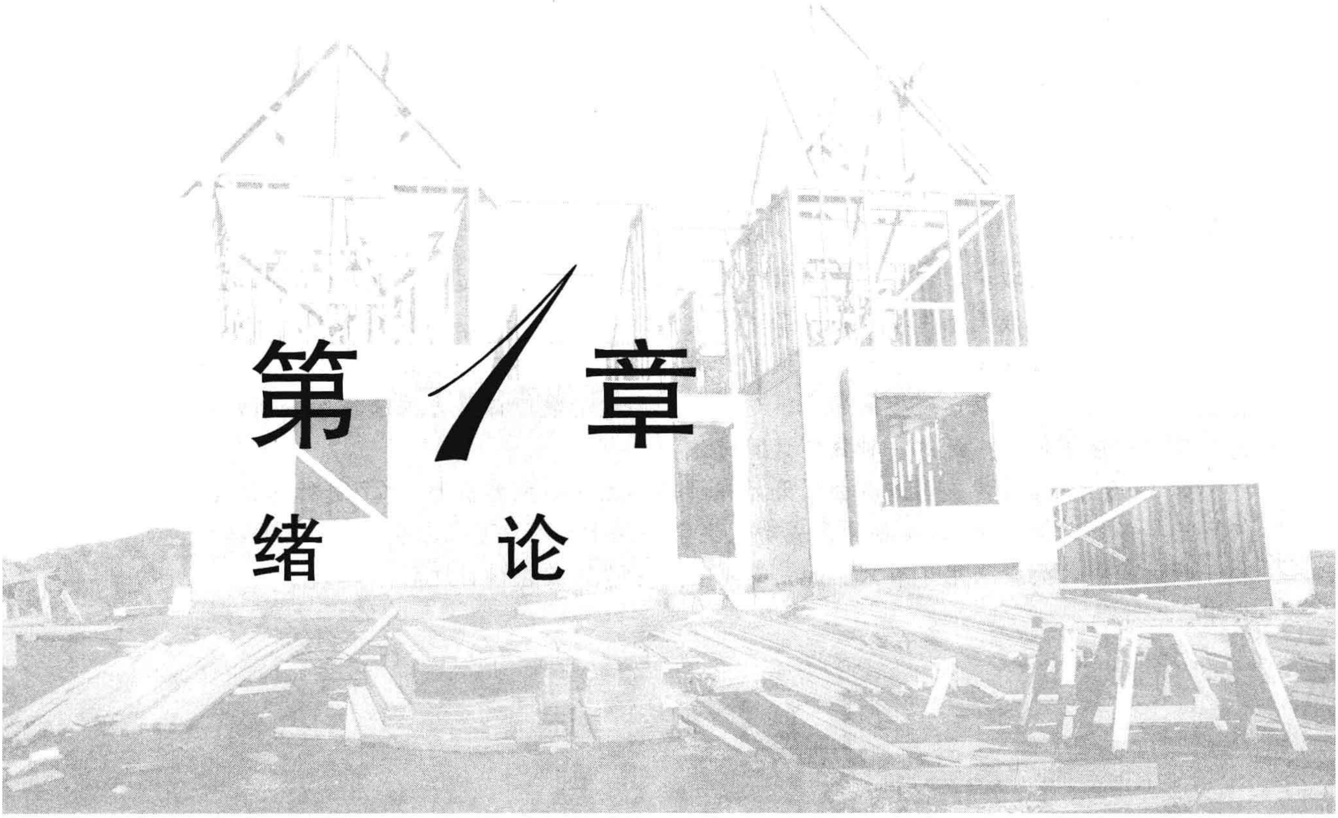

第1章 绪论

教学目标

本章主要讲述有限单元法分析问题的基本思想，有限单元法的发展过程和发展趋势，有限单元法的基本分析过程及其应用。通过本章的学习，应达到以下目标。

(1) 了解有限单元法的基本思想、有限单元法的历史发展过程和发展趋势。

(2) 熟悉有限单元法的应用领域。

(3) 掌握有限单元法分析问题的基本过程。

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
基本思想	(1) 理解有限单元法的基本思想 (2) 了解有限单元法的发展过程和发展趋势 (3) 了解有限单元法的特点	(1) 有限单元法的实质和基本思想 (2) 有限单元法的发展历史和发展趋势 (3) 有限单元法的特点
应用领域	(1) 了解常用的有限单元法分析软件 (2) 熟悉有限单元法的应用领域	(1) 静力平衡问题 (2) 结构的固有频率和振型 (3) 动态响应分析
基本分析过程	掌握有限单元法分析问题的基本过程	(1) 结构物的离散 (2) 单元分析 (3) 整体分析 (4) 求解与结果分析

基本概念

有限单元法、结点、单元、离散、单元分析。

引例

在工程技术领域中，许多问题尽管可以得到其基本方程和边界条件，但仍得不到解析解。于是在一定的假设条件下，将复杂问题简单化，求得问题在简化状态下的近似解，这种近似解往往导致误差过大甚至是错误的结论。此外，还存在许多无法得到其控制方程和边界条件的问题，如汽车碰撞问题等。这样，需要运用数值计算方法来进行分析，有限单元法是目前应用最为广泛的一种数值计算方法。

如 1990 年 10 月，美国波音公司开始在计算机上对新型客机 B－777 进行无纸化设计，仅用三年多的时间，于 1994 年 4 月成功试飞第一架 B－777 飞机。在 B－777 的结构设计和评判过程中，大量采用了有限单元法这一重要手段，其在设计过程中起到了极为关键的作用。

1.1 概　　述

有限单元法(Finite Element Method，FEM)是力学、数学物理学、计算方法、计算机技术等多种学科综合发展和结合的产物。在人类研究自然界的三大科学研究方法(理论分析、科学实验、科学计算)中，对大多数新型领域来说，由于科学理论和科学实验的局限性，科学计算成为一种重要的研究手段。在大多数工程研究领域，有限单元法是进行科学计算的极为重要的方法之一。利用有限单元法几乎可以对任意复杂的工程结构进行分析，获取结构的各种机械性能信息，对工程结构进行评判，对工程事故进行分析。

人们对各种力学问题进行分析、求解，其方法归结起来可以分为解析法(Analytical Method)和数值法(Numeric Method)。如果给定一个问题，通过一定的推导可以用具体的表达式来获得问题的解答，这样的求解方法就称为解析法。但由于实际结构物的复杂性，除了少数非常简单的问题外，绝大多数科学研究和工程计算问题用解析法求解是非常困难的。因此，数值法求解已成为一种不可替代的广泛应用的方法，并得到了不断发展。

目前，在工程技术领域常用的数值计算方法有：有限单元法、有限差分法、边界元法、离散单元法等。其中，有限单元法应用最为广泛，在工程计算领域得到了广泛的应用。有限单元法是 20 世纪中期伴随着计算机技术的发展而迅速发展起来的一种数值分析方法，它数学逻辑严谨，物理概念清晰，应用非常广泛，能灵活处理和求解各种复杂问题，它采用矩阵形式表达基本公式，便于计算机编程，这些优点赋予了它强大的生命力。

有限单元法的实质是将复杂的连续体划分为有限多个简单的单元体(图 1.1)，化无限自由度问题为有限自由度问题，将连续场函数的(偏)微分方程的求解问题转化成有限个参

数的代数方程组的求解问题。用有限单元法分析工程结构问题时，将一个理想体离散化后，如何保证其数值解的收敛性和稳定性是有限元理论讨论的主要内容之一，而数值解的收敛性与单元的划分及单元形状有关。在求解过程中，通常以位移为基本变量，使用虚位移原理或最小势能原理来求解。

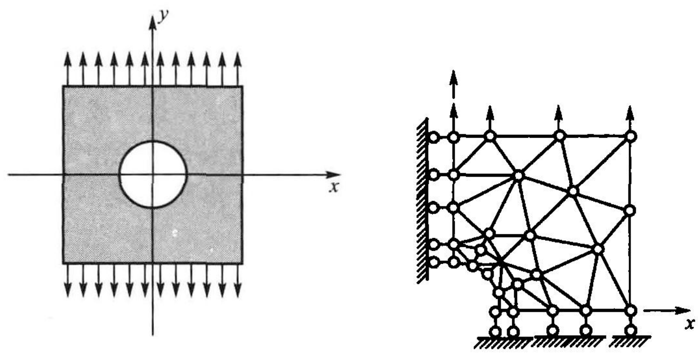

图 1.1 单元划分示意图

有限单元法的基本思想是先化整为零，再集零为整，也就是把一个连续体人为地分割成有限个单元，即把一个结构看成由若干通过结点相连的单元组成的整体，先进行单元分析，然后再把这些单元组合起来代表原来的结构进行整体分析。从数学的角度来看，有限单元法是将一个偏微分方程化成一个代数方程组，利用计算机求解。由于有限元法是采用矩阵算法，故借助计算机这个工具可以快速地算出结果。

1.2 有限单元法的发展

有限单元法基本思想的提出，通常认为起源于 20 世纪 40 年代，其实早在公元 3 世纪的时候，我国数学家刘徽提出的用“割圆术”求圆周长的方法即是有限元基本思想的体现。经典结构力学求解刚架内力的位移法，将刚架看成是由有限个在结点处连接的杆件单元组成，先研究每个杆件单元，最后将其组合进行综合分析，这种先离散、后整合的方法便是有限单元法的基本思想。

1941 年，雷尼柯夫(Hrenikoff)首次提出用框架方法求解力学问题，但这种方法仅限于用杆系结构来构造离散模型。1943 年，柯兰特(Courant)发表了一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文，第一次假设挠曲函数在一个划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数。这是第一次用有限单元法来处理连续体问题。

20 世纪 50 年代，航空事业的飞速发展对飞机结构提出了越来越高的要求，这样需要更精确地设计和计算。1956 年，特纳(Turner)、克拉夫(Clough)、马丁(Martin)和托普(Top)等将刚架分析中的位移法扩展到弹性力学平面问题中，并用于飞机的结构分析和设计，系统地研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式，并求得了平面应力问题的正确解答。他们的研究工作开始了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段。1955 年，德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组关于能量原理与矩阵分析的论文，奠定

了有限单元法的理论基础。

1960 年，克拉夫(Clough)在处理剖面弹性问题时，第一次提出并使用“有限单元法”的名称，使人们进一步认识到这一方法的特性和功效。此后，大量学者、专家开始使用这一离散方法来处理结构分析、流体分析、热传导、电磁学等复杂问题。从 1963 年到 1964 年，贝塞林(Besseling)、卞学璜(T. H. Pian)等人的研究工作表明，有限单元法实际上是弹性力学变分原理中瑞雷一里兹法的一种形式，从而在理论上为有限单元法奠定了数学基础，确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法，扩大了有限单元法的应用范围。但有限单元法更为灵活，适应性更强，计算精度更高，这一成果也大大刺激了变分原理的研究和发展，先后出现了一系列基于变分原理的新型有限元模型，如混合元、非协调元、广义协调元等。1967 年，Zienkiewicz 和 Cheung 出版了第一本关于有限元分析的专著。

20 世纪 70 年代后，随着计算机技术和软件技术的发展，有限单元法进入了发展的高速期。这一时期，人们对有限单元法进行了深入研究，涉及内容包括数学和力学领域所依据的理论，单元划分的原则，形函数的选取，数值计算方法及误差分析、收敛性和稳定性研究，计算机软件开发，非线性问题，大变形问题等。1972 年，Oden 出版了第一本关于处理非线性连续体的专著。

我国著名力学家、教育家徐芝纶院士首次将有限元法引入中国。他于 1974 年编写了我国第一部关于有限元法的专著——《弹性力学问题的有限单元法》，从此开创了我国有限元应用及发展的历史。其他的一些科技工作者，如胡昌海提出了广义变分原理，钱伟长最先研究了拉格朗日乘子法与广义变分原理之间的关系，冯康研究了有限单元法的精度和收敛性问题，钱令希研究了余能原理等，他们的研究成果得到了国际学术界的认可。

近年来，有限单元法的发展主要表现在以下两方面：一方面，新的单元类型不断出现，如等参元、高次元、不协调元、拟协调元、杂交元、样条元、边界元、罚单元等，此外还有半解析的有限条等不同单元；另一方面，求解方法不断改进，如半带宽与变带宽消去法、超矩阵法、波前法、子结构法、子空间迭代法等。同时，能解决各种复杂耦合问题的软件和软件系统不断涌现，对网格自动划分和网格自适应过程的研究，也大大加强了有限单元法的解题能力，使有限单元法逐渐趋于成熟。

1.3 有限单元法的分析过程及应用

有限单元法从 20 世纪 40 年代发展至今，经过 70 多年的发展和创新，它已经成为科学计算必不可少的工具。其应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。其分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题、磁场问题以及建筑声学与噪声问题。不仅涉及稳态场问题，而且涵盖材料非线性、几何非线性、时间问题和断裂力学问题等。

1.3.1 有限单元法的特性

(1) 对复杂几何形态构件的适应性。由于有限单元法的单元划分在空间上可以是一维的，也可以是二维、三维的，并且可以有不同的形状，如二维单元可以为三角形、四边形，三维单元可以是四面体、五面体、六面体等，同时各种单元可以有不同的连接形式。因此，工程实际中遇到的任何复杂结构或构造都可以离散为有限个单元组成的集合体。

(2) 对各种构型问题都有可适应性。有限单元法分析的研究范围已由最初杆件结构问题发展到目前的弹塑性问题、粘弹塑性问题、动力问题，可以应用于流体力学、热力学、电磁学、空气动力学问题，并且可以解决复杂的非线性问题。

(3) 理论基础的可靠性。有限单元法的理论基础(变分原理、能量守恒原理)在数学上、物理上得到了可靠的证明，只要研究问题的数学模型建立适当，实现有限元方程的算法稳定收敛，则求得的解是真实可靠的。

(4) 计算精度的可信性。只要所研究问题本身是有解的，在相同条件下随着单元数目的增加，其计算的精度不断提高，近似解不断趋近于精确解。

(5) 计算的高效性。由于有限元分析的各个步骤可用矩阵形式表示，最终的求解归结为标准的矩阵代数问题，将许多复杂的微分、偏微分方程的求解问题转化为求解代数方程组问题，特别适合于计算机编程实现。

1.3.2 有限单元法的分析过程

有限单元法的基础思想是化整为零，分散分析，再集零为整，也就是将连续的变形固体离散成有限个单元组成的结构，单元与单元之间仅在结点处连接。利用变分原理或其他方法，建立联系结点位移和结点荷载的代数方程组，求解这些方程组，得到未知结点位移，再求得各单元内的其他物理量，包括以下三个步骤。

1. 结构物的离散化

对一个结构物进行有限元分析的第一步是对其进行离散，根据求解问题的不同精度要求、效能要求等诸多因素，将整个结构划分为有限个单元，单元与单元之间、单元与边界之间通过结点连接。在进行离散时，必须注意以下几点。

(1) 单元类型的选择，包括单元形状、结点数、结点自由度数等几个方面。

(2) 单元划分应有一定的规律性，便于计算机自动生成网格，并且有利于以后对网格进行加密处理，同一单元应由同一种材料组成等问题。

2. 进行单元分析

单元分析就是将离散化后的每个单元看做一个研究对象，研究结点位移与结点力之间的关系，包括以下两方面的内容。

1) 确定单元的位移模式

对于位移型有限单元法，将单元中任意一点的位移用单元的结点位移来表示，而单元位移是结点位移的函数。位移函数的假设是否合理，直接影响到有限元分析的计算精度、

效率和可靠度。

2）单元特性分析

在建立了单元的位移函数之后，可以根据应力、应变、位移之间的关系，利用虚位移原理或最小势能原理，建立单元结点力和结点位移之间的关系，得到单元刚度矩阵。这一步还必须将单元上的荷载等效为结点荷载，进行单元分析的过程实际上是建立单元刚度矩阵和等效结点荷载矩阵的过程。

3. 整体分析

在确定了每个单元的单元刚度方程之后，可以将各单元集成整体结构进行分析，建立起表示整个结构结点平衡的方程组，即整体刚度方程，然后引入结构的边界条件，对方程组进行求解，得出结点位移，进而求出各单元的内力和变形。

1.3.3 有限单元法的应用

经过60多年的发展，有限单元法的应用范围已由杆状构件问题发展到弹性力学平面问题，并进一步扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题。其研究的对象从弹性材料扩展到弹塑性、粘弹性、粘塑性复合材料问题，从研究小变形问题到研究大变形问题，从简单的线性问题到复杂的非线性问题，从固体力学扩展到流体力学、热传导、电磁学等连续介质领域。可以说，有限单元法作为一门数值计算方法已渗透到了科学、工程的方方面面，成为人们进行科学研究、工程计算、工程设计等的重要手段。

有限单元法的应用不只局限在固体力学领域。可以这么说，有限单元法可以解决几乎所有的连续介质和场的问题，在机械工程、土木工程、航空结构、热传导、电磁场、流体力学、流体动力学、地质力学、原子工程和生物医学工程等各个领域中得到了越来越广泛的应用。根据有限元求解问题的性质可以把它在应用中解决的问题分为以下三类。

(1) 平衡问题——不依赖时间的问题，即稳态问题。

(2) 特征值问题——固体力学和流体力学的特征值问题是平衡问题的推广。

(3) 瞬态问题——随时间变化的问题。

在工程实践中，有限元分析软件与CAD系统的集成应用使设计水平发生了质的飞跃，主要表现在以下几个方面：增加设计功能，减少设计成本；缩短设计和分析的循环周期；增加产品和工程的可靠性；采用优化设计，降低材料的消耗或成本；在产品制造或工程施工前预先发现潜在的问题；模拟各种试验方案，减少试验时间和经费；进行机械事故分析，查找事故原因。在大力推广CAD技术的今天，从自行车到航天飞机，所有的设计制造都离不开有限元分析计算，FEA在工程设计和分析中将得到越来越广泛的重视。

在结构工程、航空工程等方面，人们常用有限单元法对梁、板壳进行结构分析，对各种复杂结构进行二维、三维应力分析，研究应力波的传播特性和各种结构对非周期荷载的动态响应，并对结构进行稳定性分析、研究结构的固有频率和振型等。

在土力学、岩石力学、基础工程学等领域，常用有限单元法研究填筑和开挖问题、边

坡稳定性问题、土壤与结构的相互作用，坝、隧洞、钻孔、涵洞、船闸等的应力分析，土壤与结构的动态相互作用，应力波在土壤和岩石中的传播问题。

在流体力学、水利工程学等领域，常用有限单元法研究流体的势流、流体的粘性流动、蓄水层和多孔介质中的定常(非定常)渗流、水工结构和大坝分析，流体在土壤和岩石中的稳态渗流，波在流体中传播，污染的扩散问题。

在电磁学、热传导领域，常用有限单元法研究固体和流体中的稳态温度分布、瞬态热流问题，对二维、三维时变、高频电磁场进行分析等。

1.4 常用工程应用软件简介

随着现代科学技术的发展，人们正在不断建造更为快速的交通工具、更大规模的建筑物、更大跨度的桥梁、更大功率的发电机组和更为精密的机械设备。这一切都要求工程师在设计阶段就能精确地预测出产品和工程的技术性能，需要对结构的静、动力强度以及温度场、流场、电磁场和渗流等技术参数进行分析计算。例如，分析计算高层建筑和大跨度桥梁在地震时所受到的影响，看看是否会发生破坏性事故；分析计算核反应堆的温度场，确定传热和冷却系统是否合理；分析涡轮机叶片内的流体动力学参数，以提高其运转效率。这些都可归结为求解物理问题的控制偏微分方程式，这些问题的解析计算往往是不现实的。因此，有限元软件应运而生。有限元软件的应用极大地提高了力学学科解决自然科学和工程实际问题的能力，进一步促进了有限单元法的发展。

有限元软件可以分为通用软件和专用软件两类。通用软件适应性广，规格规范，输入方法简单，有比较成熟齐全的单元库，大多提供二次开发的接口。即使通用软件的功能再强，对于一些比较专业的问题，尤其是处于研究阶段的内容，也往往显得无能为力。因此，针对某些特定领域、特定问题开发的专用软件，在解决专有问题时显得更为有效。不管是通用软件还是专用软件，其分析过程都包括前处理、分析计算、后处理三个步骤。目前常用的有限元软件有：ANSYS、MARC、ABQUS、NASTRAN、ADINA、ALGOR、SAP、STRAND、FEPG等。

1. ANSYS

ANSYS软件是融结构、流体、电场、磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件，目前最新版本为14.0。它是由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国ANSYS公司开发出来的软件，能与多数CAD软件接口，实现数据的共享和交换，如Pro/Engineer、UG、NASTRAN、Alogor、I-DEAS、AutoCAD等，是现代产品设计中的高级CAD工具之一。该软件主要包括三个部分：前处理模块、分析计算模块和后处理模块。前处理模块提供了一个强大的实体建模及网格划分工具，用户可以方便地构造有限元模型；分析计算模块包括结构分析(可进行线性分析、非线性分析和高度非线性分析)、流体动力学分析、电磁场分析、声场分析、压电分析以及多物理场的耦合分析，可模拟多种物理介质的相互作用，具有灵敏度分析及优化分析能力；后处理模块可将计算结果以彩色等值线显示、梯度显示、矢量显示、粒子流迹显示、立体切片显示、透明及半透明显示(可看到结构内部)等图形方式显示出来，也可将计算结果以图表、曲线形式显示或输出。软

件提供了100种以上的单元类型，用来模拟工程中的各种结构和材料。该软件有多种不同版本，可以运行在从个人机到大型机的多种计算机设备上，如PC、SGI、HP、SUN、DEC、IBM、CRAY等。

2. MARC

MARC具有极强的结构分析能力，可以处理各种线性和非线性结构分析，包括线性/非线性静力分析、模态分析、简谐响应分析、频谱分析、随机振动分析、动力响应分析、自动的静/动力接触、屈曲/失稳、失效和破坏分析等。它提供了丰富的结构单元、连续单元和特殊单元的单元库，几乎每种单元都具有处理大变形几何非线性、材料非线性和包括接触在内的边界条件非线性以及组合的高度非线性的超强能力。

3. ABQUS

ABQUS是美国HKS公司的产品，它是一套先进的通用有限元系统，也是功能最强的有限元软件之一，可以分析复杂的固体力学和结构力学系统。ABAQUS有两个主要分析模块：ABAQUS/Standard提供了通用的分析能力，如应力和变形、热交换、质量传递等；ABAQUS/Explicit应用对时间进行显示积分求解，为处理复杂接触问题提供了有力的工具，适合于分析短暂、瞬时的动态事件。

4. NASTRAN

NASTRAN是世界上功能最全面、应用最广泛的大型通用结构有限元分析软件之一，同时也是工业标准的FEA原代码程序及国际合作和国际招标中工程分析和校验的首选工具，可以解决各类结构的强度、刚度、屈曲、模态、动力学、热力学、非线性、声学、流体-结构耦合、气动弹性、超单元、惯性释放及结构优化等问题。通过MSC/NASTRAN的分析，可确保各个零部件及整个系统在合理的环境下正常工作。此外，程序还提供了开放式用户开发环境和DMAP语言及多种CAD接口，以满足用户的特殊需要。MSC/DYTRAN主要用于求解高度非线性、瞬态动力学、流体及流固耦合等问题，其先进的技术可解决广泛复杂的工程问题，如金属成型、爆炸、碰撞、搁浅、冲击、穿透、安全气囊(带)、液-固耦合、晃动、安全防护等。程序采用有限单元法及有限体方法，并可二者混合使用。MSC/FATIGUE是专用的耐久性疲劳寿命分析软件系统，可用于零部件的初始裂纹分析、裂纹扩展分析、应力寿命分析、焊接寿命分析、随机振动寿命分析、整体寿命预估分析、疲劳优化设计等各种分析。同时该软件还拥有丰富的与疲劳断裂有关的材料库、疲劳载荷和时间历程库等，使分析的最终结果具有可视化特点。MSC/Construct是基于MSC/PATRAN和MSC/NASTRAN用于拓扑及形状优化的概念化设计软件系统。MSC/MARC是功能齐全的高级非线性结构有限元分析系统，体现了有限元分析的理论方法和软件实践的完美结合，它具有极强的结构分析能力，可以处理各种线性和非线性结构分析问题，包括线性/非线性静力分析、模态分析、简谐响应分析、频谱分析、随机振动分析、动力响应分析、自动的静/动力接触、屈曲/失稳、失效和破坏分析等；可以解决各种高度复杂的结构非线性、动力、耦合场及材料等工程问题，尤其适用于冶金、核能、橡胶等领域。

5. ADINA

ADINA是美国ADINA R&D Inc. 开发的一套大型通用有限元分析软件，被广泛应用

于各个行业的工程仿真分析，包括机械制造、材料加工、航空航天、汽车、土木建筑、电子电器、国防军工、船舶、铁道、石化、能源等各个工业领域，能真正实现流场、结构、热的耦合分析。

6. ALGOR

ALGOR 作为世界著名的大型通用工程仿真软件，被广泛应用于各个行业的设计、有限元分析、机械运动仿真中，包括静力、动力、流体、热传导、电磁场、管道工艺流程设计等，能够帮助设计分析人员预测和检验在真实状态下的各种情况，快速、低成本地完成更安全更可靠的设计项目。ALGOR 以其分析功能齐全、使用操作简便和对硬件的要求低等特点，在从事设计、分析的科技工作者中享有盛誉。作为中高档 CAE 分析工具的代表之一，ALGOR 在汽车、电子、航空航天、医学、日用品生产、军事、电力系统、石油、大型建筑以及微电子机械系统等诸多领域中均有广泛的应用。工程师们通过使用 ALGOR 进行设计，虚拟测试和性能分析，缩短了产品投入市场的时间，并能以更低的成本制造出优质可靠的产品。

7. SAP

SAP 是结构分析程序(Structural Analysis Program)的英文缩写。SAP 程序作为一个大型的结构分析有限元通用程序，是由美国加州大学伯克利分校首先开发研制的，其第一个版本完成于 1970 年，至今已发行到了 SAP 2000 版。它除了能求解三维桁杆单元、三维梁单元、三维块体单元、薄板薄壳单元、平面应力、平面应变外，还能同时进行历程响应分析、响应谱分析、频率响应及塑性分析，并且有完善的图形前后处理功能，支持网格的自动生成、结点带宽优化及图形显示等多种功能。

8. STRAND

STRAND 是由澳大利亚 G&D Computing 公司开发的大型有限元程序系统，具有功能齐全、操作方便、性能/价格比高等特点。精心设计的交互界面直观明了，用户只需要很短的时间就能学会软件的使用方法，并用来解决实际工程问题。其 Strand 7 的网格自动生成器可读取各种 CAD 数据，直接快速地将几何模型转换成有限元模型。Strand 7 的高效求解器可在几十分钟内完成具有数百万自由度模型的分析计算，从而在计算机上就可以对体育场馆、超高层建筑、车体、大型机械等大型结构进行准确的三维模拟，使结构设计更合理、更可靠。其应用领域包括土木工程、岩土工程、结构工程、机械工程、交通工程、重工业工程、材料处理工程、航空工程、汽车工程等。

9. FEPG

北京飞箭软件有限公司开发的有限元程序自动生成系统 FEPG(Finite Element Program Generator)是一套有限元分析和计算机辅助工程分析(CAE)的软件平台。用户只需输入有限单元法所需的各种表达式和公式，即可由 FEPG 自动产生所需的全部有限元计算的源程序，包括单元子程序、算法程序等，免去了大量的、烦琐的有限元编程劳动，保证了程序的正确性和统一性。FEPG 的开发思想是采用元件化的程序设计方法和人工智能技术，根据有限单元法统一的数学原理及其内在规律，以类似于数学公式推理的方式，由微分方程表达式和算法表达式自动产生有限元源程序。

本章小结

本章主要介绍了有限单元法的基本思想，有限单元法的发展过程和发展趋势，有限单元法的基本分析过程及其应用，并对目前常用的一些有限单元法分析软件进行了介绍。有限元方法的基本思想是先化整为零，再集零为整。有限单元法从出现至今不过70多年的历史，但其应用领域已渗透到科学研究和工程计算的各个方面，已成为科技工作者进行科学研究、解决工程技术问题的强有力的工具。

有限单元法的分析过程包括结构物的离散、单元分析、整体分析三步。一般的有限单元法计算软件包括前处理、分析计算、后处理，其中前处理是进行几何建模和单元划分，后处理部分主要是对计算结果进行处理，以图形或动画的形式显示结果。

习　　题

1.1　简述有限单元法的基本思想。

1.2　简述有限单元法的基本分析过程。

第2章 连续体结构的有限单元法

教学目标

本章主要讲述连续体结构有限单元法分析的基本原理，包括平面问题、空间问题、空间轴对称问题和等参单元。通过本章的学习，应达到以下目标。

(1) 了解位移函数应满足的条件。

(2) 掌握单元分析的基本过程。

(3) 掌握整体分析的方法。

(4) 掌握约束条件的处理方法。

(5) 能够运用计算机语言编制连续体结构的有限单元法计算程序。

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
平面问题有限元分析	(1) 了解有限单元法分析的基本步骤 (2) 掌握单元的分析过程 (3) 有限单元法的特点 (4) 掌握整体分析的方法 (5) 掌握约束条件的处理方法	(1) 位移函数满足的条件 (2) 平面 3 结点三角形单元分析 (3) 平面 4 结点矩形单元分析 (4) 面积坐标的表示方法 (5) 平面 6 结点三角形单元分析 (6) 整体刚度矩阵形成方法 (7) 约束条件处理方法
空间问题有限元分析	(1) 了解体积坐标的表示方法 (2) 掌握空间轴对称单元分析 (3) 掌握空间四面体单元的分析 (4) 掌握空间正六面体单元的分析 (5) 了解其他高阶单元形函数的构造	(1) 空间轴对称单元分析 (2) 体积坐标的表示方法 (3) 空间 4 结点四面体单元的分析 (4) 空间 8 结点正六面体单元的分析 (5) 空间 10 结点四面体单元的分析 (6) 其他高阶单元
等参单元	(1) 了解等参单元的概念 (2) 掌握坐标变换方法	(1) 等参单元的概念 (2) 坐标变换 (3) 平面等参单元 (4) 空间轴对称等参单元
数值积分	(1) 了解 Newton - Cotes 积分方法 (2) 掌握高斯积分方法	(1) Newton - Cotes 积分方法 (2) 高斯积分方法

基本概念

位移函数、形函数、面积坐标、体积坐标、等参单元、数值积分、刚度集成法。

引例

在工程实际中经常需要对比较复杂的结构进行分析，以了解结构物在特定荷载作用下的变形和应力分布情况，为工程设计和材料选择提供依据。这种分析通常是基于有限单元法进行的。那么如何将一个复杂的结构体离散成有限个单元呢？通常我们需要根据实际情况选择不同的单元类型，经常用到的平面单元有三角形单元、矩形单元、直四边形等参单元、曲四边形等参单元等；而空间问题的单元有四面体单元、正六面体单元以及对应的等参单元；对于轴对称问题同样有三角形单元、矩形单元以及四边形等参单元等。同一个问题可以选择不同类型的单元进行分析，其计算精度也会不一样。实际中我们必须根据多方面的因素来选择单元类型。

2.1 概　述

2.1.1 有限单元法的分析步骤

有限单元法的基本思想是将一个连续的求解区域离散成有限个形状简单的单元，单元之间通过结点相连，以结点的某个物理参数(如结构分析中的位移、热分析中的温度)作为基本未知量进行求解分析。首先了解一下有限单元法分析问题的基本步骤。

第一步，对结构物进行离散化，划分为有限个单元。根据分析对象和求解精度的不同，需要选择不同类型的单元。有限单元法分析的基本单元有以下几种情况：一维单元、二维单元、三维单元(图2.1)。其中一维单元主要用于杆系结构的分析，主要有2结点和3结点两种类型的单元；二维单元主要用于平面连续体问题分析，其单元形状通常有三角形和四边形；三维单元主要用于空间连续体问题分析，主要有四面体和六面体两种形状。单元划分的多少，则需根据求解问题的精度和计算效益来决定。对于线性静力分析，单元划分得越多，则精度越高，但所需要的计算费用也随之越高。但对于非线性分析，单元的多少还涉及求解的收敛问题，并不是单元越多精度越高。因为单元太多有可能引起求解时不收敛。此外，单元划分时应注意各边长度尽量相等。

第二步，对各结点和单元进行编码。在对单元进行划分完后，为了便于编程计算，必须按一定的规律对各结点和单元进行编码。通常对结点的编码以自然数1、2、3…表示，而对单元采用①、②、③…表示，编码时每个单元的结点编号尽量连续。如图2.2所示为连续体的网络划分。

第三步，建立坐标系。我们知道，求解任何力学问题都必须建立坐标系，各种矢量(如位移、力、力矩等)的正负只有在特定的坐标系下才有意义。离开特定的坐标系，各种矢量只有方向的区别，而不能谈正负的概念。因此进行有限元分析时，对于整个系统，我

们必须建立整体坐标系，通常以 Oxy 表示。结点的位置以坐标来表示。

第四步，对已知参数进行准备和整理。对于各单元，如杆单元需要准备的数据包括单元截面积 A、单元长度 l、单元弹性模量 E、单元剪切模量 G、单元惯性矩 I 等。二维单元需要弹性模量 E、泊松比 μ、单元厚度 h 等。

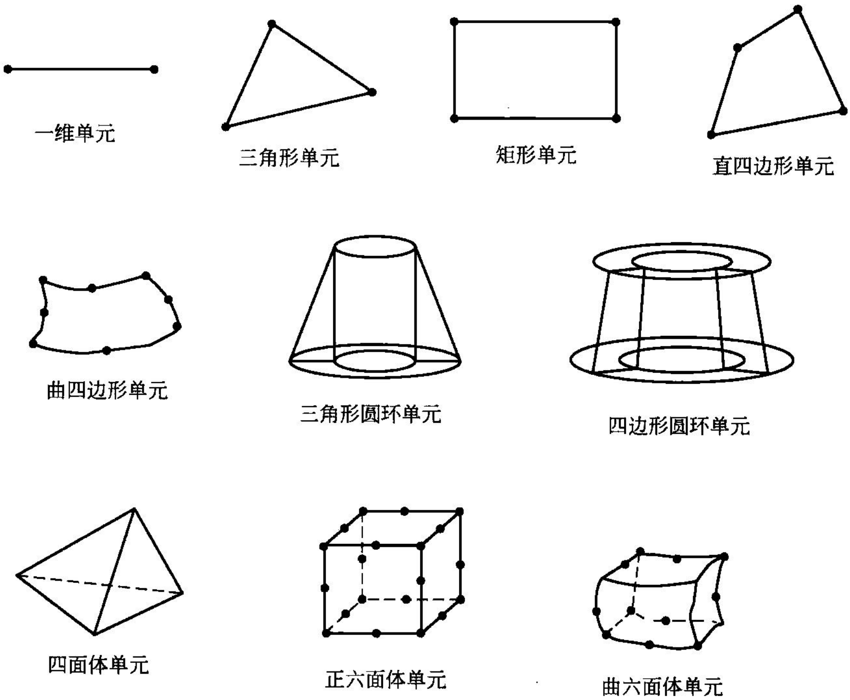

图 2.1　各种形状的单元

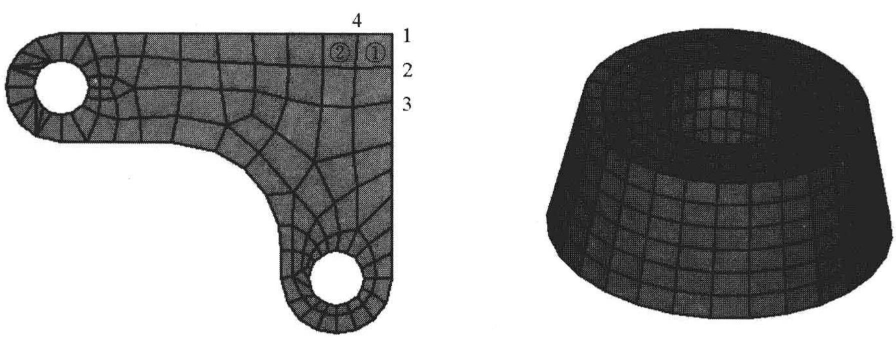

图 2.2　连续体的网格划分

第五步，进行单元分析，形成单元刚度矩阵。通常运用虚位移原理或最小势能原理来进行单元分析，建立单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^{ⓔ}$ 和荷载矩阵 $\boldsymbol{F}^{ⓔ}$。

第六步，进行整体分析，形成整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和整体荷载矩阵 $\boldsymbol{F}$。我们进行单元分析的最终目的是要对结构进行整体分析，因此必须由单元特性矩阵构成整体特性矩阵。

第七步，引入边界条件。边界条件的引入可以使问题具有解的唯一性，否则我们的问

题就是不适定的。

第八步，求解方程组，计算结构的整体结点位移矩阵 $\boldsymbol{\delta}$，并进一步计算各单元的位移、应力、应变等物理量。

第九步，对计算成果进行整理、分析，用表格、图线示出所需的位移及应力。大型商业软件(如 ANSYS 等)一般都具有强大的后处理功能，由计算机自动绘制彩色云图，制作图线、表格乃至动画显示。

2.1.2　位移函数的要求

将连续体离散为有限个单元的集合后，通常以结点的位移作为基本未知量，以离散位移场代替连续位移场。连续体内实际的位移分布可以用单元内的位移分布函数来分块近似地描述。单元内的位移变化可以用一个函数来表示，这个函数称为单元位移函数(有时称为单元位移模式)，即单元内任意点的位移通过结点位移进行插值得到。位移函数的选取是灵活的，一般选择多项式函数作为位移函数。在选择多项式时，为了使有限单元法的计算精度和收敛性得到保障，位移函数需要满足下列条件：

(1) 位移函数必须能反映单元的刚体位移；

(2) 位移函数必须能反映单元的常量应变；

(3) 位移函数应尽可能地反映位移的连续性。

其中(1)和(2)称为完备性条件，这是所有单元位移函数都必须满足的两个条件，(3)称为协调性条件，满足此条件的单元称为协调单元，否则称为非协调单元。此外，因为坐标变量与我们建立的坐标系有关，因此选择位移函数还必须考虑坐标变量的对称性。

根据上述位移函数的要求，一般按照帕斯卡(Pascal)三角形(图 2.3)来选择多项式的阶数。

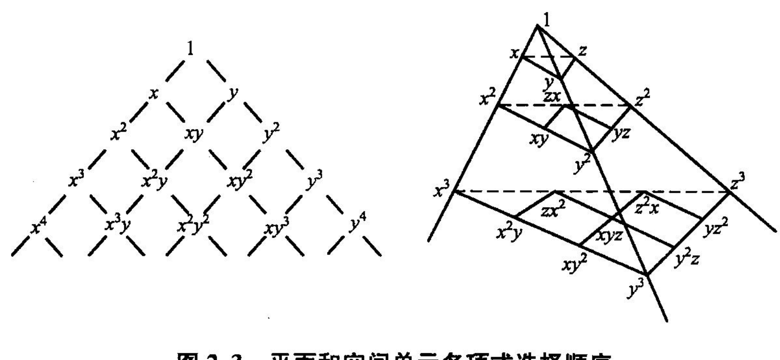

图 2.3　平面和空间单元多项式选择顺序

对于二维单元，其位移函数形式如下：

$$
\begin{aligned}
u&=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+\cdots\\
v&=b_1+b_2x+b_3y+b_4x^2+b_5xy+b_6y^2+\cdots
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

对于三维单元，其位移函数的形式如下：

$$
\begin{aligned}
u&=a_1+a_2x+a_3y+a_4z+a_5x^2+a_6y^2+a_7z^2+a_8xy+a_9yz+a_{10}zx+\cdots\\
v&=b_1+b_2x+b_3y+b_4z+b_5x^2+b_6y^2+b_7z^2+b_8xy+b_9yz+b_{10}zx+\cdots\\
w&=c_1+c_2x+c_3y+c_4z+c_5x^2+c_6y^2+c_7z^2+c_8xy+c_9yz+c_{10}zx+\cdots
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

2.2 平面 3 结点三角形单元

平面 3 结点三角形单元是求解平面连续体问题的一种最简单的单元，它以三角形的三个顶点作为结点，对边界的适应性较强。这种单元本身的计算精度较低，使用时需要较细的网格，但仍然是一种较为常用的单元。通过这种单元，可以很好地理解有限单元法的本质特征，下面对这种单元进行分析。

2.2.1 单元位移函数

如图 2.4 所示的平面 3 结点三角形单元，结点 i、j、m 的坐标分别为(x_i，y_i)、(x_j，y_j)、(x_m，y_m)。结点位移分别为 u_i、v_i、u_j、v_j、u_m、v_m。记单元的结点位移矩阵 $\boldsymbol{\delta}^{ⓔ}$ 和结点荷载矩阵 $\boldsymbol{F}^{ⓔ}$ 为：

$$\boldsymbol{\delta}^{ⓔ}=[u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^{\mathrm{T}} \tag{2-3}$$

$$\boldsymbol{F}^{ⓔ}=[F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{xj} \quad F_{yj} \quad F_{xm} \quad F_{ym}]^{\mathrm{T}} \tag{2-4}$$

根据位移函数应满足的条件，选取 3 结点三角形单元的位移函数如下：

$$\begin{cases} u=a_1+a_2x+a_3y \\ v=b_1+b_2x+b_3y \end{cases} \tag{2-5}$$

式中，a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为待定系数。将 3 个结点 i、j、m 的坐标和结点位移分别代入式(2-5)就可以将六个待定系数用结点坐标和结点位移分量表示出来。

如将水平位移分量和结点坐标分别代入式(2-5)中的第一式，得到：

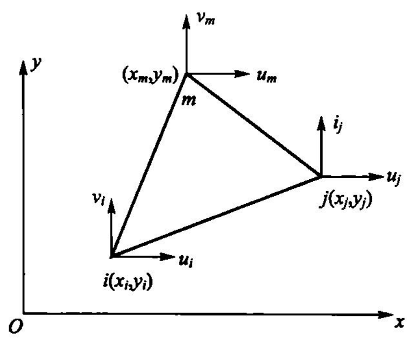

图 2.4 平面 3 结点平面三角形单元

$$\begin{cases} u_i=a_1+a_2x_i+a_3y_i \\ u_j=a_1+a_2x_j+a_3y_j \\ u_m=a_1+a_2x_m+a_3y_m \end{cases}$$

写成矩阵形式，有：

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

设 $\det\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}=2A$，$A$ 为三角形单元的面积。注意为了避免出现 $A<0$ 的情况，三个结点的排列顺序必须与坐标系的旋转方向一致。由式(2-6)可以得到：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

同理，将竖向位移和结点坐标代入式(2-5)中的第二式，可以得到：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

将式(2-7)、式(2-8)代入式(2-5)整理后可得：

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2A}\left[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m\right] \\ v = \dfrac{1}{2A}\left[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m\right] \end{cases} \tag{2-9}$$

其中系数 $a_i=x_jy_m-x_my_j$，$b_i=y_j-y_m$，$c_i=-x_j+x_m$(下标 $i \to j \to m \to i$ 轮换)。设

$$N_r=\frac{1}{2A}(a_r+b_rx+c_ry) \qquad (r=i,\ j,\ m) \tag{2-10}$$

可得：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

即单元的位移函数可以简写成：

$$\boldsymbol{d}^{ⓔ}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{ⓔ} \tag{2-12}$$

通常把 $\boldsymbol{N}$ 称为形函数矩阵，N_r称为形函数。根据形函数的定义，N_r具有以下性质：

(1) $N_r(x_s,\ y_s)=\begin{cases} 1 & (r=s) \\ 0 & (r\neq s) \end{cases} \qquad (r,\ s=i,\ j,\ m)$

(2) $N_i(x,\ y)+N_j(x,\ y)+N_m(x,\ y)=1$

例 2-1 如图 2.5 所示三角形单元，求其形函数矩阵 $\boldsymbol{N}$。

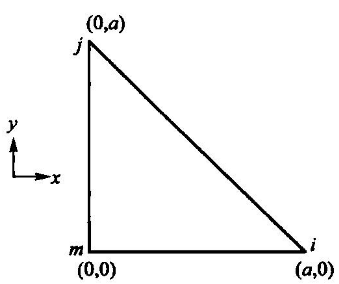

图 2.5 三角形单元

解：由 $a_i=x_jy_m-x_my_j$，$b_i=y_j-y_m$，$c_i=x_m-x_j$ 在公式中轮换下标可以计算得：

$a_i=x_jy_m-x_my_j=0\times0-0\times a=0$，$b_i=y_j-y_m=a-0=a$，

$c_i=x_m-x_j=0-0=0$

$a_j=x_my_i-x_iy_m=0\times0-a\times0=0$，$b_j=y_m-y_i=0-0=0$，

$c_j=x_i-x_m=a-0=a$

$a_m=x_iy_j-x_jy_i=a\times a-0\times0=a^2$，$b_m=y_i-y_j=0-a=-a$

$c_m=x_j-x_i=0-a=-a$

三角形面积为：$A=\frac{a^2}{2}$

形函数为：

$$N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy)=\frac{1}{a^2}(0+ax+0)=\frac{x}{a}$$

$$N_j=\frac{1}{2A}(a_j+b_jx+c_jy)=\frac{1}{a^2}(0+0+ay)=\frac{y}{a}$$

$$N_m=\frac{1}{2A}(a_m+b_mx+c_my)=\frac{1}{a^2}(a^2-ax-ay)=1-\frac{x}{a}-\frac{y}{a}$$

则形函数矩阵为：

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\frac{x}{a} & 0 & \frac{y}{a} & 0 & 1-\frac{x}{a}-\frac{y}{a} & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} & 0 & \frac{y}{a} & 0 & 1-\frac{x}{a}-\frac{y}{a}\end{bmatrix}$$

2.2.2 单元应变场

根据单元位移函数表达式(2－11)，由位移与应变的关系，可以得到单元的应变场表达式为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m\end{bmatrix} \tag{2-13}$$

记为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{\text{ⓔ}} \tag{2-14}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 矩阵称为几何矩阵，它可以表示为分块矩阵的形式：

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m] \tag{2-15}$$

其中，
$$\boldsymbol{B}_r=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r\end{bmatrix} \quad (r=i,\ j,\ m)$$

2.2.3 单元应力场

根据应力与应变的关系及式(2－14)，可以得到单元的应力场表达式为：

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{\text{ⓔ}}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^{\text{ⓔ}} \tag{2-16}$$

其中 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$ 为应力矩阵，$\boldsymbol{D}$ 称为弹性矩阵，对于弹性力学平面应力问题，有