电力工业可靠性管理培训教材

电力系统可靠性数学基础

中国电机工程学会可靠性专委会
水电部办公厅政策研究室　出版
浙江省电力工业局　印刷
1984年3月第一稿

编写说明

为了对在职干部进行关于电力工业可靠性管理基础知识的培训，中国电机工程学会与水电部政策研究室决定组织编写统一培训教材，以供各地举办各种学习班之用。

经讨论这套教材包括：讲授教材"电力工业可靠性概论"和"电力工业可靠性数学基础"，以及参考材料"电力工业可靠性管理"译文集等。

这套教材可供10天和30天左右两种培训时间使用。10天左右的时间适合对各级领导干部普及电力工业可靠性管理的初步知识，要求介绍内容的面宽广一些，只需讲授"电力工业可靠性概论"即可，约40个学时。30天左右的时间，适合于技术领导和从事此项工作的工程技术人员进行培训，讲授"电力工业可靠性概论"（40学时）和"电力工业可靠性数学基础"（60小时）。此外还有一定数量的习题。

"电力工业可靠性管理"译文集，主要搜集国外在电力工业各方面实际施行的一些可靠性管理措施，可作为培训的主要参考教材。每篇文章皆有简短提要，以供没有充裕时间的同志浏览。

参加本教材执笔编写的有孙忠宏、杨蔚昌、郭永基、陈凯、白同朔、程侃、袁仲铭、费树群、胡修谱等同志。参加编写内容讨论并整理资料的有戴树森、刘王焜、刘景熙、康林伟、孙荔轩、陈维栋、梁建钦、胡伟裔、卢芬江、范荣礼、杨维藩、孙兹初、唐曜中、赵明卿、张继篱等同志。全部教材由费树群、胡修谱同志校订，由沈根才、董希文同志最后审定。

随着电力工业可靠性管理工作的不断深入，培训教材的内容自应不断修订和补充。限于水平，教材中不妥之处，希各地试讲后提出改进意见，以便补充和修改。

中国电机工程学会可靠性专委会
水电部政策研究室
1984.3.

目录

第一章 随机事件与概率 1
第一节 随机事件 1
一 随机现象 1
二 随机试验 1
三 基本事件、样本空间 2
四 随机事件、必然事件、不可能事件 3
第二节 事件之间的关系与运算 5
一 事件的包含与相等 5
二 事件之间的两种运算——和与积 6
三 事件之间的其他关系 8
第三节 概率的定义 12
一 概率的古典定义 12
二 概率的统计定义 16
三 概率的基本性质 18
第四节 概率计算 19
一 加法定理 19
二 乘法定理 23
三 全概率公式和贝叶斯公式 32
习题 37

第二章 随机变量及其分布 41
第一节 基本概念 41
一 随机变量 41
二 随机变量的分布 43
第二节 随机变量的分布函数 44
一 随机变量分布函数的引进 44
二 分布函数的基本性质 48

三	离散型随机变量及其分布	49
四	连续型随机变量	49
第三节	常用分布	54
一	常用离散型分布	54
(一)	(0－1)分布	
(二)	二项分布	
(三)	泊松分布	
二	常用连续型分布	61
(一)	均匀分布	
(二)	指数分布和可靠性问题中的几个基本概念	
(三)	正态分布	
(四)	威布尔分布	
习题		83
第三章	随机变量的数字特征	87
第一节	数学期望	87
一	数学期望的实际意义	87
二	数学期望的定义	88
三	常用分布的数学期望	89
四	数学期望的性质	92
五	随机变量函数的数学期望公式	93
第二节	方差	94
一	随机变量的方差的实际意义	94
二	方差的定义	94
三	方差的性质	96
四	常用分布的方差	97
五	矩	99
第三节	大数定律和中心极限定律简介	100
一	母体和子样	100

二　大数定律　101
三　中心极限定律　104
习题　108

第四章　实用统计方法　110
第一节　数据整理及对母体分布的估计　110
一　数据整理　111
二　画直方图　113
第二节　用概率纸判断母体分布　114
一　正态概率坐标纸检验法　114
二　检验指数分布的单对数坐标纸检验法　117
三　检验母体是否服从威布尔分布的威布尔纸检验法　121

第五章　估计问题　130
第一节　母体参数的点估计　130
一　求参数点估计的方法　130
二　参数点估计的好坏标准　134
第二节　母体参数的区间估计　138
一　基本概念　138
二　两个重要分布
三　母体数学期望的区间估计　143
四　母体方差的区间估计　145
第三节　指数型寿命截尾试验和平均寿命估计　147
一　截尾寿命试验和平均寿命的点估计　147
二　平均寿命的区间估计　149

第四节　母体分布假设检验　152
一　柯尔莫哥洛夫检验法　152
二　小子样K检验法　154
三　正态分布和指数分布的特殊检验法　154
第五节　可修复系统故障数据分析　157
一　两类失效数据的差异　157
二　可修复系统故障数据分析方法和步骤　159
三　检验相邻故障间隔 $x_1, \cdots, x_n$ 是否来自指数总体　160
四　随机过程模型　162
五　例　163
第六节　随机向量及其分布　166
一　二维随机向量的分布　166
(一)　随机向量的分布函数
(二)　离散型随机向量
(三)　连续型随机向量
二　随机变量的相互独立性　173
(一)　概念及定义
(二)　离散型随机变量的相互独立性
(三)　连续型随机变量的相互独立性
三　随机变量函数的分布　177
(一)　离散型随机向量的函数的分布
(二)　连续型随机向量的函数的分布
习题　181

第六章　网络分析法　187
第一节　基本概念　188
一　路与最小路　188
二　割与最小割　188
三　系统正常（或失效）的表示　189

四　求系统可靠度的步骤　189
第二节　直接法　189
一　穷举法　190
二　概率图法　191
第三节　化简网络的方法　193
第四节　求所有最小路的方法　195
第五节　求可靠度的方法　197
一　理论公式
二　集合不交化方法
三　最小路与最小割的互化
第六节　推广　200
一　节点不可靠时的处理
二　推广到可修网络的情形

第七章　故障树分析和故障模式、影响和危险度分析法　205
第一节　故障树分析　205
一　何谓故障树　205
二　顶端事件的选取　206
三　故障树的建立　206
四　故障树的评定　209
五　FTA的利弊　212
第二节　故障模式、影响和危险度分析法　213
一　FMECA法的实施步骤　213
二　失效因子评定表　215
三　例　217

第八章　马尔柯夫过程　221
第一节　随机过程的概念　221
第二节　马尔柯夫过程　223
第三节　应用马尔柯夫过程求可修复元件状态概率的一般方法　231

第四节　状态频率和持续时间法　241
第五节　吸收状态及首次故障的平均时间及 $R_s(t)$　247
第六节　状态的合并　252
第七节　故障效应分析　259
习　题　266

附　表

表　1　正态分布表
表　2　正态分布的双侧分位数（u_α）表
表　3　χ^2 分布表
表　4　χ^2 分布的上侧分位数（χ^2_α）表
表　5　t 分布表
表　6　t 分布的双侧分位表（t_α）表
表　7　F 检验的临界值（F_α）表
表　8　泊松（Poisson）分布表
表　9　柯尔莫哥洛夫（Колмогоров）检验的临界值（$D_{n\alpha}$）表
表　10　D_n 的极限分布表
表　11　$\Gamma(1+\frac{1}{m})$ 数值表
表　12　$\chi^2(F)$ 分布的下侧分位点 $\chi^2_2(f)$ 表
表　13　Lillefors（67 年）正态拟合 $\hat{D}_n$ 的临界值
表　14　S_n^* 的临界值

第一章 随机事件与概率

第一节 随机事件

一、随机现象

在自然界，生产实践和科学实验中，人们观察到的现象可以分为两类。

1、必然现象　在一定条件下必然发生某一结果的现象，叫必然现象。例如，在标准大气压下，纯水加热到100°C必然沸腾，把10伏直流电压加到2欧姆的电阻的两端，必然会产生 I＝10÷2＝5安培的电流；圆的面积必然等于它的半径的平方乘以 π 等々，都是必然现象。

2、随机现象　在一定条件下可能发生种々不同结果的现象，叫随机现象，通常也叫偶然现象。例如，北京明年9月5日的天气可能晴，可能阴，也可能有雨；同一射手，几次打靶的成绩，可能不同；某电厂的一号发电机，在正常运行条件下，在未来的某日，可能发生故障，也可能不发生故障等々，都是随机现象。

革命导师恩格斯说过："在表面上是偶然性在起作用的地方这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"（见《马克思恩格斯选集》第四卷，第243页，1972年版）。概率统计理论，就是研究随机（偶然）现象的规律性的一门学科。它的任务在于从大量看起来错综复杂的偶然现象中找出事物的内在客观规律。我们将通过随机实验来研究随机现象。

二、随机试验　为了方便起见，我们把各种科学实验和对某一事物的观察统称为试验。

若一试验具有以下特点：

I、可以在相同条件下重复进行；

Ⅱ、每次试验的可能结果不只一个，并且由事先明确试验的所有可能的结果；

Ⅲ，进行一次试验之前不能断定会发生那一个结果。就称这种试验为随机试验，我们用 E、E_1、E_2 ……等々来表示随机试验。以后，我们把随机试验简称为试验。

例如，下列各试验就都是随机试验：

E_1：掷一颗骰子，观察出现的点数。

E_2：同时掷两枚硬币，观察出现正反面的情况。

E_3：记录某段 220 KV 高压输电线上在七、八两个月的落雷次数。

E_4：记录某电厂一昼夜的最高负荷量 P_m。

E_5：观察某台设备在下星期一是否发生故障。

E_6：观察某灯泡厂生产的某种型号的灯泡的寿命。

三、基本事件 、样本空间

（一）基本事件

进行试验的目的在于研究试验结果出现的规律性

一个试验，每次试验一般有若干个可能的结果。例如，试验 E_1 可能出现“1点”、“2点”、“3点”、“4点”、“5点”、“6点”六种结果；试验 E_2 可能出现“正、正”、“正、反”、“反、正”、“反反”四种结果。

基本事件　在试验中，出现的每一个确定的在一定的条件下，不能再分解的结果现称为该试验的一个基本事件。

例如，在试验 E_1 中，“出现1点”是一个基本事件，记作{1}，类似地，{2}表示“出现2点”，{3}表示“出现3点”，……{6}表示“出现6点”，共六个基本事件；在试验 E_2 中，“两枚硬币均出现正面”是一个基本事件，记作{（正、正）}，类似地{（正、反）}、{（反、正）}和{（反、反）}分别表示基本事件“第一枚硬币出现正面，第二枚硬币出现反面”、“第一枚硬币出现反面，第二枚硬币出现正面”和“两枚硬币均出现反面”，共四个基本事件；在 E_5 中，“设备在下星期一工作正常”和“设备在下星期一发生故障”都是基本事件，共两个基本事件。以后我们用 e 或 e_1、

e_2、e_3……等々表示基本事件。

在一次试验中，一个基本事件所对应的试验结果出现了，就称该基本事件在这一次试验中发生了。例如，对于 E_1 若掷得3点，就称基本事件 {3} 在这一次试验中发生了。

（二）样本空间　我们把一个试验的所有可能的在一定条件下不能再分的试验结果放在一起，称为该试验的样本空间，记作 U。

例如，对于 E_1，$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

对于 E_2，U＝{（正,正）、（正,反）、（反,正）、（反,反）}

对于 E_3，$U=\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

对于 E_4，$U=\{x;\ 0<x\leq P_m\}$

（P_m 为该电厂的最大发电量）

对于 E_5，U＝{正常、故障}

对于 E_6，$U=\{\tau;\ \tau\geq 0\}$

在研究具体试验时，重要的是要弄清它的基本事件是什么，样本空间是怎样构成的。

四、随机事件　必然事件　不可能事件

（一）随机事件

随机事件　在一次试验中可能发生也可能不发生的事情，称为该试验的随机事件，简称事件，以后用记号A、B、C、……表示。

例如，在试验 E_1 中，“出现奇数点”就是一个事件，记作 {1, 3, 5}；在 E_2 中，“两枚硬币一正一反”就是一个事件，记作 {（正、反），（反、正）}；在 E_3 中，“若雷次数不超过10次”就是一个事件，记作 {0, 1, 2, 3, ……10}。

由此可见，一个事件是由该试验的若干个试验结果构成的。在一次试验中，一事件所包含的任意一个确定的试验结果出现了，就称该事件在这一试验中发生了。例如对于 E_1，无论掷

得1点、3点还是5点，都称事件 $A=\{1, 3, 5\}$ 在一次试验中发生了。

基本事件也是随机事件，是最简单的随机事件，是在一定范围内不能再分解的事件。

(二) 必然事件　在每次试验中必然发生的事件，称为必然事件。

例如，在 E_1 中，"出现的点数不超过6"，即 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，就是必然事件；在 E_3 中，"落雷次数大于等于0"，即 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$，就是必然事件。

实际上，每一个试验的样本空间所表示的事件都是必然事件，故必然事件也记作 U。

(三) 不可能事件　在任何一次试验中都不发生的事件，称为不可能事件，记作 V。

例如，在 E_1 中，"出现8点"，就是不可能事件。在 E_3 中，"落雷次数小于0"，就是不可能事件。

可见，不可能事件是不包含任何一个试验结果的事件。

一般地，我们把必然事件和不可能事件也称为随机事件，它们是随机事件的两个极端情况。

例　给出下列事件的表示式

(1) 在 E_1 中，A_1 表示"出现的点数大于4"，A_2 表示"出现的点数不小于3"。

(2) 任取某种型号的电容器进行寿命试验，B_1 表示"取到的电容器的寿命大于等于1000小时，小于2000小时"；B_2 表示"取到的电容器的寿命大于 t_0 小时。"

解：(1) $A_1=\{5, 6\}$；　$A_2=\{3, 4, 5, 6\}$

(2) $B_1=\{\tau; 1000\leq\tau<2000\}$；$B_2=\{\tau, t_0<\tau\}$

在下面的讨论中，我们恒假定 U 为试验 E 的样本空间，A，B，C，A_i $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ 为它的事件。

第二节　事件之间的关系与运算

为了掌握概率的运算规律，首先介绍事件之间的关系和运算规律。

一、事件的包含与相等

(一) 事件 B 包含事件 A，设有 A 和 B 两个事件，若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或事件 A 包含在事件 B 中，记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B$$

例如，有两个元件，A 表示"第二个元件完好"，B 表示"两个元件至少一个完好"，则有 $A \subset B$。

今后常用几何图形表示事件之间的关系和运算。这种几何图形的含义是："随机点落在方框内"表示必然事件 U；"随机点落在圆 A 内"表示事件 A；"随机点落在圆 B 内"表示事件 B；圆 A 和圆 B 都画在同一方框内表示它们是同一试验的事件，因为只有它们是同一随机试验的事件时讨论它们之间的关系和运算才有意义。

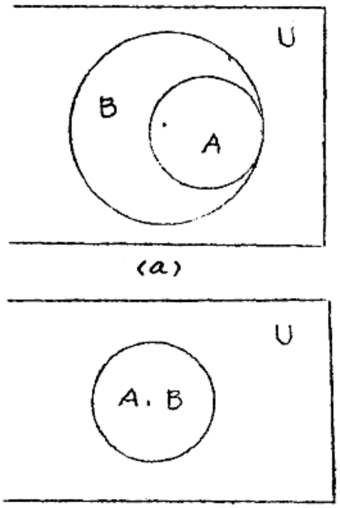
$A \subset B$ 的几何表示，如图 1－1 (a)。

$A \subset B$ 表示随机点落在圆 A 内时必落在圆 B 内，即圆 A 包含在圆 B 内。

(二) 事件 A 与 B 相等，若事件 A 包含 B，同时事件 B 包含 A，即 $A \supset B$ 而且 $B \supset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作

$$A = B$$

$A = B$ 的几何表示，如图 1－1 (b)。$A = B$ 表示圆 A 和圆 B 重合，随机点落在圆 A 内必落在圆 B 内，反之亦然，



(a)

(b)

图 1－1

即A、B为同一事件的两种表示方法。

例如，在 E_1 中，A表示"出现的点数不小于2同时不大于3"，B表示"出现2点或3点"，则有

$$A=B=\{2,3\}$$

二、事件间的两种运算——和与积

(一) 事件A与B之和 "事件A、B中至少有一个发生"也是一个事件，称此事件为事件A与B之和，记作 $A+B$。

事件A与B之和的几何表示如图1－2。

事件 $A+B$ 表示随机点或落入圆A内或圆B内，因此，$A+B$ 也是事件，"或A发生，或B发生"。

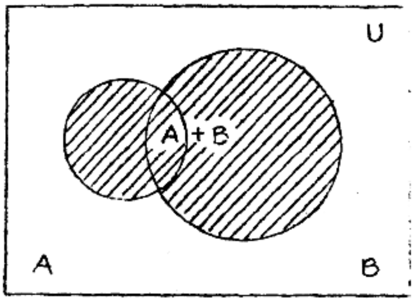


图1－2

例1 有一个由两个元件（如发电机、变压器、断路器、输电线等）串联构成的电路S，如图1－3所示，设A表示"元件1故障"，B表示"元件2故障"，C表示"系统（即电路）S故障"，则

$$C=A+B$$

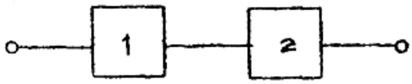


图1－3

推广：事件"A_1，A_2，……，A_n 中至少有一发生"称为 A_1，A_2，……，A_n 的和，记作

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

注意：两个事件之和与两个数之和虽然名词相同，记号一样，但是意义不同，故有的书上把 $A+B$ 记作 $A\cup B$，并称其为事件A与B的"并"。

由定义可以证明，也可以用几何图形说明事件的和有下列

运算规律：

i）满足交换律 $A+B=B+A$ (1.2.1)

ii）满足结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$ (1.2.2)

iii） $A+A=A$ (1.2.3)

iv）与U满足 $A+U=U$ (1.2.4)

v）与V满足 $A+V=A$ (1.2.5)

（二）事件A与B之积"＝事件A、B同时发生"也是一个事件，称此事件为事件A与B之积，记作AB。

事件A与B之积的几何表示如图1－4。

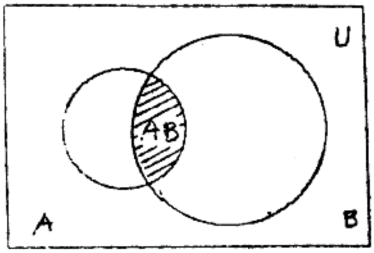


图1－4

事件AB表示随机点落在圆A与圆B的公共部分。因此，AB也是事件："A发生而且B发生。"

例2 一个系统如图1－5所示，它由两个元件"1"、"2"并联而成。

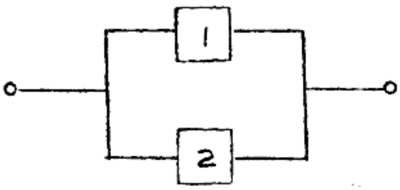


图1－5

设：

A —— 元件1故障

B —— 元件2故障

C —— 系统故障

若只有元件"1"和"2"同时故障时才称系统故障，则有

$$C=AB$$

推广：事件"A_1，A_2，……，A_n同时发生"称为A_1，A_2，……A_n之积，记作

$$A_1A_2\cdots\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i$$

为了避免名词和记号上的混淆，有的书上把 AB 记作：$A\cap B$，並称其为事件 A 与 B 的"交"。

可以証明事件的积有下列运算规律：

ⅰ）满足交换律	$AB=BA$	（1、2、6）
ⅱ）满足结合律	$A(BC)=(AB)C$	（1、2、7）
ⅲ）满足分配律	$A(B+C)=AB+AC$	（1、2、8）
	$(A+B)(A+C)=A+BC$*	（1、2、9）
ⅳ）满足幂等律	$AA=A$	（1、2、10）
ⅴ）满足吸收律	$A(A+B)=A$	（1、2、11）
	$A+AB=A$**	（1、2、12）
ⅵ）与 U 满足	$AU=A$	（1、2、13）
ⅶ）与 V 满足	$AV=V$	（1、2、14）

三、事件间的其他关系

（一）互不相容事件　若事件 A 与 B 不可能同时发生，则称 A 与 B 是互不相容的事件。此时必有 $AB=V$。

事件 A 与 B 互不相容的几何表示如图1－6。事件 A 与 B 互不相容，表示圆 A 和圆 B 没有公共点，随机点同时落入 A、B 两个圆内是不可能的。

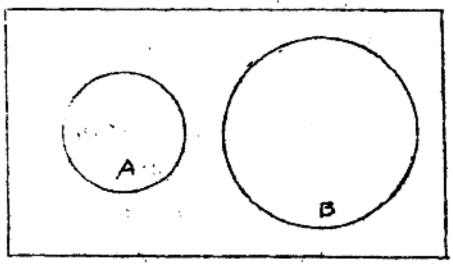


图 1－6

例如，掷一颗骰子，"出现1点"和"出现2点"是互不相容事件；进行一项操作，成功与失败也是互不相容事件。

---

*（1、2、9）一般称为加法分配律。

**（1、2、12）一般称为加法吸收律，我们这里一并把它们列出。

设有n个事件 A_1、A_2，……，A_n，若对于任意的 i，$j=1$，2，……，n，当 $i\neq j$ 时，有 $A_iA_j=V$，则称事件 A_1，A_2，……，A_n 两两互不相容，简称 A_1，A_2，……A_n 互不相容。

例如，掷一颗骰子，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{5,6\}$，则A，B，C互不相容。

注意，当 $n\geq 3$ 时，若 A_1，A_2，……A_n 两两互不相容，那么一定 $A_1A_2\cdots\cdots A_n=V$，但反过来，若 $A_1A_2\cdots\cdots A_n=V$，未必有 A_1，A_2，……，A_n 互不相容。

例如，掷一颗骰子，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4\}$，那么显然有 $ABC=V$，但是 $AB=\{2\}$，$BC=\{3\}$，它们都不是不可能事件。

(二) 对立事件　　若事件A与B互斥，而且它们的和为必然事件，即

$$AB=V\quad，而且\ A+B=U$$

则称A与B互为对立事件。

若A与B互为对立事件，一般把B记作 $\overline{A}$，同样也可以把A记作 $\overline{B}$。

事件A与B互为对立事件的几何表示如图1—7。随机点落入圆A及圆周上是事件A，则随机点落入矩形中圆外部分就是事件 $B=\overline{A}$，因此，$\overline{A}$ 也是事件“A不发生”。

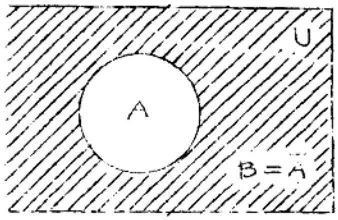


图1—7

例如，掷一颗骰子若A表示“出现奇数点”，则 $\overline{A}$ 就表示“出现偶数点”这一事件。同样，若A表示“系统完好”，则 $\overline{A}$ 就表示“系统故障”。

求一事件的对立事件也是一种运算，有下列运算规律：

i) $\overline{\overline{A}}=A$　　　　(1，2，15)