

中学教学法丛书



中学代数教学法

陈森林 编著

CONGSHU

湖北人民出版社

中学代数教学法

陈 森 林 编 著

湖 北 人 民 教 育 出 版 社

中学代数教学法

陈 森 林 编 著

•

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 20.25印张 467,000字

1981年8月第1版 1981年8月第1次印刷

印数：1—242,300

统一书号：7106·1588 定价：1.60元

出版说明

教学法是研究教学规律的一门科学，是教育学的一个重要分支。提高教学质量，贵在得法。为帮助广大中、小学教师不断改进教学方法，提高教学质量，更多更快地为祖国的“四化”培养人材，广东、广西、湖北、湖南、河南五省（区）人民出版社共同协作，决定以较好的质量、较快的速度编辑出版《中学教学法丛书》和《小学教学法丛书》各一套，计分中学语文、英语、历史、地理、代数、几何、三角、物理、化学、生物、体育，小学语文、数学、自然常识、音乐、美术、体育共十七册，并于一九八一年九月以前出齐，在全国发行。

教学有法，但无定法。这两套丛书的出版，由于时间仓促，未能在五省（区）广泛征求教育工作者的意见，兼采博取各家之长，因此，疏漏谬误之处在所难免，切望同志们提出批评建议，以便再版时补充订正。

一九八一年三月

目 录

第一章 中学数学教学大纲(代数部分)	1
§ 1. 中学代数教学目的	1
§ 2. 中学代数教学内容和它的安排体系	6
§ 3. 代数习题	11
第二章 数的概念	15
§ 1. 前言	15
(一) 数的概念的发展历史的简述	15
(二) 数集扩充应遵循的原则	18
(三) 中学里数的概念教学的意义	19
§ 2. 有理数的教学	21
(一) 有理数的概念	24
(二) 有理数的大小比较	30
(三) 有理数的运算	32
(四) 有理数的性质	45
(五) 有理数的近似计算	47
§ 3. 实数的教学	53
(一) 实数的概念	55
(二) 实数的大小比较	60
(三) 实数的运算	61
§ 4. 复数的教学	64
(一) 复数集的建立	67
(二) 复数的模与辐角、共轭复数	84
(三) 复数和方程	98

(四) 复数在三角方面的简单应用	103
(五) 复数在几何方面的简单应用	113
第三章 代数式	121
§ 1. 整式的教学	121
(一) 代数式	122
(二) 整式的概念	127
(三) 整式的加、减	132
(四) 整式的乘法	132
(五) 整式的除法	143
(六) 因式分解	153
§ 2. 分式的教学	173
(一) 分式的概念	173
(二) 分式的基本性质	177
(三) 约分和通分	179
(四) 分式的四则运算	183
(五) 部分分式	196
§ 3. 实数集里根式的教学	202
(一) 算术根的概念	203
(二) 含有根式的代数式的恒等变形	214
第四章 方程	231
§ 1. 方程(组)的同解性	232
(一) 方程(组)的概念	232
(二) 方程(组)的同解概念	235
(三) 方程(组)的同解定理	236
(四) 几个方程(组)的特殊解法的同解性讨论	251
§ 2. 一次方程(组)	257
(一) 一元一次方程	257
(二) 二元一次方程组	259
二元一次方程组的有关概念	259

二元一次方程组的解法	262
二元一次方程组解的讨论	268
§ 3. 一元二次方程和可化成一元二次方程的方程(组)	274
(一) 一元二次方程	274
一元二次方程的解法	274
一元二次方程根的判别式	279
一元二次方程根与系数的关系(韦达定理)	281
(二) 高次方程	291
在有理数集上的代数方程	291
倒数方程	296
应用因式分解和换元解高次方程	299
(三) 分式方程	301
(四) 无理方程	310
(五) 二元二次方程组	321
§ 4. 列方程解应用题	335
(一) 概述	335
(二) 应用题解法举例	344
§ 5. 行列式和线性方程组	355
(一) 概述	355
(二) 行列式的计算方法	357
(三) 三元线性方程组	363
(四) 高斯消去法解线性方程组及矩阵表示	375
第五章 不等式	384
§ 1. 不等式的概念和性质	384
(一) 不等式的概念	384
(二) 不等式的基本性质	385
§ 2. 解不等式	387
(一) 不等式的同解性	387
(二) 一元一次不等式和一次不等式组	390

(三) 一元二次不等式	394
(四) 高次不等式	400
(五) 分式不等式	401
(六) 无理不等式	404
(七) 含有绝对值符号的不等式	406
(八) 二元不等式组	408
§ 3. 证明绝对不等式	410
(一) 重要不等式	411
(二) 证明不等式的常用方法	413
(三) 重要不等式(续)	419
(四) 应用不等式求最大值和最小值	425
第六章 函 数	429
§ 1. 初中阶段的函数教学	430
(一) 函数概念	430
(二) 正比例函数	436
(三) 反比例函数	441
(四) 一次函数	444
(五) 二次函数	448
二次函数的图象	448
二次函数的单调性	453
二次函数的符号	454
二次函数的最大值与最小值	458
§ 2. 高中阶段函数的教学	467
(一) 集合与对应	467
集合	467
单值对应、函数	472
一一对应、反函数	473
(二) 指数概念的扩张	481
(三) 幂函数	491
(四) 指数函数	501

(五) 对数	506
(六) 对数函数	514
(七) 指数方程和对数方程	518
§ 3. 初等函数	527
(一) 初等函数的概念	527
(二) 应用初等方法讨论初等函数的性质	528
(三) 初等函数图象的绘制	541

第七章 排列与组合、数学归纳法、二次式

定理、概率初步和逻辑代数简介	561
§ 1. 排列与组合	561
§ 2. 数学归纳法	581
§ 3. 二项式定理	588
§ 4. 概率初步	596
§ 5. 逻辑代数简介	609

第一章 中学数学教学大纲

(代数部分)

中学数学教学大纲是中学数学教学的纲领性文件。它是根据国家科学技术和教育事业发展的需要，对中学数学教育提出的要求，以及中学教学计划中给数学课程安排的教学时数来制定的。它规定了中学数学教学的目的和要求、所传授的知识技能的内容、顺序和份量、各章节的教学时数以及教学中的注意事项。它对教学过程起着主要的指导作用。认真地探讨教学大纲是教学法研究中的十分重要一环。

我国从1953年开始颁布中学数学教学大纲(草案)，1956年又作了修订。1961年颁布全日制中小学数学教学大纲(草案)。1977年颁布全日制十年制学校中学数学教学大纲(试行草案)。这里根据1977年《大纲》谈几个问题。

§ 1. 中学代数教学目的

《大纲》指出：“中学数学教学的目的是：使学生切实学好参加社会主义革命和建设，以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识；具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力。通过数学教学，向学生进行思想政治教育，激励学生为实现四个现代化学好数学的革命热情，培养学生的辩证唯物主义观点。”

中学代数课程是中学数学的一个组成部分，中学数学的教

学目的也就是中学代数课的教学目的。因此代数教学目的应该包括传授代数课的基础知识、培养分析问题和解决问题的能力 and 对学生进行思想教育等三个方面。

(一) 代数教学内容虽然名目繁多, 但主要包括以下四个方面:

1. 数的概念的扩充. 在开始学习代数前的小学阶段里, 学生已有自然数、零和分数的知识. 在初中阶段在算术数的基础上引进负数建立有理数集; 又在有理数集的基础上引进无理数建立实数集. 在高中阶段在实数的基础上引进虚数建立复数集.

2. 恒等变换. 数和式的恒等变换在代数课中到处都应用着. 可分为: (1) 在数体(有理数体、实数体、复数体)内、多项式环和有理函数体内的有理运算; (2) 实数体内的根式和根式的运算; 用初等超越函数(幂函数、指数函数、对数函数)和它们的性质所作的特殊运算.

3. 方程和不等式. 在代数课中方程和不等式的学习占重要的地位. 在初一学生就接触到一次方程(组)和一元一次不等式. 在初二学习一元二次方程和可化为二次方程的方程(高次方程、分式方程、无理方程和二元二次方程组). 在初三和高一, 随着函数知识的学习, 学习初等超越方程和有关不等式, 在高二学习线性方程组和不等式的证明.

4. 函数. 函数知识是代数课的中心. 在初三《函数及其图象》里, 学习函数的概念、正比函数、反比函数, 一次函数和二次函数. 在高一学习集合对应的基础上加深对函数概念的理解, 并学习幂函数、指数函数和对数函数.

此外, 还介绍一些概率、统计和逻辑代数等的初步知识.

因此, 代数教学的目的之一, 在于扩大学生数的概念, 教会学生自觉地、迅速而又最合理地作出代数式的恒等变形, 发

展学生关于函数相依关系和它的图象的概念，教会学生列方程和解方程，并且使学生能应用代数知识解决有关物理、化学和实际中的简单问题。

(二) 近十年来科技的新发现、新发明，比过去两千年的总和还要多。这种知识急速增长的实际情况，使得以识记和记忆为主的学校教育已远远不能适应它的需要。它要求学校教育重视培养分析问题和解决问题的能力，使学生能独立地获得不断增长着的知识，使他们在毕业后不致于落后日益加速的科技进步。知识和能力的关系是辩证统一的，一方面知识是能力的基础，另一方面掌握知识的快慢和灵活运用的程度又依赖于学者的能力，因此为了提高学习效率必须注意能力的培养。

代数教学目的之二，就是要培养学生的运算能力和逻辑思维能力。

1. 运算能力的培养

代数中的运算包括数的计算、式的恒等变形、方程和不等式的变形、初等函数的求值和运算等。这些运算的实质就是根据运算的定义、有关定理公式和法则，从已知推出结果的过程。要提高运算能力，首先就要熟悉这些有关基础知识，做到每步运算都有确切的根据，从而确信结果的正确性。

对基本的运算不仅要会而且要熟、要快，这样做不仅是为了目前，更重要的是为了保证进一步学习的质量和进度。例如在数的计算中，实数是转化为它的有理近似值去计算的，复数又是转化为实数去计算的，因此有理数的计算就十分重要，根据《大纲》的要求，必须掌握有理数的运算法则，能够熟练地进行有理数的计算。要熟练地进行有理数的计算，在计算器械比较发达的今天，它并不要求学生能准确作出很多位数的繁难计算，相反它却要学生熟练较简单的有理数的准确计算，同时又把注意力集中

于应用算术运算律简化计算上. 又如在解方程中, 许多方程都归结为一元一次方程和一元二次方程, 对它的讨论就应更注意些.

为了提高计算效率, 记忆一些东西是必要的. 例如在数的计算中, 能记住 1—10 各自然数的立方, 1—20 各自然数的平方, 2、3、5、7 等的常用对数和平方根, 计算就方便多了.

提高计算能力是一个经常的工作, 必须循序渐进的训练. 例如在讲解乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 之后, 可先选一些彼此连系的, 带有启发性的练习:

$$(1) (a+b)(a-b) = ?$$

$$(2) (a-b)(-b+a) = ? \quad (\text{位置变化})$$

$$(3) (-a-b)(a-b) = ? \quad (\text{符号变化})$$

$$(4) (2a+3b)(2a-3b) = ? \quad (\text{系数变化})$$

$$(5) (a^3+b^2)(a^3-b^2) = ? \quad (\text{指数变化})$$

然后再进一步作较繁的习题:

$$(6) (a+b-c)(a-b+c) = ? \quad (\text{项数增多})$$

$$(7) (a+b)(a-b)(-a-b)(-a+b) = ? \quad (\text{因数增多})$$

$$(8) 89 \times 91 = ? \quad (\text{具体运用})$$

再结合其他各部分的内容的学习不断巩固它、综合运用它.

2. 逻辑思维能力的培养

数学是逻辑性很强的一门科学. 作为中学数学教学科目的代数, 本身就是科学的基础, 不能违反科学性和系统性, 只是为了照顾学生的发展水平, 在不破坏科学系统性的情况下, 把一些可证明的命题作为“公理”给出, 不加证明的采用, 或者作为“常识”采用, 因此在教学中逻辑论证和推理占有重要的地位.

中学代数教材中运用了许多逻辑知识, 如概念、定义、分类、命题、公理、定理、逆定理、推论、条件、结论、证明等概念, 以及分析、综合、归纳、演绎、类比、直接证法、间

接证法、数学归纳法等推理证明方法。在教学中要有意识地强调这些逻辑因素，一方面要结合具体内容向学生讲清这些概念和推理方法，另一方面要逐步引导学生用逻辑知识加深对教材的认识，提高学习数学的素养。

代数的基础知识包括概念、定义、公理、定理、法则、公式和推理方法等。在概念的教学，要讲清概念的本质属性，逐步深入认识它的内涵和外延，通过分类明确概念之间的联系和区别，探讨概念的地位和作用；在定理、公式的教学，要讲清它们是在什么范围内研究的，定理、公式的条件是什么，结论是什么，这些条件是结论出现的充分条件、必要条件、还是充要条件，在论证过程中怎样建立条件和结论的联系等；在推理方法的教学，要讲清它的意义，还要讲清它在逻辑表达上的特殊形式，把形式和内容统一起来以加深对这些方法的认识并提高运用这些方法的能力，因此加强基础知识和培养逻辑思维能力是密切相关的。在教会学生掌握基础知识的同时就可发展学生的思维能力，而学生思维能力的发展又有助于基础知识的学习和运用。

科学思维方法既要遵循形式逻辑所阐明的规律（有条理、前后一贯、不自相矛盾），又要有辩证观点，能够从事物的相互联系、相互制约、对立统一中去看问题。这就要求讲解有严密的逻辑系统，能抓住问题发展的线索，使学生掌握完整的而不是支离破碎的知识体系。

（三）培养学生辩证唯物主义观点，是学校各项教育活动和各科教学的共同任务。数学本身具有丰富的辩证唯物主义因素，应该发挥这个有利条件，把它作为对学生进行思想教育的重点。因此，代数教学目的之三，就是要对学生进行辩证唯物主义观点的教育。

首先通过数学教学要使学生认识到数学虽然具有高度抽象

性的特征，但它决不是“纯粹思维的创造”，它的内容是非常现实的，现实为它的概念、运算关系等提供了原型；要使学生认识到数学产生和发展的动力是社会实践，但它并非消极被动的尾随于社会实践的后面，而是积极地、能动地作用于社会实践（如虚数的产生和非欧几何的出现）；要使学生了解数学应用的广泛性，为此目的在教学中需要注意有关数学史知识的介绍，并且要加强数学和生活及其他科学的联系，采取由生动的直观到抽象的思维，再由抽象思维到实践的教学方法。

其次通过数学教学要使学生认识到客观事物是在运动、变化和发展的，它们之间是相互联系和相互制约的。要使学生认识到事物发展的动力是矛盾和统一。

数学的内容都是现实世界的反映，现实世界是辩证的，因而数学内容也是辩证的，这就要求我们运用辩证的思维去学习数学。

例如，实数集上的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根和它的系数有着密切的关系。当系数改变的时候，根也随着改变。决定根的性质标志就是根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，当 Δ 由正无穷大变到 0 时，两根总是实数，这仅是量变，但当 Δ 由非负数变到负数时，两根就由实数变为虚数，这时就发生质变了。

又如函数概念，它最生动地反映了事物的相互联系和相互制约。用函数观点去看待中学数学的内容可以使对它的认识深化。方程就是在两个函数定义域的交集研究的两个函数，问当自变数取什么数组时这两个函数的对应值相等，这样用函数图象解方程（组）就是很自然的事。

§ 2. 中学代数教学内容和它的安排体系

根据 1977 年教育部颁发的教学大纲，我们把有关代数的内

容整理如下表:

中学代数教学内容和教学时数

	数 (83)	式 (109)	方程和不 等式(104)	函 数 (61)	其 他 (55)
初	1. 有理数 (33)*	2. 整式加 减法 (21)	3. 一元一 次方程 (28)		
			4. 一元一 次不等式 (8)		
			5. 二元一 次方程组 (18)		
中		6. 整式乘 除法 (26)			
		7. 因式分解 (22)			
(304)		8. 分 式 (24)			
	9. 数的开方和二次 根式 (26)		10. 一元二 次方程 (34)		
	11. 指数 和常用 对数 (24)			12. 函数及 其图象 (28)	13. 统计 初步 (12)

续 表

	数 (83)	式 (109)	方程和不 等式(104)	函 数 (61)	其 他 (55)
高 中 (108)	16. 复数 (16)		15. 线性方 程组 (16)	14. 幂函数、 指数函数、 对数函数 (33)	17. 排列、 组合二项 式定理 (18) 18. 概率 (10) 19. 逻辑 代数简介 (15)

* 括号内为教学时数。1, 2, …, 19 为章号

从上表可以看出:

(一)《大纲》是按照“精选、增加、渗透”的原则来确定教学内容的。

所谓精选,就是对传统中学数学内容进行精选,作必要的删减。俗话说:“旧的不去,新的不来”,不删减传统数学内容,新的数学内容就无法增添进来,但是删减不当又会影响基础知识的学习,国内外的教学改革都有这方面的经验和教训,因此必须慎重从事。与 61 年部颁教学大纲相比较,代数内容删减的有: