数学分析

在企业管理与经济学中的应用

下册

对外贸易教育出版社

内 容 简 介

本书是当前美国经济与企业管理专业广泛采用的一本大学数学教材，内容包括经济、贸易、企业管理等所必需的基础数学。全书紧密结合实际，着重于应用，并备有大量的示例和习题。书末还附有代数复习题。只要具有一般高中数学知识的读者就能自学。

本书可供大学经济、贸易和企业管理专业师生以及从事经济工作的人员学习或参考。

•

MATHEMATICAL ANALYSIS

Business and Economic Applications

Third Edition

JEAN E. WEBER

HARPER & ROW, PUBLISHERS

•

数 学 分 析

在企业管理与经济学中的应用（第三版）下册

〔美〕 J. E. 韦伯 著

王昌曜 罗二明 王 勃 王 维 罗一甫 译

责任编辑 汪栋臣

•

对外贸易教育出版社出版

关 西 庄 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

•

开本787×1092 1/32・印张16 1/4 ・字数347千字

1987年4月第一版・1987年4月第一次印刷

印数1—10,000册・定价3.00元

统一书号4321・39

目　　录

第四章 积 分 学

4.1 引 言

积分法有两种不同的解释：积分法是微分法的一种逆运算方法；积分法是求曲线下面积的方法。每个方面都有许多重要的积分应用。

作为一种运算，积分法是微分法的逆运算。因此，如果将一个函数微分然后再将所得的函数积分，其结果就是原来的函数。正如下面所讨论的那样，只有以某种方式规定其积分常数，这才是真正成立的，否则其结果就可能与原来的函数相差一个常数。就这点来说，积分法就是当已知一个函数的导数（或变化率）时求这个函数之方法。在经济学中，当已知边际成本函数时积分法能用来求总成本函数，当已知边际收益函数时能用来求总收益函数，等等。

积分法也可定义为求当项数无限增加从而每项的数值趋近零时诸项之和的极限值的方法。就这点说来，积分法被看作为求曲线下面积的方法。实际上，积分学就是为计算面积而发展起来的，通过假定把面积划分成无限多个无穷小的面积元，其和就是所求的面积。积分号采用拉长了的S，早期的作者曾把S用来表示“和（sum）”。在经济学中，可以把总收益作为边际收益曲线下的面积来计算，把消费者剩余（consumer's surplus）和生产者剩余（producer's surplus）作为需求曲线和供给曲线下的面积来计算。

对于每种应用，积分法在运算上要求当给出一个函数的导数时能求出这个函数。可惜的是，积分法本来就比微分法来得困难并且某些函数（其中包括有些表面上看来似乎很简单的函数）的积分不能用初等函数来表达。比较简单的积分问题可以通过反向使用相应的微分公式来完成，而比较复杂的积分问题则要用标准积分公式表或用各种不同的代换法，而且若有必要用数值（近似）积分法来处理。

本章首先利用容易积分（反向使用微分公式）的函数讨论积分法的这两种解释及它们在企业管理与经济学中的某些应用。随后几节讨论某些比较难的函数的特殊积分方法和几种近似积分法。此外，定义并举例说明多重积分法，即偏微分法的逆运算。

4.2 不定积分

求其导数为已知的函数的方法称为积分法，而所求的函数称为所给的函数（导数函数—译注）的积分或反导数。本节定义并说明函数的积分。

如果$F(x)$是函数$f(x)$对x的积分，则$F(x)$和$f(x)$之间的关系定义为

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

式中左边部分读作“$f(x)$ 对x的积分”。符号$\int$为积分号，$f(x)$为被积函数，$F(x)$为特积分(particular integral)，C为积分常数，而$F(x)+C$是不定积分。

注意，如果$F(x)$是$f(x)$对x的一个积分，则$F(x)+C$也是一个这样的积分（式中C为任意常数），因为任何常数的导数等于零，即

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right]=\frac{dF(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}$$

$$=\frac{dF(x)}{dx}$$

这就是$f(x)$，如果$F(x)$为$f(x)$对x的一个积分．因此，一个已知其导数的函数并没有完全被确定，因为它的积分含有一个任意的附加常数。为此，函数$\int f(x)dx$被称为$f(x)$的不定积分。

可以证明，具有相同导数的两个函数至多相差一个常数。因此，如果$F(x)$是$f(x)$中的一个积分，则$f(x)$的全部积分包含在集合$F(x)+C$中，式中C为任意常数。在许多积分应用中，习题中给出的、常常被称为初始条件或边界条件的某些信息，唯一地确定其积分常数。

几何上，$y=F(x)+C$代表一个曲线族，通过平移曲线$y=F(x)$（对应于$C=0$）经过一段垂直位移C能够得到该曲线族中任何一条曲线(参看图4.1)，其中任一条曲线在横坐标为x的点上之切线斜率是$f(x)$。就这个意义上来说，由$y=F(x)+C$代表的曲线是彼此平行的。因此这曲线族具有如下性质，已知任何一点(x_0,y_0)，在这曲线族中就有且仅有一条曲线通过这个特定点。这点的坐标必须满足通过这点的曲线方程，这就唯一地确定C的值，因为

$$C=y_0-F(x_0)$$

因此，随着C被确定，就得到一个用x表示y的确定函

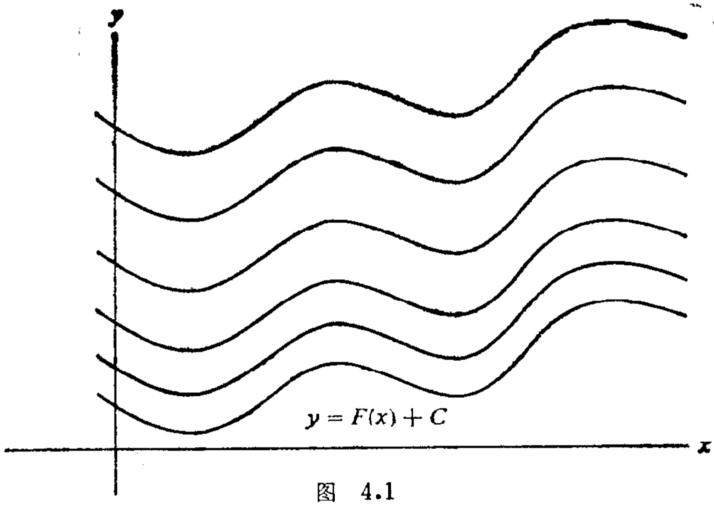

图 4.1

数，就是说，如果代表该积分的曲线所通过的一个点被确定，积分常数就被唯一地确定了。这样规定的条件称为初始条件，因为求积分常数最初产生于力学方面的问题，用来给定运动物体的初速度和初始位置。但是，这个术语通常也适用于企业管理或行为科学，因为在这样的情况下所要确定的点很可能是原点或截距。

例：

通过反向使用适当的微分公式，就能得到$f(x) = 4x -$的积分：

$$\int (4x-3)\,dx = 2x^2 - 3x + C$$

注意，不论 C 值大小 $\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + C) = 4x - 3$。因此，几何上用一族抛物线表示这个积分，每条抛物线相应于不同的C值。（参看图4.2。）

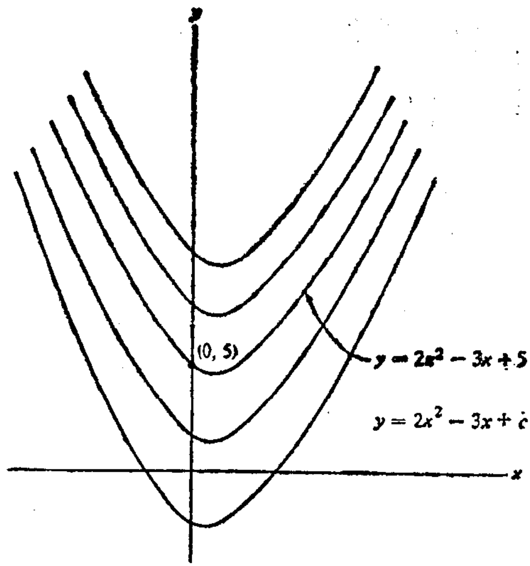

图 4.2

假如确定 J，例如，当$x=0$时，$f(x)=5$，
则有

$$2x^2-3x+C=5$$
$$C=5$$

和

$$F(x)=2x^2-3x+5$$

这就确定了由$F(x)=2x^2-3x+C$给定的曲线族中的一条特定曲线。（参看图4.2。）

上例中所用的积分法则或标准积分公式是直接地通过反向使用微分的相应法则得来的，并且可以概括如下：

1. $\int dx=x+C$

2. $\int K dx = K\int dx$，式中K为任何常数

3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$，式中$v = f(x)$和$v = g(x)$都是$x$的可微函数。

4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$，$n \neq -1$。

5. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$，$n \neq -1$，

式中$u = f(x)$是x的可微函数。

例：

$$\int (8x^2 + 4)dx = \frac{8x^3}{3} + 4x + C \quad (法则1,2,3,4)$$

$$\int x^{3/2} dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + C \quad (法则 4)$$

$$\int (3x^2 + 2)^3 x dx = \frac{1}{6}\int \underbrace{(3x^2+2)^3}_{u^3} \underbrace{(6x)dx}_{du} \quad (法则 2)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\frac{(3x^2+2)^4}{4} + C \quad (法则 5)$$

$$= \frac{(3x^2+2)^4}{24} + C$$

另一种方法是，

$$\int (3x^2+2)^3 x dx = \int (27x^7 + 54x^5 + 36x^3 + 8x)dx$$

$$= \frac{27x^8}{8} + 9x^6 + 9x^4 + 4x^2 + C$$

$$= \frac{81x^8 + 216x^6 + 216x^4 + 96x^2}{24} + C$$

$$=\frac{(3x^2+2)^4}{24}+C$$

注意最后一步中的C不等于前一步中的C，因为

$$(3x^2+2)^4=81x^8+216^6+216^4+96x^2+16$$

因而最后一步中的C值小于前一步中的C值为$\frac{16}{24}$。习惯上是，当积分常数的值由于方程形式的变化而变化时，不在符号上加以区别。

例：

求下列积分。

(a) $y=\int(x^3+2x^{5/2}+5x^{3/2}+10x)dx$如果当$x=0$时$y=0$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{7}x^{7/2}+2x^{5/2}+5x^2+C$$

若$x=0$，$y=0$，则$C=0$。因而

$$y=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{7}x^{7/2}+2x^{5/2}+5x^2$$

(b) $y=\int(x+2)^2dx$ 如果当$x=1$时$y=10$

$$=\frac{(x+2)^3}{3}+C$$

若$x=1$，$y=10$，则$C=1$。因而

$$y=\frac{(x+2)^3}{3}+1$$

(c) $y=\int(3x^2+2x+6)dx$ 如果当$x=0$时$y=5$

$$=x^3+x^2+6x+C$$

若$x=0$，$y=0$，则$C=5$。因而

$$y = x^3 + x^2 + 6x + 5$$

例：

对于下列各题求具有已知斜率且通过已知点的曲线。

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$， (4，1)

(b) $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{x}$， (1，0)

$$\text{(a)}\quad \int \frac{x^2-4}{x^2}dx = \int dx - \int \frac{4}{x^2}dx$$

$$= x + \frac{4x^{-1}}{1} + C$$

$$= x + \frac{4}{x} + C$$

于是

$$y = x + \frac{4}{x} + C$$

$$1 = 4 + 1 + C$$

$$C = -4$$

因此

$$y = x + \frac{4}{x} - 4$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x}$$

就是所求的曲线。

$$(b)\quad \int x^2\sqrt{x}\,dx = \int x^{5/2}dx$$

$$=\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{7/2}+C$$

于是

$$y=\frac{2}{7}x^{7/2}+C$$

$$0=\frac{2}{7}+C$$

$$C=-\frac{2}{7}$$

因此

$$y=\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{2}{7}$$

$$=\frac{2}{7}(x^{7/2}-1)$$

$$=\frac{2}{7}(x^{3}\sqrt{x}-1)$$

就是所求的曲线。

习　　题

试求下列积分。

1. $\int(x^2-\sqrt{x}+4)dx$

2. $\int(2-7t)^{2/3}dt$