现代数学基础丛书

数理逻辑基础

上册

胡世华 陆钟万 著

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书介绍数理逻辑的基础知识，包括逻辑演算的基本内容．这些内容构成数理逻辑各个分支(模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论)的共同的基础．

本书共六部分，分上、下两册．上册包括绪论、第一章和第二章．绪论对数理逻辑的性质，逻辑演算的大概内容，以及阅读以后各章所需要的预备知识作了简要的说明．第一章构造命题逻辑和一阶逻辑的形式系统，介绍演绎逻辑的基本规则．第二章研究逻辑演算的重要系统特征．

本书可以用作数学专业和其他专业数理逻辑课程的教材或教学参考书，或供有关工作人员参考．当用作其他专业的教材时，内容可删减．使用本书时一般要求读者具有相当于大学高年级程度的数学训练．

现代数学基础丛书

数理逻辑基础

上 册

胡世华 陆钟万 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年1月第一版 开本：850×1168 1/32

1981年1月第一次印刷 印张：7 1/2

印数：0001—11,120 字数：192,000

统一书号：13031·1320

本社书号：1838·13—1

定价：1.15 元

现代数学基础丛书

数理逻辑基础

下册

胡世华 陆钟万 著

科学出版社

1 9 8 2

目　　录

目 录

绪　论

数理逻辑研究推理，即研究推理中前提和结论之间的形式关系．这种形式关系是由作为前提和结论的命题的逻辑形式决定的．

在数理逻辑的研究中要构造逻辑演算，逻辑演算是为了研究前提和结论之间的形式关系而构造的形式系统．逻辑演算反映自然语言的某些特征，其中的合式公式反映命题的逻辑形式，其中的形式推理反映演绎推理．

绪论中将对这些概念作直观的说明（§00—§02），并且要介绍阅读以后各章所需要的某些预备知识，即关于集的基本概念（§03）和数学归纳法（§04）的一般知识．

§00　数理逻辑

数理逻辑，又称为**符号逻辑**，是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学．本书中所要陈述的数理逻辑还限于通常称为演绎逻辑的内容．

推理是从前提推出结论．在各门科学的研究活动中，都要进行推理．推理中的前提和结论都是命题，都有具体的涵义．从怎样的前提出发，能推出怎样的结论，不能推出怎样的结论，这是各门科学自己要研究的问题．例如在数学分析中，由下面的前提 1）和2）：

1）　　函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

2）　　$f(a)$ 和 $f(b)$ 的符号不同

能推出结论 3）：

3）　　在 a, b 之间有 c，使得 $f(c)=0$

但是,如果在 1) 中把闭区间 $[a, b]$ 改为开区间 (a, b), 那么由 1) 和 2) 就不能推出 3). 这个例子陈述了一个具体的前提和结论之间的推理关系. 数学分析在这个例子中研究了连续函数的性质,但并不是研究推理. 数学中除数理逻辑之外的各个分支都并不研究它们所使用的推理.

推理是数理逻辑所研究的对象. 数理逻辑研究推理时并不涉及前提和结论的内容,而是研究前提和结论之间的形式关系.

什么是前提和结论之间的形式关系呢?

前提和结论都是命题. 命题有逻辑形式,或者说逻辑结构. 例如下面的两个命题:

4) $$a = 0 \text{ 或 } a < 0$$

5) $$a \neq 0$$

命题 4) 有以下的逻辑形式:

$$A \text{ 或 } B$$

命题 5) 有以下的逻辑形式:

$$\text{非 } A$$

我们考虑下面 6) 中三个互相连系的逻辑形式:

6) $$\begin{cases} A \text{ 或 } B \\ \quad \text{非 } A \\ \qquad B \end{cases}$$

我们说这是三个互相连系的逻辑形式,意思是,第一个逻辑形式是由两个命题用"或"连接而构成,第二个逻辑形式就是在第一个逻辑形式中的第一个命题的前面加上"非"(就是加以否定)而构成,第三个逻辑形式就是由第一个逻辑形式中的第二个命题构成. 显然,任何三个命题,如果它们分别具有 6) 中的逻辑形式(不论其中的 A 和 B 是怎样的命题[1]), 那么, 当其中的前两个命题是真命题时,后一个命题必然也是真命题. 这样,我们也说由前两个命题能

---

1) 我们以英文斜体大写字母表示命题、性质(或关系) 和集合,它们是互相连系的. 例如,"是素数"是一个性质,"a 是素数"是一个命题,而所有具有"是素数"性质的对象又构成一个集合,即全体素数的集合.

推出后一个命题．例如，当前面的 4) 和 5) 是真命题时，“$a<0$”必定是真命题．我们说，由 4) 和 5) 能推出“$a<0$”．

由“$a=0$ 或 $a<0$”和“$a\neq 0$”能推出“$a<0$”，这是前面说过的由具体的前提推出具体的结论，是一个具体的推理关系．6) 中前两个逻辑形式与后一个逻辑形式所表示的则是推理中前提和结论之间的一种形式关系．

再举一个例子．下面的两个命题：

凡宽叶植物都是落叶植物

凡素数都是整数

都有以下的逻辑形式：

凡 S 都是 P

我们考虑下面 7) 中三个互相连系的逻辑形式：

7) $\begin{cases}\text{凡} M \text{都是} P\\ \text{凡} S \text{都是} M\\ \text{凡} S \text{都是} P\end{cases}$

显然，任何三个命题，如果它们分别具有 7) 中的逻辑形式（不论其中的 S, M, P 是怎样的概念或集合），那么，当前两个命题是真命题时，后一个命题必然也是真命题．因此也可以说，由前两个命题能推出后一个命题． 7) 中前两个逻辑形式与后一个逻辑形式表示前提和结论之间的另一种形式关系．

6) 和 7) 中的逻辑形式所表示的前提和结论之间的这种形式关系称为**演绎推理关系**．数理逻辑中的演绎逻辑就是研究前提和结论之间的演绎推理关系的[1]．

为了研究推理，研究推理中前提和结论之间的形式关系，为了确切地反映命题的逻辑形式，在数理逻辑的研究中要构造称为**逻辑演算**的形式系统． 形式系统是一种形式语言，它反映自然语言

1) 推理中前提和结论之间的关系并不都是演绎推理关系．例如也可以是，当前提是真命题时，结论并不必然是真命题，而或然是真命题．归纳逻辑和概率逻辑就是研究这种推理关系的，它们也属于数理逻辑的范围．

的某些特征．逻辑演算中有**合式公式**，在合式公式中可以确切地反映命题的逻辑形式．因此在逻辑演算中可以确切地反映前提和结论的逻辑形式之间的关系，也就是前提和结论之间的形式关系．

根据以上的讨论，我们可以简单地说：数理逻辑是研究推理，即研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学，这种研究是通过反映语言的这一方面关系的逻辑演算进行的．

§01 逻辑演算(一)

我们在上节中讲过，逻辑演算是为了研究推理中前提和结论之间的形式关系而构造的形式语言，逻辑演算反映自然语言的某些特征．在本节和下节中我们要进一步说明逻辑演算的构造和意义．

逻辑演算中首先要有**符号**，这相当于语言（特别是欧洲的语言）中要有字母．逻辑演算中的符号也称为**字母**．

由符号构成**公式**，公式是一串有穷长的符号．公式中符号的数目称为**公式的长度**．当把符号称为字母时，公式就称为**字**，公式的长度称为**字长**．例如，如果符号就是以下两个英文字母：

$$a, b$$

那么

$$a, b, aabb, ababab, bbbaaabbb$$

等都是公式，它们的长度分别是 1，1，4，6，9．

公式的长度可以是 0．长度是 0 的公式称为**空公式**，记作

$$\odot$$

它是一个特殊的没有符号的公式．逻辑演算中有⊙这样一个公式，正像数目中有 0 这样一个数．

把逻辑演算中的两个公式 X 和 Y 并列起来，结果仍是其中的公式，记作

$$XY$$

称为X和Y的**并列**．对于任何公式X，显然有

$$X\odot=\odot X=X$$[1]

并且，对于任何公式 X，Y，Z，显然有

$$(XY)Z=X(YZ)\text{（结合律）}$$

$$\text{如果 } XY=XZ\text{，则 } Y=Z\text{（消去律）}$$

$$\text{如果 } XZ=YZ\text{，则 } X=Y\text{（消去律）}$$

如果公式X是公式Y的部分，就是说，有公式 X_1 和 X_2（X_1，X_2 可以是空公式⊙）使得，

$$X_1XX_2=Y$$

那么我们说X是Y的**子公式**；否则X就不是Y的子公式．例如，对于由符号 a 和 b 构成的公式

ababab

来说，a，ab，aba，bab，abab 等，以至于 ababab 本身，都是它的子公式；但是 aa 和 bb 都不是它的子公式．

显然，任何公式 X，Y，Z，如果X是Y的子公式，Y是Z的子公式，那么X是Z的子公式．

逻辑演算中的符号是我们的研究对象，又称为**形式符号**或**对象符号．**

形式符号是逻辑演算的原始构成材料．一个逻辑演算在确定了它的形式符号，因此确定了它的公式之后，还要为它规定两组规则，形成规则和变形规则，由这些规则生成某些对象．所生成的对象都是由形式符号构成的．形式符号是没有涵义的；由形式符号根据形成规则和变形规则所生成的对象也都是没有涵义的，它们都是由形式符号构成的形式对象．然而，对于逻辑演算形式系统中的这些形式对象，要给予一个具有逻辑学涵义的解释，使之成为具有逻辑学涵义的对象，从而我们可以通过它们研究逻辑问题．

下面我们来逐步地说明这些问题．我们在本节和下节中所作的说明是直观的，不严格和不详细的，也只要求读者有个大概的了

1）两个公式相等，就是它们的长度相同，并且依次有相同的符号．

解. 在以后各章中将对这些问题作严格和详细的说明.

我们先说明什么是形成规则和变形规则.

形成规则相当于语言中的语法规则. 语法规则是确定词和语句怎样构成,确定语句的结构形式的. 与之类似,形成规则由公式中确定一类特殊的公式,就是上节中所说的合式公式. 合式公式相当于语言中的语句.

为了继续说明的方便,我们先要说明一些关于本书中使用符号的规定. 我们要构造一系列的逻辑演算. 我们规定,令英文正体大写字母(或加下添标)

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的公式; 令英文正体大写字母(或加下添标):

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i, \mathrm{C}_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的合式公式;令希腊文正体大写字母(或加下添标):

$$\Gamma, \Delta, \Gamma_i, \Delta_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的合式公式有穷序列.

注意, X 和 Y 等是任意的公式, 因此它们可以是不相同的, 也可以是相同的. 同样, A 和 B 等可以是不同的,也可以是相同的合式公式; Γ 和 Δ 等可以是不同的,也可以是相同的合式公式有穷序列.

我们又令

$$\Gamma, \Delta$$

表示由 Γ 和 Δ 并列起来而得的合式公式有穷序列. 如果 $\Gamma = \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_m$ 并且 $\Delta = \mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n$, 那么 $\Gamma, \Delta = \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_m, \mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n$[1].

合式公式的有穷序列可以是没有项的. 没有项的有穷序列称为**空序列**. 我们就以表示空集的符号

---

1) 两个序列相等,就是它们的项数相同,并且依次有相同的项.

$$\phi$$

表示空序列．于是，对于任何 Γ，都有

$$\Gamma, \phi = \phi, \Gamma = \Gamma$$

成立[1]．

现在我们来说明什么是变形规则．**变形规则**相当于演绎推理的规则；可是，当还没有给以具有逻辑学涵义的解释时，我们还不能说变形规则具有怎样的逻辑学涵义，还不能说它们是一种推理规则．

变形规则确定一个合式公式有穷序列 Γ 和一个合式公式 A 之间的一种特殊的形式关系，称为**变形关系**．当 Γ 和 A 之间存在着变形关系时，我们说由 Γ 可以变形到 A，并记作

$$\Gamma \vdash A$$

我们也说 $\Gamma \vdash A$ 是变形关系．

下面我们来说明怎样对形式符号以及由形式符号构成的形式对象给以具有逻辑学涵义的**解释**，使之成为具有逻辑学涵义的研究对象．

前面说过，逻辑演算反映语言的某些特征．逻辑演算中的合式公式相当于语言中的语句．语句是表示命题的，是可以赋予一定的涵义的．合式公式也要能够在给以解释之后表示命题，赋予一定的涵义．为了说明怎样给合式公式以解释，使得合式公式在给以解释之后成为命题，我们先要说明怎样给构成合式公式的形式符号以解释．在本书中要构造一系列的逻辑演算，其中有七类常用的形式符号．下面我们列举这些符号，并说明怎样给以解释，说明它们表示什么．

（一）**命题词**[2]　命题词是一个无穷序列的形式符号．我们规定以英文正体小写字母(或加下添标)：

1）在这里的"Γ, ϕ"和"ϕ, Γ"中，为了把 Γ 和 ϕ 分开，我们写了逗号．如果把 Γ 和 ϕ 中的合式公式写出，那么由于 ϕ 是空序列，这里的逗号实际上是不需要的．

2）这里"词"的意思就是符号，故命题词也可以称为"命题符号"．后面个体词等的情况相同．

$$p, q, r, p_i, q_i, r_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任意的命题词.

命题词是我们要解释为命题的形式符号,或者说,命题词是表示命题的形式符号. 下面是一些命题的例子:

1） 任何自然数都有大于它的素数.

2） 3是最小的素数.

3） 任何大于2的偶数都可表为两个素数的和.

其中，我们知道，1）是真的，2）是假的，3）就是哥德巴赫[1]猜想,数学家从他们的研究中估计它大概是真的,但是至今还没有能给以证明,因此还没有能够判断出它的真假. 一个命题,不论是否已经知道它的真假,总或者是真的,或者是假的.

命题的真或假称为命题的**真假值**, 简称为命题的**值**. 因此命题有两个可能的值: 真和假. 真命题的值是真,假命题的值是假. 我们以德文花体小写字母"$\mathfrak{t}$"和"$\mathfrak{f}$"分别表示命题的真值和假值.

我们在上节中讲过，本书中所要陈述的数理逻辑是研究演绎推理关系的. 演绎推理关系是前提和结论之间的这样一种形式关系,当前提是真命题时，结论必定也是真命题. 因此，虽然命题各有具体的涵义,但在研究演绎推理关系时,我们是要研究具有一定的逻辑形式的命题之间的真假关系. 这时我们只考虑命题的真假值而不考虑命题的涵义.

我们一般并不规定命题词表示真命题还是表示假命题. 例如p，它可以表示真命题，也可以表示假命题. 因此，命题词又称为**命题变元**或**命题变项**,它们取 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$ 为值. 但是，我们有时候也需要规定命题词表示真命题,或者表示假命题. 为此,我们任意取两个命题词，就写作"t"和"f"，规定它们分别表示真命题和假命题. 这样，t 和 f 是两个特殊的命题词，它们又称为**命题常元**或**命题常项**.

---

1) Goldbach.

（二）**个体词** 个体词是一个无穷序列的形式符号. 我们规定以英文正体小写字母(或加下添标):

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{a}_i,\ \mathrm{b}_i,\ \mathrm{c}_i\ (i=1,2,3,\cdots)$$

表示任意的个体词.

任何科学理论都有所要研究的对象的不空集合,称为**论域**.论域中的元素即研究的对象按照习惯称为**个体**. 个体词就是表示个体的形式符号. 这里所说的个体并不是通常意义下的个体,而是泛指所研究的对象的,这对象可以是通常意义下的个体,也可以是由个体构成的集合,或者是集合的集合等.

我们一般并不规定个体词表示哪个论域中的哪个个体,因此个体词一般又称为**个体变元**或**个体变项**,它们取任一论域中的任一个体为值. 但有的时候也要给某一个体词以特定的具体解释,使之表示某一论域中的某个特定的个体. 这时,个体词又称为**个体常元**或**个体常项**.

（三）**函数词** 函数词是一个无穷序列的形式符号. 我们规定以英文正体小写字母(或加下添标):

$$\mathrm{f},\ \mathrm{g},\ \mathrm{h},\ \mathrm{f}_i,\ \mathrm{g}_i,\ \mathrm{h}_i\ (i=1,2,3,\cdots)$$

表示任意的函数词.当特别要指明一个函数词是 n 元函数词(n 是正整数)时,可以在它的右上角写上添标 n,例如 f^n.

函数词是表示任一给定论域中的函数的形式符号. 一元函数词表示一元函数,例如正弦和平方;二元函数词表示二元函数,例如加和乘;一般地,n 元函数词表示 n 元函数.

对于函数词,我们一般也不规定它表示哪个论域中的哪个函数,因此函数词一般又称为**函数变元**或**函数变项**,n 元函数词取任一给定论域中的任意 n 元函数为值. 但有时候也要对某一函数词给以具体的解释,使它表示某个特定的函数,这时函数词又称为**函数常元**或**函数常项**.

（四）**谓词** 谓词是一个无穷序列的形式符号. 我们规定英文正体大写字母(或加下添标):

$$\mathrm{F},\ \mathrm{G},\ \mathrm{H},\ \mathrm{F}_i,\ \mathrm{G}_i,\ \mathrm{H}_i\ (i=1,2,3,\cdots)$$

表示任意的谓词. 当特别要指明一个谓词是 n 元谓词时，可以在它的右上角写上添标 n，例如 F^n.

我们讲起论域中的个体时，总是说它们有怎样的性质或它们之间有怎样的关系. 个体是主语，性质或关系是谓语. 例如说“2 是偶数”，那么其中的个体 2 是主语，性质“是偶数”是谓语；又如说“3 整除 6”，那么个体 3 和 6 是主语，关系“整除”是谓语[1].

谓词是表示任意论域中的个体的性质或个体之间的关系的形式符号，也就是表示谓语的形式符号. 一元谓词表示一元关系即性质，例如“是偶数”和“是素数”；二元谓词表示二元关系，例如“小于”和“整除”；三元谓词表示三元关系，例如“两数平方和等于第三数平方”；一般地，n 元谓词表示 n 元关系.

对于谓词，一般也不规定它表示哪个论域中的哪个关系，因此谓词一般又称为**谓语变元**或**谓语变项**，n 元谓词取任一给定论域中的任意 n 元关系为值. 但有时也要对某一谓词给以具体的解释，使它表示某个特定的关系，这时谓词又称为**谓语常元**或**谓语常项**.

命题词、个体词、函数词、谓词统称为**指词**，因为在给以解释之后，它们都是有所指称的.

（五）**逻辑词**　逻辑词是以下七个形式符号:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$$

其中前五个符号称为**命题连接词**，简称为**连接词**，它们依次称为**否定词**、**合取词**、**析取词**、**蕴涵词**、**等值词**，后两个符号称为**量词符号**，它们依次称为**全称量词符号**和**存在量词符号**.

上面五个命题连接词依次表示并且就读作“非”，“与”，“或”，“如果，则”，“当且仅当”. 量词符号和约束变元（即将在后面说明）一起构成的公式

$$\forall x, \exists x$$

称为**量词**. 它们都是个体量词，其中 $\forall x$ 称为**全称量词**，它表示论

1) 这和自然语言的语法中的理解有所不同. 在自然语言的语法中，句子“3 整除 6”中的主语是 3，谓语是“整除 6”；在这里，主语是 3 和 6，谓语是“有整除关系”.