant k<\dfrac{3}{4}$

6. $\dfrac{xy}{x+y}$

7. 4；-1

8. $1-\cos x$

（三）计算题

1. (1) 奇　(2) 偶

2. (1) $y=-\ln(1-e^x)$

(2) $y=\begin{cases} x+1, & x\leqslant -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0 \\ e^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

3. 提示：直接计算左边的 $x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$；$(-\infty,0]$

5. $Q=10+5\cdot 2^P$

第二节 极 限

[考点归纳]

1. 数列的极限、函数的极限.
2. 两个重要的极限.
3. 函数的左、右极限.
4. 洛比达法则.
5. 无穷大量与无穷小量.

[考点突破]

命题趋势

极限理论是微积分学的基础. 有关极限的题目是必考的内容之一. 重点的题型有：求极限；分段函数在某点的极限；无穷小量的判断和无穷小量的比较.

难点剖析

1. 极限的概念. 考试大纲仅要求考生了解数列极限和函数极限的定义，极限的概念不是考试的重点.

2. 极限的计算. 求函数的极限的方法如下：利用函数的连续性；应用两个重要极限；应用洛比达法则求不定式的极限；应用等价无穷小求极限；应用极限存在准则（夹逼原理）求极限.

解题时，灵活运用上述方法和极限运算法则是求解极限问题的关键.

3. 等价无穷小. 在求函数极限的问题中，适当地利用等价无穷小可将问题简化.

4. 常用的一些极限. 除两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com