博雅®

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

点集拓扑与代数拓扑引论

Introduction to General Topology and Algebraic Topology

包志强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

博雅

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

点集拓扑与代数拓扑引论

包志强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

点集拓扑与代数拓扑引论/包志强编著. —北京: 北京大学出版社, 2013. 9

(21 世纪数学规划教材 · 数学基础课系列)

ISBN 978-7-301-23060-2

Ⅰ. ①点… Ⅱ. ①包… Ⅲ. ①拓扑空间–高等学校–教材 ②代数拓扑–高等学校–教材 Ⅳ. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 199137 号

书　　名: 点集拓扑与代数拓扑引论
著作责任者: 包志强　编著
责 任 编 辑: 潘丽娜
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-23060-2/O·0949
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn
新 浪 微 博: @北京大学出版社
电 子 邮 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
　　　　出版部 62754962
印 刷 者: 北京大学印刷厂
经 销 者: 新华书店
　　　　890 毫米×1240 毫米　A5　9.25 印张　260 千字
　　　　2013 年 9 月第 1 版　2013 年 9 月第 1 次印刷
定　　价: 26.00 元

内容简介

本书是高等院校数学系本科生拓扑学的入门教材. 全书共分五章。第一章介绍拓扑空间和连续映射等基本概念. 第二章介绍可数性、分离性、连通性、紧致性等常用点集拓扑性质. 第三章从几何拓扑直观和代数拓扑不变量两个角度, 综合地介绍了闭曲面的分类. 第四章介绍了基本群的概念以及应用. 第五章介绍复迭空间的技术. 本书的特点是叙述浅显易懂, 并给出了丰富具体的例子, 主干内容(不打星号的节)每节均配有适量习题, 书末附有习题的提示或解答.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系的拓扑课教材, 也可供有关的科技人员和拓扑学爱好者作为课外学习的入门读物.

前言

近年来有很多国外的优秀拓扑教材被翻译成了中文. 特别值得一提的是 Munkres 编著的《*Topology: A First Course*》，就点集拓扑部分来说，这本书是到目前为止讲得最透彻最全面的一本书；还有 Armstrong 编著的《*Basic Topology*》，我本人也非常喜欢这本书，因为相比于其他教材所追求的严谨和全面来说，这本教材的语言要生动自然得多，它可以让一个从来没有听说过拓扑的学生真正喜欢上拓扑. 国内也已经有了一些非常成熟的入门教材，其中使用得最多的两本入门教材是尤承业教授编著的《基础拓扑学讲义》和熊金城教授编著的《点集拓扑讲义》.

不过这些教材的作者有一个共同的假定，就是拓扑学应该是一个两学期的课程，一学期讲点集拓扑，一学期讲基本群和复迭空间等代数拓扑入门知识，甚至可以更深入一点讲讲同调论和同伦论. 而这个假定对现在国内的拓扑教学并不适用. 我了解到, 在国内的很多大学，微分几何和拓扑学都是排在学生快到毕业的时候才开始学，这样后面再多一学期专讲代数拓扑的课程往往会开不出来. 这也导致很多学生直到读研究生之后才开始接触代数拓扑，对它的了解程度远远低于需要，甚至于把拓扑学就等同于点集拓扑.

我并不指望超越这些经典教材，但是我想写一本“看上去比较简单”的参考书作为补充，这本书要让每个普通的学生都有勇气读完它，能够用一学期的时间大致了解拓扑是一门什么样的学问，了解今天的数学家是如何用拓扑去思考的. 这个拓扑不仅包含紧致、连通等点集拓扑概念，还包括基本群、复迭空间等简单的代数拓扑概念，以及一定的“拓扑学家的几何直观”.

本书的内容除了个别章节比较长之外，差不多每个学时可以讲授一小节，一学期讲完全部内容. 其中打星号的章节不推荐课上讲授，教师

可以在课上简单地提一下，然后让学有余力的同学在课余时间自己阅读. 那是一些比较难懂，但是值得那些将来希望进一步学习拓扑的学生去了解一下的内容，也是为了让本书保持“看上去比较简单”而特意分拆出来的. 本书的习题也不是很多很难，对于大部分习题，学生都可以仿照正文中的例子作出解答，并在这个过程中加深对正文的理解.

最后，我要感谢姜伯驹院士、尤承业教授、吕志教授的意见和建议，感谢选修我的课的同学们在本书试讲过程中进行的交流和互动，感谢我的爸爸妈妈对我的支持和鼓励.

编　者

2013 年 1 月于北京大学

目　录

引　言

什么是拓扑?

在数学家的圈子以外, 当被问到拓扑一词时, 人们最有可能想到的, 大概是计算机科学中提到的“拓扑”概念：当我们把许多计算机相互连接在一起构成网络时, 会有很多种不同的连接方式, 小到可以是一台服务器挂很多客户端的集中式网络, 大到可以是很多子网络通过路由器连接在一起的网际网络, 这些连接方式都被叫做网络拓扑. 虽然计算机的型号、性能和网络连接的速度、质量可能有千差万别, 但是当网络拓扑相同时, 网络运行的基本原理和算法是相通的. 反过来, 当网络拓扑不同时, 计算机之间搜索位置和传送信息的方法则往往会有本质差别.

其实这个概念是从数学中借用过去的, 不过在一定程度上, 这种借用确实反映了拓扑学中一些最朴素最直观的想法. 数学家发明拓扑的初衷, 正是要去寻找这样的一些几何形状上的特征, 它们虽然也都看得见、摸得着, 但是却比长度和角度等传统几何性质更加“本质”：这些特征不会因为研究对象的某些细节上的改变而发生改变. 一个通俗 (但是并不准确) 的说法是：拓扑学研究的是一个对象在连续形变下保持不变的性质.

这种性质有吗？当然有. 早在 1736 年, Euler(欧拉) 解决 Königsberg (哥尼斯堡) 七桥问题的时候, 就发现了一些这样的奇妙性质, 并认为应该有一种“关于相对位置的几何”来专门研究此类古典几何无法解释的奇妙性质. 这就是拓扑学的起源. Euler 称“位置几何”这个词源于 Leibniz (莱布尼茨). 近年来, 人们对数学史的研究发现, Leibniz 的想法可能来源于比他更早的 Descartes(笛卡儿) 的一篇未发表的手稿.

Gauss (高斯) 和 Maxwell (麦克斯韦) 出于研究电磁学的目的, 也都先后思考过关于位置几何的问题. 不过“拓扑”这个词却是 Gauss 的学生 Listing 从希腊文中表示位置的词 $\tau o\pi o\varsigma$ (topos) 和表示原理

的词 $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ (logos) 造出来的. 1847 年, Listing 发表了著名的论文《Vorstudien zur Topologie》(关于拓扑学的初步研究), 这就是历史上的第一篇关于拓扑学的数学论文.

当然, 真正实用的拓扑学还要等到 1874 年 Cantor (康托尔) 发明集合论之后才算开始, 因为集合的语言才是表达拓扑思想最合适的语言. 沿着这条线索发展出来的, 研究最一般的集合上的拓扑的学科, 被称为 **点集拓扑学** (point-set topology) 或 **一般拓扑学** (general topology).

另一方面, 对于一些结构比较好的拓扑空间, 来自代数和微分方程的思想和方法则可以发挥巨大作用. 在 1895 年 Poincaré (庞加莱) 发表了一篇长达一百多页的著名论文《Analysis Situs》(位置分析), 这篇论文包含了很多创造性的新思想, 或者说提出了一系列重要的、有待严格证明的研究方法和结论, 并在此后三十年间主导了拓扑学界的大部分研究. 这些想法被发展起来后, 就形成了今天的 **代数拓扑学** (algebraic topology) 和 **微分拓扑学** (differential topology).

有趣的是, Poincaré 的工作导致后来的很多数学家都习惯用“位置分析”或“位置几何”称呼这个学科, **拓扑学** (topology) 这个名称直到二十世纪三十年代才开始被数学界普遍使用.

国内的第一本拓扑书是江泽涵教授在抗战时期翻译的一本德文教材. 最初他把这门学科称为“形势几何学”, 后来他取了一个具有延伸扩展之意的“拓”字, 又取了一个具有拍打挤压之意的“扑”字, 合起来既接近西文的发音又提示了这门学科的特点, 即它关心的是几何形体在连续形变下保持不变的性质. 这样才将该学科的中文名称正式确定为“拓扑学”.

拓扑学的直观认识

为了能够让大家初步理解拓扑学都研究些什么, 让我们拿欧氏几何来对比一下. 所谓的欧氏空间, 无非是一个点集附加上一些额外的信息. 每一套完整的附加信息称为一个欧氏结构, 人们可以通过读取这些信息

来判断点的共线或共面关系, 以及计算距离、夹角、面积、体积等欧氏几何能计算的量. 依现代几何学的理解来看, 这些量中距离是最基础的, 欧氏空间到欧氏空间的保持距离的映射称为等距变换, 而欧氏几何所关心的, 基本都是些不会被等距变换所改变的性质.

与之类似, **拓扑空间** (topological space) 也是一个点集附加上一套额外的信息. 这套附加信息称为 **拓扑结构** (topological structure), 它的主要作用则是帮助我们定义连续性 (或者说把"$\mathbb{R}$ 上的连续函数"这一概念推广到一般的集合上去). 拓扑空间到拓扑空间的保持连续性定义方式不变的映射称为 **同胚** (homeomorphism), 而拓扑学研究的, 正是那些在同胚下保持不变的性质, 即 **拓扑性质** (topological property). 下表列出了两者的类似之处.

概念	特点	概念	特点
欧氏空间	具有欧氏结构	拓扑空间	具有拓扑结构
欧氏结构	用于刻画距离	拓扑结构	用于刻画连续性
等距变换	保持距离不变	同胚	保持连续性不变
欧氏性质	等距变换下不变	拓扑性质	同胚下不变

"保持长度不变地把一个图形变到另一个图形"是一种很容易理解的操作, 但是"保持连续性定义方式不变地把一个空间变到另一个空间"是一种什么样的操作呢? 考虑闭区间 $[0,1]$, 按照数学分析中学过的标准方式定义连续性. 很显然这条线段可以进行收缩或者拉伸, 然后在新得到的空间中按相应方式 (而不是数学分析中的标准方式) 定义连续性. 我们还可以在线段不同的部位进行不同程度的局部收缩和拉伸, 甚至是弯曲, 只要变形不剧烈, 都不难在得到的空间上相应地定义连续性. 这些变形都是同胚的例子, 而且正因为有这些例子, 科普文章中经常出现的一种关于拓扑学的通俗 (但并不准确) 的解释就是: 拓扑学专门研究几何形体的那些在连续形变下不会被改变的性质.

下面让我们通过几个具体的例子来体会一下, 会有些什么样的性质是在连续形变下不发生改变的. 当然, 这里入选的拓扑性质都是一些早期的初等例子, 证明也不求严格, 只是为了找找感觉. 更深入的例子要等

我们正式定义了拓扑结构之后才能讨论.

Königsberg 七桥问题 (Königsberg bridge problem) 这个问题被公认为现代图论及拓扑学的开端. Königsberg(哥尼斯堡) 是条顿骑士团在中世纪建立的一个古老的城市, 后来一直是东普鲁士的首府, 不过现在归属于俄罗斯, 称为 Калинингра́д(Kaliningrad). 著名的 Königsberg 七桥问题是: 流经该城的 Pregel 河上有七座桥 (参见图 1), 能否设计一条散步的路线, 使得在一次散步中恰好可以经过每座桥各一次?

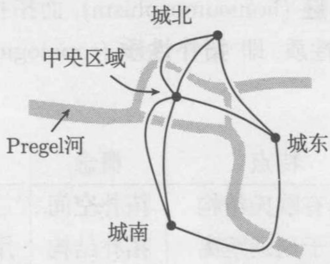

图 1 Königsberg 七桥问题的示意图

1736 年, Euler 在他的论文《Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis》(一个关于位置几何的问题的解) 中对该问题作出了完美的解答. 答案是不能, 理由如下.

Königsberg 被河流分割成了城南、城北、城东和中央区域四个地理区域, 如图 1 所示. 假如满足要求的散步路线存在, 那么对于路线起终点所在区域之外的每个区域, 与之相连的桥一定恰好有偶数座, 因为每次经过该区域都需要一座进来的桥和一座离开的桥. 但实际上四个区域都只和奇数座桥相连, 这就导出了矛盾. □

在这篇论文中 Euler 对 Königsberg 的地形图进行了一个重要的变形, 把它变成了一个由 **顶点** (vertex) 以及连接顶点的 **边** (edge) 构成的几何结构, 称为 **图** (graph). 被河流分开的每个区域被收缩成了一个点, 而每座桥则被拉长拉细成了一条弧线. 显然 Königsberg 七桥问题的解法也可以推广到一般的图上, 用来回答一个图能不能被“一笔画出”的

问题.

一个图 G 上如果有一个顶点和边交替出现的序列

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, v_n$$

(要求第一个和最后一个都是顶点), 使得每条边 e_i 的两个端点恰好是 v_i 和 v_{i+1}, 并且 G 的每条边在这个序列中恰好出现一次, 则称这个序列为图 G 的一条 **Euler 路径** (Eulerian path). 于是“能被一笔画出”就可以在数学上很严格地解释成“存在 Euler 路径”. 虽然是否存在 Euler 路径也是一个关于几何图形的问题, 但是却和古典几何所在意的那些事情 (比如边的长度以及边是如何弯曲的等等) 都完全无关. Euler 论文标题中的“位置几何”一词正是想表达此意. 对于一个图来说, “是否存在 Euler 路径”就是一个拓扑性质.

Euler 多面体定理 ((Euler's polyhedron theorem)) 在 1750 年写给 Goldbach (哥德巴赫) 的一封信中, Euler 提出了这样一个奇妙的结论:

$$\text{任意凸多面体的顶点数} - \text{边数} + \text{面数} = 2.$$

(Goldbach 是 Euler 的朋友, 他并不是职业数学家, 但是他和 Euler 保持了半辈子的书信联系, 像数论中著名的 Goldbach 猜想就是他在 1742 年写给 Euler 的一封信里提出的问题.)

Euler 本人并没有特别注意凸的问题, 这大概是因为从古希腊数学开始, 提到多面体的时候大家都是默认只考虑凸多面体. 对于有凹坑甚至有洞的多面体, 等号左边的交错和有可能不等于 2. 这个交错和称为 **Euler 数** (Euler characteristic), 它是数学家发现的第一个数字型的拓扑性质 (或者叫拓扑不变量). 当然, 一般情形下 Euler 数的拓扑不变性证明起来是很复杂的, 眼下我们也像 Euler 一样, 只考虑凸多面体, 这样比较容易证明.

从现代拓扑学的观点来看, 之所以算出来的结果总是 2, 是因为把任何凸多面体的表面撕开一个洞然后“扒开”, 都可以连续形变到平面. 我们就沿着这个思路构造一个几何证明.

如图 2 所示, 首先把多面体 Γ 放在三维欧氏空间中, 使得它的一个

面 σ 恰好平行于 xy 平面, 并且相对于这个多面体来说是位置最高 (即 z 坐标值最大) 的一个面. 然后在 σ 的中心点附近取一个 z 坐标稍微更大一些的点 A, 利用关于点 A 的中心投影, 将多面体表面 σ 以外的所有点投影到 xy 平面上去 (参见图 2). 只要 A 取得足够靠近 σ, 那么多面体的凸性将保证任意两点的投影都是不一样的. 这样就可以把多面体的表面 (拿掉 σ) 摊平成一个平面图形 Γ_π.

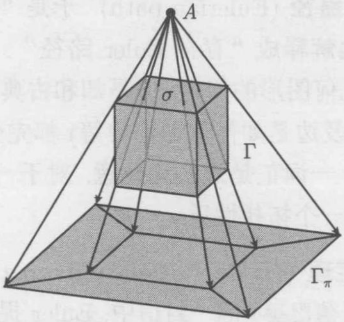

图 2 多面体的中心投影

Γ_π 有一个最"外边"的多边形 σ_π, 它同时也是面 σ 的投影. 这个多边形又被 Γ_π 的顶点和边分成很多小的多边形. 注意三角形的内角和是 π, 四边形可以对切成两个三角形, 所以内角和是 2π, 归纳可知 n 边形的内角和是 $(n-2)\pi$. 于是把所有这些小三角形的内角和加在一起, 应当得到

$$((2\times \text{总边数} - \sigma \text{ 的边数}) - 2\times(\text{总面数}-1))\times\pi.$$

另一方面, 多边形 σ_π 自身各顶点的内角和等于 (σ 的边数 $-2)\pi$, 而其他每个顶点处绕一圈的内角和应当是 2π, 于是前述总内角和也应当等于

$$((\sigma\text{的边数}-2)+2\times(\text{总顶点数}-\sigma \text{ 的顶点数}))\times\pi.$$

注意, σ 的顶点数和边数相等, 两式相比较立即可以得出:

$$2\times\text{总边数}-2\times\text{总面数}+2=-2+2\times\text{总顶点数},$$

也就是 Euler 定理的结论. □

Möbius 带 ((Möbius strip 或 Möbius band))　取一条很长的带子, 将其一端拧半圈然后和另一端粘合, 得到的图形称为 Möbius 带 (参见图 3). 这个图形其实是 Listing 最先画出来的, 而且他发现这个带子有很多有趣的、和平整的带子不一样的地方. 遗憾的是他漏掉了最有分量的一个性质：这个带子没有正反面之分.

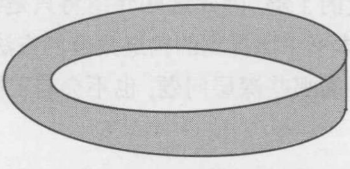

图 3　Möbius 带

一条带子如果不像上面的描述那样粘合, 本来是有正反面之分的, 我们称它 **可定向** (orientable). 而粘合成 Möbius 带的样子之后就不行了, 如果在带子上某个位置放一只小蜘蛛, 它不需要靠近带子边缘, 只要沿着带子爬行一圈, 就会爬到原来位置的“背面”去 (当然, 要假设它能一直附着在带子上不掉下来）. 这就是所谓的 **不可定向** (non-orientable), 是 Möbius (莫比乌斯) 在 1865 年的一篇论文中提出的. 是否可定向也是一个拓扑性质, 当然要写出一个数学上严格的定义并证明其拓扑不变性, 就比前面两个例子要麻烦多了, 我们留到第三章里再说.　□

Möbius 带大概是科普书籍中最著名的拓扑形象了, 围绕它还可以做其他的一些有趣的实验, 比如 Listing 就指出, 这个东西的边界是一条曲线而不是分开的两条曲线. 于是如果制作一个 Möbius 带的模型, 然后沿中线剪开, 可以得到一条 (而不是两条) 新的带子. 还可以将这条新的带子沿中线进一步剪开, 得到两条天然套在一起的带子 (读者可以自己动手试试或者想想为什么). 关于这些, 我们就不作进一步的论述了.

拓扑学正是起源于这样一些简单直观的思想. 不过现代拓扑学已经远远超越了这些初等的例子, 发展出了点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑等许多不同的研究方法和理论, 是一个非常庞大的数学分支, 并且对几何、代数、分析等许多其他数学分支都产生了广泛而深远的影响, 点集拓扑学更是早已成为学习掌握现代数学所必需的一种基本语言.

预备知识

在正式开始学习拓扑之前, 让我们先复习一下集合论的一些简单知识, 这些知识构成了点集拓扑语言的基础. 我们假定读者对于朴素的集合论已经具有了一定的了解, 因此这些介绍将只是蜻蜓点水式的简单回顾. 请读者选择相信本书中所提到的构造集合的方法都不会导致悖论, 集合论中涉及数学基础的那些深层问题, 也不会自己跳出来颠覆我们所发展的拓扑学方法.

首先解释几个常用的符号. 我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集. 另外读者可能在阅读上一节的时候已经注意到了, 每当一个命题或者例子证明完结的时候, 我们会画个方块 $\square$, 用来强调“已证完”的意思.

我们偶尔也会用下列特殊的逻辑符号简化文字说明: $\forall$ 表示“任取”, $\exists$ 表示“存在”, $\Rightarrow$ 表示“蕴涵”. 举个例子来说, $\forall x,\ A(x) \Rightarrow B(x)$ 就表示: 任取 x, 如果关于 x 的命题 $A(x)$ 成立, 则关于 x 的命题 $B(x)$ 也一定成立.

$A \Rightarrow B$ 这件事情除了 “A 蕴涵 B” 外, 还有一些其他称谓, 比如说 A 是 B 的 **充分条件** (sufficient condition), 或者 B 是 A 的 **必要条件** (necessary condition). 如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$, 则我们说 A 成立 **当且仅当** (if and only if)B 成立, 并称 B 为 A 的 **充要条件** (necessary and sufficient condition) 或 **等价条件** (equivalent condition), 记做 $A \Longleftrightarrow B$.

众所周知, 一个 **集合** (set) 就是把一堆 **元素** (element) 放在一起当作一个整体来看待. 当 x 是 A 的元素时我们也称 x **属于** (belong to)A, 记为 $x \in A$, 否则称 x 不属于 A, 记为 $x \notin A$. 两个集合相等当且仅当其所含元素完全相同. 于是证明两个集合 $A = B$ 的标准办法就是去证明

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

不含任何元素的集合称为 **空集** (empty set), 记做 $\varnothing$.

但并不是说随便把一堆对象拿出来放在一起就可以构成一个集合,