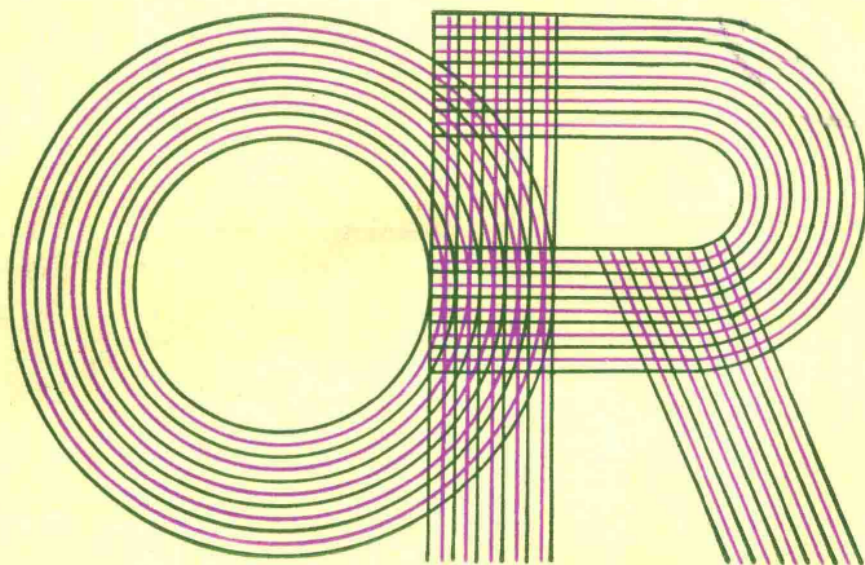


运筹学杂志

CHINESE JOURNAL
OF
OPERATIONS RESEARCH



第 2 卷
Vol. 2

第 2 期
No. 2

1983

中国数学会运筹学会主编

上海科学技术出版社出版

运筹学杂志

(半年刊)

第2卷 第2期

目 录

专题介绍: 理论和方法

结构可靠性理论的发展与应用	林忠民	(1)
图的带宽问题的 Harper 方法	林诒勋	(11)
最短网络	黄光明	(18)
组合时间表理论(二)	R. L. Graham	(26)
启发法及其设计——综合报告(二)	H. Müller-Merbach	(36)

应 用 实 例

最优化方法在雾化提钒中的应用	李吉鸾 刘祥官 伍礼成 陈歧	(43)
----------------------	----------------	------

研 究 简 报

关于一类带风向的投递员问题	管梅谷	(51)
总极值的最优性条件与凸规划	郑 权	(53)
Hilbert 空间中带约束优化问题的广义 Lagrange 泛函及乘子方法	朱道立	(55)
Kuhn-Tucker 鞍点等价定理的推广	林锬云	(57)
带线性约束的最优化问题的可行方向算法的统一途径	越民义 韩继业	(59)
正交设计的熵最优性	章志敏 王长钰	(61)
正基中向量个数不等式的简化证明	濮定国	(63)

动 态 和 其 他

惩罚函数法	邓乃扬 马国瑜	(65)
非线性规划: 历史考察(二)	H. W. Kuhn	(70)
美国运筹学会及其活动概况	柯寿仁	(78)
中国数学会运筹学会通知		(10)
第四次全国可靠性数学理论讨论会简讯		(25)
本刊启事		(56)
征稿简则		(52)

专题介绍：理论和方法

结构可靠性理论的发展与应用

林 忠 民

(福建师范大学)

§ 1. 结构可靠性理论的产生和发展

凡是跟安全可靠与费用合理这对矛盾有关的各类结构,一般说都存在可靠性问题,正是这对矛盾推动着结构设计理论的不断发展和更新。早期的结构设计是用生物比拟或用纯经验为依据,随着自然科学和技术科学的发展,逐渐发展为以试验为依据或以经验为基础的极限平衡设计理论,进而又提出了容许应力设计、定值极限状态设计等设计理论和方法。由于各类结构工程领域的工程实践和设计理论研究水平有差异,结构设计理论在不同领域的发展和更新速度也不一样,造成了在抗力-应力模型的研究上缺乏一种统一的理论基础的局面。

本世纪二、三十年代,统计数学方法相继进入各种应力和材料性能的分析研究领域,为结构可靠性理论的产生奠定了必要的基础。

五十年代开始,苏联、美国等国家在研究飞行器的机(弹)体等机械产品结构、土木工程结构、船体结构等设计方面,对结构抗力(包括净强度、几何参数、疲劳度……)和应力(包括结构自身的和外加的负荷、载荷、荷载,……)开始采用随机变量概型的新观点。比如在导弹可靠性问题的推动下, Birnbaum 在第三届数理统计与概率论的 Berkeley 专题讨论会上发表了一篇文章^[1],明确提出了表达结构失效的形如 $p = P\{Y < X\}$ 的概率估计问题。它在对这种概率做解释时说了这样一段话:“机械产品的结构部件是大量生产的,每一部件在失效时的强度 Y 可以认为是一个随机变量,部件被装配后承受的应力达到的最大值 X 也是一个随机变量;如果 $Y < X$, 则部件将在使用中失效。在这种场合, $p = P\{Y < X\}$ 就是部件失效的概率。”同期, Ржаницын 从土木结构的极限状态设计的角度,讨论了抗力 R 和应力 S 互相独立且都服从正态分布的条件下的结构设计问题^[2]。

这种新观点的出现,引起了多方面人员的重视和研究兴趣。如美国土木工程师协会于五十年代中期成立了“安全度工作委员会”,该委员会于1957年发表了第一个研究进展报告^[3],明确地把“安全度”概念与“概率”概念联系起来,从而开始了使建筑结构传统的“绝对安全”概念向着相对的“安全概率”概念发展。从此,关于结构可靠性的研究,沿着结构可靠性设计与结构可靠性估计两个方面发展,理论研究和应用成果至今持续不断。

结构设计的基本目标,是保证结构在所有的位置上“最小抗力”不小于“载荷的最大结构效应-应力”,否则,结构就不可靠或将导致失效。这一明显而简单的条件却蕴含着工程结构

设计理论中诸如“可靠度”、“最小抗力”、“最大应力”等一系列最基本的概念和复杂的工程结构理论问题,涉及到结构应力与结构抗力的概率模型和统计分析方法;结构可靠度概念和可靠度分析;结构可靠度估计和结构应力组合等方面。本文仅就结构可靠度的概念、设计模式、设计表达式以及可靠度估计等作扼要的综合介绍。

§ 2. 结构可靠性与可靠度指标

所谓结构可靠性是指结构在规定的条件下、在规定的时间内完成预定功能的能力。

这里,规定的条件是指结构的正常设计、正常施工(工艺、构造、施工,……)和正常使用等;规定的时间是指使用寿命或设计基准期;预定功能包括安全性、可靠性、适用性、耐久性等功能。

定义 结构在规定的条件下、在规定的时间内完成预定功能的概率叫做结构的可靠度。

在不同的设计模式下,结构可靠度可以不同的数量表征。根据具体的可靠度数量指标建立协调一致的可靠性设计模式和设计表达式,以及对可靠度的估计和评价。

在结构可靠性设计中,结构功能(负荷能力、适用性能、耐久性能等)通常以极限状态为标志,结构达到使它不能完成预期功能前的一种特殊(临界)状态叫做极限状态。从统计学观点看,极限状态可以用结构功能函数给予精确表达。

定义 设 $X_i (i=1, n)$ 为结构设计基本变量,结构可靠条件按功能函数

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0$$

进行的设计就叫做极限状态设计。

极限状态设计按结构功能函数的取值严格地把结构区分为三种不同状态:

$$g(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}) = \begin{cases} Z_0 > 0, & \text{结构处于可靠状态;} \\ Z_0 = 0, & \text{结构达到了极限状态;} \\ Z_0 < 0, & \text{结构处于失效状态.} \end{cases}$$

因此,假设 $X_i (i=1, n)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上的随机变量, $g(\cdot)$ 为 $\mathcal{B}$ -可测函数,则

$$p_r = P\{Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0\}$$

叫做结构处于可靠状态的概率,简称结构可靠概率;同样称

$$p_f = P\{Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0\}$$

为结构失效概率;称

$$p_l = P\{Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0\}$$

为结构达到极限状态的概率。

为讨论方便起见,可以把设计基本变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 按其结构属性归并为抗力 R 和应力 S 两个基本变量,即

$$\begin{aligned} R &= R(X_{R1}, \dots, X_{Ri}), \\ S &= S(X_{S1}, \dots, X_{Sj}), \end{aligned} \quad i+j=n$$

这时功能函数成为

$$Z = g(R, S) = R - S.$$

这样

$$p_f = P(R < S) = P(R - S < 0).$$

这正是 Birnbaum^[1] 提出的结构失效概率。

按定义, 结构可靠度一般指随机事件“ $Z = R - S \geq 0$ ”的概率, 即

$$P(R - S \geq 0) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - F_Z(0),$$

式中 $F_Z(x)$ 为功能函数 Z 的概率分布函数。

当 R 与 S 互相独立且分布函数分别为 $F_R(x)$ 和 $F_S(x)$ 时, 有

$$P(R - S \geq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^r dF_S(s) dF_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} F_S(r) dF_R(r) = E_R[F_S(R)].$$

当 R 与 S 的分布函数均连续时, 便有

$$p_r = P(R - S > 0) = E_R[F_S(R)]$$

或 $p_f = 1 - p_r = 1 - E_R[F_S(R)]$.

再进一步假设 R 、 S 的二阶矩存在, 即 $E[R]^2 < \infty$, $E[S]^2 < \infty$, 并记 $E[Z] = \mu_Z$, $D[Z] = \sigma_Z^2$, 作标准化变换

$$Z' = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z},$$

则有

$$p_r = 1 - F_{Z'}\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

或

$$p_f = 1 - p_r = F_{Z'}\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right).$$

在 R 、 S 独立的条件下, 有

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_R - \mu_S, \\ \sigma_Z &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}. \end{aligned}$$

令

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.$$

由分布函数 $F_{Z'}(x)$ 的单调性可得

$$\beta = -F_{Z'}^{-1}(1 - p_r)$$

或

$$\beta = -F_{Z'}^{-1}(p_f).$$

由上面结果可见, β 与 p_r (或 p_f) 存在一一对应关系; 所以 β 也可作为结构可靠度的数量表征, 其优点在于它仅涉及 R 、 S 的一阶原点矩和二阶中心矩; 而且与传统的中心安全系数

$$K = \frac{\mu_R(\text{抗力平均值})}{\mu_S(\text{应力平均值})}$$

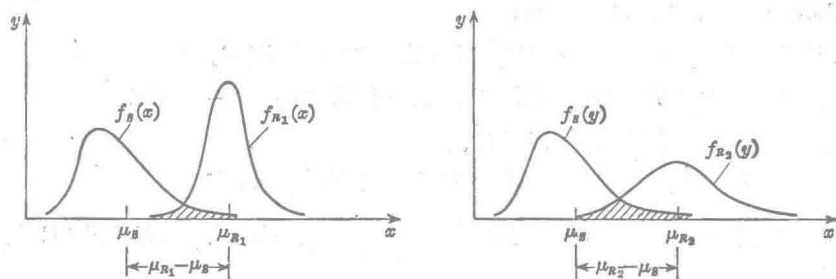
比较, β 除了包含 R 、 S 的平均值外还包含了它们的均方差的信息。不难举出两个中心安全系数完全一致而失效概率相差十分悬殊的结构设计变量的情况。如下图所示, R_1 与 S , R_2 与 S 具有相同的中心安全系数

$$K = \frac{\mu_{R_1}}{\mu_S} = \frac{\mu_{R_2}}{\mu_S}.$$

但由于抗力 R_1 的均方差显著地小于 R_2 的均方差, 则有

$$\beta_1 = \frac{\mu_{R_1} - \mu_S}{\sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_S^2}} > \frac{\mu_{R_2} - \mu_S}{\sqrt{\sigma_{R_2}^2 + \sigma_S^2}} = \beta_2.$$

可见, 利用 β 作为结构可靠度指标比中心安全系数 K 合理, 这与工程实践经验是完全吻合的。故特别把 β 叫做可靠指标。



可靠指标 β 的出现, 为结构可靠性分析与设计提供了客观的、统一的和数量化的标准, 为结构可靠性设计理论的实际应用创造了条件, 奠定了二阶矩可靠性设计的理论基础。

§ 3. 二阶矩可靠性设计理论模式

1. 最大应力的半随机变量设计模式

对于航空航天等领域以及大型土木建筑工程, 要进行应力的观测与统计分析, 如百年一遇的大风, 千年一遇的大水等, 往往是十分困难的。这时, 稳妥的办法是根据实际情况取一个应力 S 的最大值 S_0 (一般为确定值); 而抗力 R 常常能在实验室或材料生产过程作重复试验而获得它的资料和数据。这时可以选用形如

$$Z = R - S_0$$

的结构功能函数, 其概率分布实际上由 R 确定。

假定抗力 R 服从正态分布 $N(\mu_R, \sigma_R)$, 则 Z 也服从正态分布

$$N(\mu_Z, \sigma_Z) = N(\mu_R - S_0, \sigma_R),$$

从而给出结构可靠概率

$$p_r = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_R - S_0}{\sigma_R}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_R - S_0}{\sigma_R}\right),$$

式中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。而可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_R - S_0}{\sigma_R}.$$

由这可靠指标给出可靠性设计表达式

$$\mu_R \geq S_0 + \beta \sigma_R.$$

按此公式设计, 结构可靠概率不低于 p_r 。

2. 正态随机变量设计模式

正态随机变量模式首先由 Ржаницын^[2] 于 1954 年提出, 而后由 Cornell^[4] 于 1969 年加以完善, 其基本假设是: 抗力 R 服从正态分布 $N(\mu_R, \sigma_R)$ 和应力 S 服从正态分布 $N(\mu_S, \sigma_S)$ 。在 R 与 S 互相独立的条件下, 结构可靠概率为

$$p_r = \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right),$$

可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.$$

在可靠条件

$$\mu_R \geq \mu_S + \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

下可获得设计表达式

$$\mu_R \geq \gamma \mu_S,$$

式中 γ 为单一可靠性系数

$$\gamma = \frac{1 + \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - \beta^2 V_R^2 V_S^2}}{1 - \beta^2 V_R^2}.$$

当 R, S 的设计值采用标准值时, 即

$$R_K = \mu_R - \delta_R \sigma_R = \mu_R (1 - \delta_R V_R),$$

$$S_K = \mu_S + \delta_S \sigma_S = \mu_S (1 + \delta_S V_S),$$

式中 $V_R = \sigma_R / \mu_R$, $V_S = \sigma_S / \mu_S$, 这时设计表达式可改写成

$$R_K \geq \gamma_K S_K,$$

单一的可靠性系数为

$$\gamma_K = \frac{(1 - \delta_R V_R) (1 + \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - \beta^2 V_R^2 V_S^2})}{(1 + \delta_S V_S) (1 - \beta^2 V_R^2)}.$$

对于某些结构, 传统的设计习惯用分项安全系数的形式表达。Lind^[5] 于 1971 年建议用线性化公式

$$\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S,$$

式中 α_R, α_S 叫做设计敏感系数。从而可获得分项系数表达的可靠性设计表达式

$$\gamma_R \mu_R \geq \gamma_S \mu_S,$$

式中抗力分项系数 γ_R 和 应力分项系数 γ_S 分别为

$$\gamma_R = 1 - \alpha_R \beta V_R,$$

$$\gamma_S = 1 + \alpha_S \beta V_S.$$

这时可靠指标应改写为

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S}.$$

3. 对数正态随机变量设计模式

由于许多类型结构的抗力 R 或应力 S 并不服从正态分布, 1972 年 Rosenblueth 和 Esteva^[6] 提出了 R, S 均服从对数正态分布的设计模式, 其基本假设是: $R' = \ln R$ 服从正态分布 $N(\mu_{R'}, \sigma_{R'})$, $S' = \ln S$ 服从正态分布 $N(\mu_{S'}, \sigma_{S'})$, 且 R, S 互相独立, 这时可以推出可靠指标为

$$\beta = \frac{\ln \left\{ \frac{\mu_R}{\mu_S} \left[\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}{[\ln(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

这种形式的可靠指标比较复杂, 为了实用方便, 假定变异系数 V_R, V_S 都很小且比较相近, 这时上式可简化为

$$\beta \approx \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}.$$

由可靠条件

$$\ln \frac{\mu_R}{\mu_S} \geq \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2}$$

推得可靠性设计表达式

$$\mu_R \geq \gamma \mu_S,$$

式中单一可靠系数为

$$\gamma = e^{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2}}.$$

若再利用线性化

$$\sqrt{V_R^2 + V_S^2} \approx \alpha_R V_R + \alpha_S V_S,$$

可得分项系数表达的设计表达式

$$\gamma_R \mu_R \geq \gamma_S \mu_S,$$

式中, $\gamma_R = e^{-\alpha_R \beta V_R}$, $\gamma_S = e^{\alpha_S \beta V_S}$.

这时可靠指标 β 应按下式计算

$$\beta = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\alpha_R V_R + \alpha_S V_S}.$$

如有必要,同样可以推导以标准值 R_K 、 S_K 表达的设计表达式。

4. 等价正态随机变量设计模式

为了进一步完善二阶矩可靠性设计模式, Rackwitz^[7] 于 1976 年提出了等价正态随机变量概念。对于非正态分布 $F_R(x)$ 的抗力 R 和非正态分布 $F_S(x)$ 的应力 S , 引进等价正态随机变量 $R' \sim N(\mu_{R'}, \sigma_{R'})$ 和 $S' \sim N(\mu_{S'}, \sigma_{S'})$, 其均值 $\mu_{X'}$ 及均方差 $\sigma_{X'}$ 由下面公式计算得到

$$\begin{aligned} \mu_{X'} &= X^* - \Phi^{-1}[F_X(X^*)] \sigma_{X'}, \\ \sigma_{X'} &= \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_X(X^*)]\}}{f_X(X^*)}, \end{aligned}$$

式中, $\Phi(x)$ 、 $\varphi(x)$ 分别为标准正态分布函数和密度函数; $F_X(x)$ 、 $f_X(x)$ 为 X (R 或 S) 的分布函数和密度函数。 X^* 叫做设计验算点。

因此, 当结构设计变量 R 或 S 不服从正态分布时, 利用其等价正态变量的均值和均方差代替 R 或 S 的均值和均方差, 正态设计模式的设计表达式仍然可用。《统一标准》^[8] 就采用了这种模式。

5. 半随机过程的极小化变换模式

一般工程结构面临的载荷往往需要用随机过程模型才能反映其动态特性^[8]; 又有一些部门的结构本身的强度有明显随时间变异的特性, 如钢结构的疲劳, 钢筋混凝土不同龄期的强度等, 也需要用随机过程加以描述。因此, 有的结构的合理功能函数应当采用

$$Z(t) = R - S(t), \quad t \in [0, T].$$

另一些结构的功能函数则应采用

$$Z(t) = R(t) - S, \quad t \in [0, T].$$

它们都是随机过程 $\{Z(t), t \in [0, T]\}$ 。由于抗力、应力只有其一为随机过程, 另一仍保持随机变量, 故称之为半随机过程模型。

从实用角度出发, 一种切实可行的途径是通过适当的变换, 将半随机过程的可靠性设计模式转化到理论和应用的发展已比较成熟的抗力、应力随机变量模式后加以处理。从可靠的角度出发, 引进极小化变换

$$\min_{0 \leq t \leq T} Z(t) = \min_{0 \leq t \leq T} \{R - S(t)\} = R - \max_{0 \leq t \leq T} S(t) = R - S_M = Z_m,$$

$$\text{或} \quad \min_{0 \leq t \leq T} Z(t) = \min_{0 \leq t \leq T} \{R(t) - S\} = \min_{0 \leq t \leq T} R(t) - S = R_m - S = Z_m,$$

式中, R_m 为抗力随机过程 $\{R(t), t \in [0, T]\}$ 在时间域 $[0, T]$ 上的最小值, 它是一个与时间参数无关的随机变量; 同样, S_m 为应力随机过程 $\{S(t), t \in [0, T]\}$ 在 $[0, T]$ 上的最大值, 也是一个随机变量, 因此, Z_m 也是一个随机变量。

经过极小化变换后, 结构功能函数由随机过程转化成为随机变量 Z_m , 从而只要寻求随机变量

$$R_m = \min_{0 \leq t \leq T} R(t)$$

或

$$S_m = \max_{0 \leq t \leq T} S(t)$$

的统计规律, 获得 R_m 或 S_m 的概率分布及有关统计参数, 再借助于已建立的二阶矩设计模式达到处理半随机过程模式的问题。

值得指出, 极值分析^[9]在处理这种模式中是一种十分有力的工具^{[10][11]}。对于平稳二项随机过程^[12], Poisson 方波随机过程^[13], 滤过 Poisson 过程^[14] 正态随机过程^[15] 等, 在 $[0, T]$ 上的最大(小)值的概率分布及统计参数已经获得一般的求解公式^[16], 其它类型的随机过程的类似问题仍处于探索之中。

其余设计模式, 如具有实用意义的多个基本设计变量的非线性的功能函数

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

的设计模式^[15] 及其具体的应用^[16] 等, 限于篇幅就不再赘述。

§ 4. 功能函数的首次穿零模式

要对结构可靠性作动态分析和设计, 必须采用随机过程理论和过程统计分析方法^[17]。即从研究半随机过程模式的功能函数

$$Z(t) = R - S(t), \quad Z(t) = R(t) - S,$$

或全随机过程模式的功能函数

$$Z(t) = R(t) - S(t)$$

在时间域 $[0, T]$ 上样本函数首次穿零概率来建立结构可靠度指标。早在六十年代中叶就开始了这个方向的研究^[18], 但由于一般随机过程样本函数解析性质除正态随机过程^[19] 等某些特殊类型的随机过程已经获得比较多的理论成果外^[20], 其它都是难度很大的复杂的研究课题。所以从理论上, 特别是理论的实际应用方面所见成果有限, 但这无疑是一个很值得进一步研究的方向。

§ 5. 结构可靠性估计

自从 Birnbaum^[21] 提出结构失效概率

$$p_f = P(R < S)$$

的估计之后, 引起了许多从事理论和应用研究工作者的浓厚兴趣。二十多年来研究文章不断出现^{[21]~[22]}。如果说, 结构可靠性设计侧重于概率模型的研究和应用, 即偏于用概率论、随机过程的理论和方法的话, 结构可靠性估计则偏重于数理统计的理论和方法的应用。下

面分几个方面作扼要介绍。

1. 正态模型下的结构可靠性估计

当抗力 R 、应力 S 互相独立且都服从正态分布 $N(\mu_R, \sigma_R)$ 、 $N(\mu_S, \sigma_S)$ 的条件下, 对结构可靠度

$$p_r = P(R > S)$$

的统计估计的研究开始较早^[21]。根据实际结构所能提供的关于抗力和应力的信息, 对于可靠概率

$$p_r = \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$$

的估计大致可以分成以下几种情况:

(1) 已知 μ_S 、 σ_S 及 σ_R , 但 μ_R 未知, 要根据抗力 R 的一个样本 $R_1, R_2, \dots, R_n$, 对 p_r 作出点估计和区间估计;

(2) 已知 σ_S 、 σ_R , 但 μ_R 、 μ_S 未知, 要根据抗力 R 的一个样本 $R_1, R_2, \dots, R_m$ 和应力的一个样本 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 对 p_r 作出点估计和区间估计;

(3) 已知 μ_S 、 σ_S , 但 μ_R 、 σ_R 未知, 要根据抗力 R 的一个样本 $R_1, R_2, \dots, R_n$, 对 p_r 作出点估计和区间估计;

(4) μ_R 、 σ_R 、 μ_S 及 σ_S 皆未知, 要根据抗力 R 的样本 $R_1, R_2, \dots, R_m$ 及应力 S 的样本 $S_1, S_2, \dots, S_n$, 对 p_r 作出点估计和区间估计。

对于以上诸种情况, Owen、Graswell 和 Hanson^[22]、Cable^[23]、Church 和 Harris^[24]、Downton^[25]、Woodward 和 Kelley^[27]、徐福荣和周源泉^[22] 等人的文章用不同的方法建立了不同形式的估计量以及置信区间。对于 p_r 的点估计, 以情况(3)而言大致用了如下几种形式:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \hat{p}_r &= \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_R - \mu_S}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2 + \sigma_S^2}}\right), \\ \text{(ii)} \quad \hat{p}_r &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{R_i - \mu_S}{\sigma_S}\right), \\ \text{(iii)} \quad \hat{p}_r &= \Phi(\hat{\beta}), \quad \hat{\beta} = \frac{\hat{\mu}_R - \mu_S}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2 + \sigma_S^2}}, \end{aligned}$$

式中 $\hat{\mu}_R$ 是 μ_R 的点估计量, $\hat{\sigma}_R^2$ 为 σ_R^2 的点估计量。由于样本均值 $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$ 作为 μ_R 的估计量具有许多优良性质, 故 $\hat{\mu}_R$ 一般都采用 $\bar{R}$ 。但对 σ_R^2 的估计出现了许多不同的形式, 如 $\hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$, $\hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$ 及 $\hat{\sigma}_R^2 = \frac{(n-1)}{nk_n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$ 等等。在确定了点估计 $\hat{p}_r$ 形式的基础上讨论了它的优良性。

从实际应用角度出发, 人们对于 p_r 的置信下界的讨论更感兴趣, 这样就需要进一步讨论不同形式的估计量 $\hat{p}_r$ 的确切分布和渐近分布, 于是出现了各种形式的求近似解的方法。

1981 年, Singh^[21] 还讨论了 R 、 S 都是多维正态母体下的结构可靠度 p_r 的估计量以及其优良性的问题。

2. 指数分布等模型下的结构可靠性估计

除了正态母体下的“ $R > S$ ”的概率估计之外, 由于具体工程结构或机械产品结构的设计

基本变量的统计特性不同,有的文章还提出了 R 、 S 皆服从指数分布^[96]、指数型分布^{[28][80]}以及 Pareto 分布^[89]等的结构可靠概率 $p_r = P(R > S)$ 的点估计和区间估计问题。

3. 任意分布模型下的结构可靠性估计

有些文章在对 R 、 S 的分布函数作很少的假定下,讨论了 $p_r = P(R > S)$ 的点估计和区间估计问题^{[94][88]},如文章[1]、[24]等假设 R 和 S 服从任意概率分布 $F_R(x)$ 、 $F_S(x)$,而只要分布函数为连续函数。在这相当一般的情况下,获得的点估计与置信区间,其优良性或精度自然不及已知具体分布的情况。

关于结构可靠性设计与可靠度估计的更进一步的介绍以及更详细的参考文献可在本人的专题报告[34]中找到。

参 考 文 献

- [1] Birnbaum, Z. W., On a Use of the Mann-Whitney Statistic, Proc. of the Third Berkeley Symposium on Math. Sta. Vol. 1(1956).
- [2] Ржаницын, А. Р., Расчёт Сооружений с Учётом Пластических Свойств Материала, ИЭД. 2-е Госстройиздат, Москва (1954).
- [3] Julien, O. G., Synopsis of First Progress Report of Committee on Factor Safety, J. of the str. Div. ASCE, Vol. 83, No. ST4(1957).
- [4] Cornell, C. A., Structural Safety Specification Based on Second-Moment Reliability Analysis, International Association for Bridge and Structural Engineering, London, 1969.
- [5] Lind, N. C., Davenport, A. G., Towards Practical Application of Structural Reliability Theory, Ann. Convention ACI, Denver, 1971.
- [6] Rosenblueth, E., Estera, L., Reliability Basis for Some Mexican Codes, ACI. Publication Sp-31, Detroit, 1972.
- [7] Rackwitz, R., Practical Probabilistic Approach to Design, Comité Européen du Béton, Bulletin, No. 112 1976.
- [8] 林忠民, 建筑结构设计中的统计数学模型,《建筑结构安全度及荷载组合》研究课题资料, 1978.
- [9] Gumbel, E. J., Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York, 1958.
- [10] Wen, Y. K., Statistical Combination of Extreme Loads, J. of the Str. Div. ASCE, Vol. 103, No. ST5, 1977.
- [11] Wen, Y. K., Probability of Extreme Load Combination, Proc. of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, Calif., 1977.
- [12] Editorial Group of the J. C. S. S., Common Unified Rules for Different Types of Construction and Material, Vol. I (1976).
- [13] 林忠民, $R-S(t)$ 的可靠性模型, 福建师大学报(自然科学版), 2(1981).
- [14] Sentler, L., Stochastic Representation of Loads, Report TVBK-3002, Lund, Sweden, 1978.
- [15] Comité Euro-International du Béton(CEB), Common Unified Rules for Different Types of Construction and Material, Bulletin d'Information, No. 124E, Paris, 1978.
- [16] 建筑结构设计统一标准编委会, 建筑结构设计统一标准(送审稿), 北京, 1982.
- [17] Freudenthal, A. M., Reliability Analysis Based on Time to First Failure, Technical Report AFML-TR-67-149, 1967.
- [18] Freudenthal, A. M., The Expected Time to First Failure, Technical Report AFML-TR-66-37, 1966.
- [19] Cramér, H., Leadbetter, M. R., Stationary and Related Stochastic Processes, John-Wiley Sons, New York, 1967.
- [20] 林忠民, 建筑结构可靠性设计的半随机过程模型, 应用数学学报, 4 (1981).
- [21] Birnbaum, Z. W., McCarty, R. C., A Distribution-Free Upper Confidence Bound for $P(Y < Z)$, Based on Independent Sample of X and Y , Ann. Math. Sta., Vol. 29, 1958.
- [22] Owen, D. B., Graswell, K. L., Hanson, D. L., Nonparametric Upper Confidence Bounds for $P(Y < X)$ and Confidence Limits for $P(Y < X)$ When X and Y are Normal, J. Amer. Stat. Assoc. Vol. 59 (1964).
- [23] Cable, C.W., Structural Reliability with Normally Distribution and Dynamic Loads and Strength, Proc of 1967 Annual Symposium on Reliability, 1967.
- [24] Church, J. D., Harris, B., The Estimation of Reliability from Stress-Strength Relationships, Technometrics, Vol. 12(1970).

- [25] Downton, F., The Estimation of $P(Y < X)$ in the Normal Case, *Technometrics*, Vol. 15(1973).
- [26] Kelley, G. D., Kelley, J. A., Schucang, W. R., Efficient Estimation of $P(Y < X)$ in the Exponential Case, *Technometrics*, Vol. 18, No. 3(1976).
- [27] Woodward, W. A., Kelley, G. D., MVUE of $P(Y < X)$ in the Normal Case, *Technometrics*, Vol. 19, No. 1 (1977).
- [28] Tong, H., On the Estimation of $P(Y < X)$ for Exponential Families, *IEEE, Trans. on Relia.* Vol. R-26, (1977).
- [29] Beg, M. A., Singh, N., Estimation of $P(Y < X)$ for the Pareto Distribution, *IEEE, Trans. on Relia.* Vol. R-28(1979).
- [30] Beg, M. A., Estimation of $P(Y < X)$ for Exponential-Family, *IEEE, Trans. on Relia.* Vol. R-29, No. 2 (1980).
- [31] Singh, N., MVUE of $P(Y < X)$ for Multivariate Normal Populations, An Application to Stree-Strength Moduls, *IEEE, Trans. on Relia.* Vol. R-30, No. 2(1981)
- [32] 徐福荣,周源泉,正态模型可靠性的贝叶斯下界的数值解,福建师大学报(自然科学版), 1 (1982).
- [33] Ury, H. K., On Distribution-Free Confidence Bounds for $P(Y < X)$, *Technometrics*, Vol. 14, No. 3(1972).
- [34] 林忠民,结构可靠性理论的发展和应用,全国可靠性数学第一届学术年会专题综合报告, 1982.

中国数学会运筹学会 通 知

中国数学会运筹学会第二次代表大会暨学术交流会, 定于1984年5月8日至14日在上海科学技术大学召开. 会议已开始征集论文, 欢迎广大运筹学工作者提供学术研究成果与应用成果. 稿件请寄会议学术组, 学术组设在北京友谊宾馆19单元中国科学院应用数学研究所运筹学研究室.

图的带宽问题的 Harper 方法

林 诒 勋

(郑州大学数学系)

本文讨论特殊图的带宽问题。在这方面, Harper 定理^[1]是具有开创性的。随后的研究又有所发展, 以至形成一种普遍的研究方法。

§ 1. Harper 定理的推广

给定一个无向图 $G=(V, E)$, 其中 $|V|=n$. 任意一个双射 $f:V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 都称为一个“标号”. 对标号 f , 所有边两端的最大标号差

$$B(G, f) \triangleq \max_{(x, y) \in E} |f(x) - f(y)|$$

称为图 G 在标号 f 下(或标定图 G_f)的带宽; 而

$$B(G) \triangleq \min_f B(G, f)$$

则称为图 G 的带宽. 对任意子集 $S \subseteq V(G)$, $\bar{S} = V \setminus S$, 我们称

$$\partial S \triangleq \{u \in S \mid \exists v \in \bar{S}, \text{ 使 } (u, v) \in E(G)\}$$

为 S 的内边界; 并称

$$N(S) \triangleq \{u \in \bar{S} \mid \exists v \in S, \text{ 使 } (u, v) \in E(G)\}$$

为 S 的外边界(即 S 的邻集). 此外, 今后在整数集 Z 中采用区间记号, 如

$$[a, b] = \{x \in Z \mid a \leq x \leq b\}.$$

有了上述的定义和记号, 即可叙述

定理 1(Harper^[1])

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq n} \min_{|S|=k} |\partial S|.$$

这是一个对偶形式的结果(即 $\min \max |f(x) - f(y)|$ 与 $\max \min |\partial S|$ 对偶). 正如其它最优化问题一样, 用一个“对偶问题”来估计下界往往是十分有效的. 由内外边界的类似性, 我们有

定理 1'

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq n} \min_{|S|=k} |N(S)|.$$

其实, 不等式中的基数 $|S|$ 是可以用更一般的集函数代替的. 我们引进

定义 若 $\varphi(S)$ ($S \subseteq V(G)$) 是满足下列条件的整值集函数:

(i)

$$\varphi(\emptyset) = 0;$$

(ii)

$$\varphi(S) \leq \varphi(S \cup \{x\}) \leq \varphi(S) + 1 \quad (\text{单调性}),$$

则称之为广义权函数.(注意: 它是非负的, 但不一定可加; 而一般的权函数或测度是可加的)

以 $\varphi(S)$ 代替定理 1 中的 $|S|$, 便得 Harper 定理的推广:

定理 2 设 $\varphi(S)$ 为任一广义权函数, 则

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq \varphi(V)} \min_{\varphi(S)=k} |\partial S|. \quad (1)$$

证明 对任意标号 f , 由 φ 的单调性, 序列 $a_i = \varphi[f^{-1}([1, i])] (i=1, 2, \dots, n)$ 单调递增, 且充满区间 $[a_1, a_n]$. 因此, 对任意 $k \in [1, \varphi(V)]$, 总存在 $i_k = \min\{i | a_i = k\}$; 于是令 $S_k = f^{-1}([1, i_k])$, 则有 $\varphi(S_k) = a_{i_k} = k$.

对给定的 k 及 S_k , 我们取 $u^* \in \partial S_k$, 使

$$f(u^*) = \min\{f(x) | x \in \partial S_k\} \leq i_k - |\partial S_k| + 1,$$

并设 $v^* \in N(S_k)$ 与 u^* 相邻, 那末 $f(v^*) \geq i_k + 1$. 这样一来, 对任意 $k \in [1, \varphi(V)]$, 有

$$B(G) \geq B(G, f) \geq f(v^*) - f(u^*) \geq |\partial S_k| \geq \min_{\varphi(S)=k} |\partial S|,$$

由 k 的任意性即知不等式(1)成立.

注 $\varphi(S)$ 不一定是严格单调的, 为得到更好的下界估计, 可将定理 2 改述为

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq \varphi(V)} \min_{\varphi(S)=k}^* |\partial S|, \quad (1)^*$$

其中

$$\min_{\varphi(S)=k}^*(\cdot) \triangleq \min_{S \in \mathcal{S}_k}(\cdot),$$

$$\mathcal{S}_k \triangleq \{S | \varphi(S) = k; \exists x \in S, \text{ 使 } \varphi(S \setminus \{x\}) < k\},$$

即不必对所有 $\varphi(S) = k$ 的 S 取最小值, 而只要对其中具有某种极小性的 S 取最小值即可. 事实上, 在定理 2 的证明中, 由 i_k 的最小性可知 $S_k \in \mathcal{S}_k$, 从而有此结论.

与定理 2 相对称的, 又有

$$\text{定理 2'} \quad B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq \varphi(V)} \min_{\varphi(S)=k}^* |N(S)| \quad (2)$$

证明 取 S_k 如定理 2, 然后令

$$f(u^*) = \max\{f(x) | x \in N(S_k)\} \geq i_k + |N(S_k)|$$

并设 $v^* \in \partial S_k$ 与 $u^* \in N(S_k)$ 相邻, 则 $f(v^*) \leq i_k$. 于是对任意的 k , 有

$$B(G) \geq B(G, f) \geq f(u^*) - f(v^*) \geq |N(S_k)| \geq \min_{\varphi(S)=k}^* |N(S)|.$$

故得欲证.

假如除 φ 之外, 还有另一广义权函数 ψ , 并记

$$a_{ij} = \min_{\substack{\varphi(S)=i \\ \psi(S)=j}} |\partial S|, \quad b_{ij} = \min_{\substack{\varphi(S)=i \\ \psi(S)=j}} |N(S)|,$$

则定理 2 及 2' 可改述为:

$$\text{定理 3} \quad B(G) \geq \max_{1 \leq i \leq \varphi(V)} \min_{1 \leq j \leq \psi(V)} a_{ij},$$

$$B(G) \geq \max_{1 \leq i \leq \varphi(V)} \min_{1 \leq j \leq \psi(V)} b_{ij}.$$

即下界是矩阵 (a_{ij}) 或 (b_{ij}) 的鞍点.

§ 2. 带宽下界的组合

为改善下界估计, 人们惯于把若干个不等式结合起来, 以便求得尽可能大的下界. 例如把定理 2 和 2' 结合起来, 得到

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq \varphi(V)} \min_{\varphi(S)=k} \max\{|\partial S|, |N(S)|\},$$

这种结合方式可称为“并列式的”。另一种更深刻的形式是“嵌套式的组合”。其想法在一些文献中被不同程度地运用过(麦结华、罗海鹏在[8]中表达的比较明确)。现在,我们给出 Harper 类型下界作两层嵌套组合的一般形式。其基本思想是:在一个 Harper 类型估计(对全集 V 而言)中,对每个固定的子集 S ,再一次使用 Harper 类型的估计。

定理 4 设 φ, μ 为任意两个广义权函数,则

$$B(G) \geq \max_{1 \leq k \leq \varphi(V)} \min_{\varphi(S)=k}^* \max\{|N(S)|, \alpha(S), \beta(S)\}, \quad (3)$$

其中

$$\alpha(S) = \max_{1 \leq i \leq \mu(S)} \min_{\substack{\mu(T)=i \\ T \subseteq S}}^* |N(T)|,$$

$$\beta(S) = \max_{\mu(S) \leq j \leq \mu(V)} \min_{\substack{\mu(T)=j \\ T \supseteq S}}^* |N(T)|.$$

将上列诸式中的 $N(\cdot)$ 换成 $\partial(\cdot)$ (或将两种下界全部列入),定理依然成立。

证明 对任意 $k \in [1, \varphi(V)]$, 按定理 2 证明,取 $S_k \subseteq V$, 已知有

$$B(G) \geq |N(S_k)|. \quad (a)$$

另一方面,对每个 $i \in [1, \mu(S_k)]$, 由 μ 的单调性,必存在 $r_i = \min\{r | \mu[f^{-1}([1, k])] = i\}$; 令 $T_i = f^{-1}([1, r_i]) \subseteq S_k$, 则有 $\mu(T_i) = i$. 仿定理 2' 证明,得

$$B(G) \geq |N(T_i)| \geq \min_{\substack{\mu(T)=i \\ T \subseteq S_k}}^* |N(T)|,$$

$$\text{从而} \quad B(G) \geq \max_{1 \leq i \leq \mu(S_k)} \min_{\substack{\mu(T)=i \\ T \subseteq S_k}}^* |N(T)| = \alpha(S_k). \quad (b)$$

类似地,对每个 $j \in [\mu(S_k), \mu(V)]$, 由 μ 的单调性,必存在 $r_j = \min\{r | \mu[f^{-1}([1, r])] = j\}$; 令 $T_j = f^{-1}([1, r_j]) \supseteq S_k$, 则有 $\mu(T_j) = j$. 由此可证

$$B(G) \geq |N(T_j)| \geq \min_{\substack{\mu(T)=j \\ T \supseteq S_k}}^* |N(T)|,$$

$$\text{从而} \quad B(G) \geq \beta(S_k). \quad (c)$$

综合不等式(a)(b)(c),即得

$$\begin{aligned} B(G) &\geq \max\{|N(S_k)|, \alpha(S_k), \beta(S_k)\} \\ &\geq \min_{\varphi(S)=k}^* \max\{|N(S)|, \alpha(S), \beta(S)\}, \end{aligned}$$

由 k 的任意性即得欲证。

按照不同问题的需要,形形色色的下界还可能以其它的方式结合起来。

§3. 特殊图带宽的例子

前面两节论述了带宽研究的一种重要方法(包括推广的 Harper 定理及其组合),即 Harper 方法。下面举几个例子,说明它的应用效果(特别要指出的是,当前的方法可以避免“位移”概念及其它技巧^[1,2,4],使论证显著简化)。这些例子是迄今在特殊图带宽研究方面具有代表性的工作,但它们是可以用统一方法处理的。

例 1

$$B(P_m \times P_n) = \min\{m, n\}^{[3]}.$$

我们将图 $P_m \times P_n$ 的所有顶点列成一个 $m \times n$ 的表(矩阵);每一行代表一条路 P_n ,每一

列代表一条路 P_m (相邻两格有边相连); 格中可以填入顶点的标号 (如表 1). 表的第 i 行记为 $R_i (i=1, \dots, m)$, 第 j 列记为 $Q_j (j=1, \dots, n)$; 并不妨设 $m \leq n$. 对任意子集 $S \subseteq V$, 定义

$$\varphi(S) = |\{Q_j | Q_j \cap S \neq \emptyset\}|, \quad (4)$$

$$\psi(S) = |\{R_i | R_i \cap S \neq \emptyset\}|, \quad (5)$$

分别表示含 S -元素的列数和行数. 显然, 它们都是广义权函数, 且当 $S \neq \emptyset$ 时, $1 \leq \varphi(S) \leq n$, $1 \leq \psi(S) \leq m$.

表 1 ($m \leq n$)

1	$m+1$	...	$(n-1)m+1$
2	$m+2$	...	$(n-1)m+2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	$2m$	...	nm

考察 $\varphi(S) = m-1 (< n)$ 的集合 S , 并估计其外边界 $N(S)$. 若 $\psi(S) = m$, 则每一行都至少有一个外边界点 ($\because |R_i \cap S| \leq \varphi(S) < n$), 因而 $|N(S)| \geq m$. 若 $\psi(S) < m$, 则在 $Q_j \cap S \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个列及与之相邻的某个列上, 都至少有一个外边界点, 因而 $|N(S)| \geq m$. 无论哪种情况, 由定理 2' 得知

$$B(P_m \times P_n) \geq \min_{\varphi(S)=m-1} |N(S)| \geq m = \min\{m, n\}.$$

而表 1 所列的标号达到此下界, 故 $B(P_m \times P_n) = \min\{m, n\}$.

例 2

$$B(P_m \times C_n) = \min\{2m, n\} (n \geq 3)^{[3]}.$$

如前, 将图 $P_m \times C_n$ 的所有顶点列成一张 $m \times n$ 的表, 其中每一行代表一个圈 C_n , 每一列代表一条路 P_m (如表 2, 表 3). 注意: 这里每一行是首尾相接的. 此外, $R_i, Q_j, \varphi(S)$ 及 $\psi(S)$ 的意义均同前例. 下面分两种情况来讨论带宽的下界.

表 2 ($2m \leq n$)

...	$2m+1$	1	$m+1$	$3m+1$	...
...	$2m+2$	2	$m+2$	$3m+2$	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
...	$3m$	m	$2m$	$4m$	...

表 3 ($2m > n$)

1	2	...	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	...	mn

1. 当 $2m \leq n$ 时, 考察 $\varphi(S) = 2m-2 (< n-2)$ 的集合 S . 若 $\psi(S) = m$, 则每一行 R_i 都至少有两个外边界点 ($\because |R_i \cap S| \leq \varphi(S) < n-2$), 因而 $|N(S)| \geq 2m$. 若 $\psi(S) < m$, 则在

$Q_i \cap S \neq \emptyset$ 的 $2m-2$ 个列上, 每一列都至少有一个外边界点 ($\because |Q_i \cap S| \leq \psi(S) < m$); 而在与这些列相邻的两个列上又必有 $N(S)$ 的点, 因此 $|N(S)| \geq (2m-2) + 2 = 2m$. 由定理 2', 得

$$B(P_m \times C_n) \geq \min_{\varphi(S)=2m-2} |N(S)| \geq 2m.$$

2. 当 $2m > n$ 时, 考察 $\psi(S) = m-1$ 的集合 S . 若 $\psi(S) \geq n-1$, 则每一列都有 $N(S)$ 的点, 因而 $|N(S)| \geq n$. 若 $\varphi(S) \leq n-2$, 则在 $|R_i \cap S| \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个行上, 每一行都至少有两个 $N(S)$ 的点; 剩下一行上也必有外边界点, 故 $|N(S)| \geq 2(m-1) + 1 = 2m-1 \geq n$. 对 ψ 运用定理 2', 得

$$B(P_m \times C_n) \geq \min_{\psi(S)=m-1} |N(S)| \geq n.$$

综合以上两种情况, 得到带宽下界估计

$$B(P_m \times C_n) \geq \min\{2m, n\}.$$

而表 2 和表 3 的两种标号法分别达到此下界, 故 $B(P_m \times C_n) = \min\{2m, n\}$.

例 3 $B(C_m \times C_n) = 2\min\{m, n\} - \delta_{mn} \quad (m, n \geq 3)^{[4]}$.

我们仍用一张 $m \times n$ 的表来记录图 $C_m \times C_n$ 的顶点, 其中每一行 (R_i) 代表一个圈 C_n , 每一列 (Q_j) 代表一个圈 C_m (除相邻两格有边相连外, 每行每列都是首尾相接的). 权函数 φ, ψ 的定义同例 1 的 (4) (5) 两式. 下面分两种情况讨论.

1. 当 $m < n$ 时, 考察 $\varphi(S) = m-1$ ($\leq n-2$) 的集合 S . 对 $\psi(S)$ 的不同值, 分别估计 $|N(S)|$:

(1) 若 $\psi(S) = m$, 则每一行都至少有两个外边界点 ($\because |R_i \cap S| \leq n-2$), 因而 $|N(S)| \geq 2m$.

(2) 若 $\psi(S) \leq m-2$, 则在 $Q_j \cap S \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个列上, 每一列都至少有两个外边界点 ($\because |Q_j \cap S| \leq m-2$); 与这些列相邻的另外两个列上又必有 $N(S)$ 的点, 因此

$$|N(S)| \geq 2(m-1) + 2 = 2m.$$

(3) 若 $\psi(S) = \varphi(S) = m-1$, 则在 $R_i \cap S \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个行上, 每一行都至少有两个外边界点; 而在剩下的一个行上又有 $N(S)$ 的点, 所以 $|N(S)| \geq 2(m-1) + 1 = 2m-1$. 如果 $|N(S)| \geq 2m$, 则与前两种情况 (1) (2) 相同; 唯独在 $|N(S)| = 2m-1$ 时需要另作讨论.

由上面的分析可知, $|N(S)| = 2m-1$ 的情形是这样的: 在 $R_i \cap S \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个行上, 每行恰有两个外边界点, 而在 $R_i \cap S = \emptyset$ 的一个行上恰有一个外边界点. 从列上来计算, 在 $Q_j \cap S \neq \emptyset$ 的 $m-1$ 个列上, 除一列恰有一个外边界点之外, 其余的列都恰有两个外边界点; 另外, 只能有两个列与这些列相邻, 且每列上恰有一个外边界点. 可以证明: 满足此性质的子集 S (换言之, 使 $|N(S)|$ 达到最小值 $2m-1$ 的极图 S) 只能是形如图 1 的形式. 事实上, 不妨设 $R_1 \cap S = \emptyset$, 并假定第一行唯一地有 $(1, r) \in N(S)$. 那末在第二行上必定只有 $(2, r) \in S$; 从而 $(2, r-1)$ 与 $(2, r+1) \in N(S)$. 同理, 在第 m 行上只有 $(m, r) \in S$; $(m, r \pm 1) \in N(S)$. 如此类推, 只要注意到每行每列上外边界点的确定数目, 即知子集 S 只能是图 1 的形式 (且 $m-1$ 为奇数). 对于这样的子集 S , 不难验证: 对任意 $x \in \bar{S}$, $T = S \cup \{x\}$ 均有

$$|N(T)| \geq |N(S)| + 1 = 2m.$$

按定理 4 的记号, 其中取 $\mu(T) = |T|$, 便有