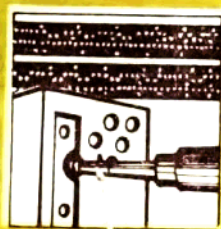
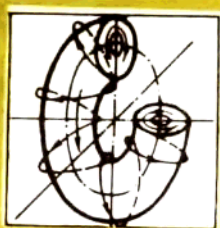
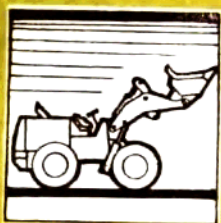


高等学校试用教材



# 塑性变形力学基础 与轧制原理

东北重型机械学院曹鸿德 主编



机械工业出版社

高等学校试用教材

# 塑性变形力学基础与轧制原理

东北重型机械学院曹鸿德 主编

1984.10.31



机械工业出版社



779009

## 前 言

本书是根据1978年4月在天津召开的“高等学校一机部对口专业座谈会”的精神和同年7月在齐齐哈尔召开的“轧钢机械专业教材编审会议”制订的大纲编写的。

在内容上系统地讲述了金属塑性变形力学的基本原理。对于求解压力加工下变形金属中的应力-应变分布问题的主要近似方法，如滑移线方法、变分方法及一般工程计算方法，都作了比较详细的介绍。轧制原理部分侧重于轧制过程的力能参数的计算。除系统地讲述纵轧原理外，在第十二章里还简要地介绍了斜轧原理。

在编写上我们曾力求用辩证唯物主义的观点科学地阐述本学科的基本理论和基本方法。为了体现加强基础理论及“起点高，内容新”的要求，注重了讲述塑性变形力学原理及反映本学科的最新成就和水平。在叙述方法上，注意了物理概念的阐述，力求作到深入浅出，简要明了，便于课堂讲授和自学，并保持理论的系统性。为了贯彻理论联系实际的原则，对于每一理论方法都列举了应用实例。

除作轧钢机械专业的塑性变形力学及轧制原理课程的教材外，可供压力加工类专业的大学生、研究生及工程技术人员参考。

本书由东北重型机械学院曹鸿德同志主编。第一至第五、第七及第九章由曹鸿德同志编写，第八、第十一及第十二章由太原重型机械学院李国桢同志编写，第六及第十章由东北重型机械学院张志志同志编写。东北工学院赵志业同志主审。东北工学院叶茂和王占学同志也参加了审稿工作。

由于编写时间仓促、编者水平有限，难免有不当和错误之处，请批评指正。

作者

79年10月

# 目 录

第一章 应力状态理论..... 1	§ 4-6 图解法.....54
§ 1-1 外力和内力..... 1	§ 4-7 数值积分法.....57
§ 1-2 应力的概念..... 2	§ 4-8 速度场.....58
§ 1-3 斜面上的应力..... 3	§ 4-9 速度矢量图(速度平面).....61
§ 1-4 主应力及应力张量的不变量..... 5	§ 4-10 滑移线方法向平面应力状态推广的条件.....63
§ 1-5 应力椭球..... 7	§ 4-11 窄锤头冲压厚板时的应力分布.....64
§ 1-6 应力摩尔图及主剪应力..... 8	§ 4-12 粗糙平行平板间金属层的压缩(不完全解).....66
§ 1-7 八面体应力.....11	§ 4-13 粗糙平行平板间金属层的压缩(完全解).....69
§ 1-8 应力张量的分解.....12	§ 4-14 窄锤头间的平面压缩及横轧.....71
§ 1-9 平衡微分方程式.....14	§ 4-15 平面拉拔.....76
第二章 应变状态理论.....17	§ 4-16 平面挤压.....78
§ 2-1 位移分量及转动分量.....17	§ 4-17 高轧件的轧制.....80
§ 2-2 应变分量.....17	第五章 变分方法.....85
§ 2-3 应变分量及转动分量与位移分量的关系.....19	§ 5-1 变分法的基础知识.....85
§ 2-4 单位相对位移张量及应变张量.....20	§ 5-2 弹-塑性变形理论的最小势能原理.....88
§ 2-5 主应变及应变张量不变量.....22	§ 5-3 用最小势能原理求解塑性问题的直接法.....92
§ 2-6 体积应变及不可压缩性条件.....24	§ 5-4 刚-塑性体的塑性流动理论的极值原理.....93
§ 2-7 应变张量的分解.....24	§ 5-5 平面应变问题的载荷上限估量值的计算.....96
§ 2-8 应变增量分量.....26	§ 5-6 轴对称问题方程式.....103
§ 2-9 应变速度张量.....27	§ 5-7 圆棒料拉拔的载荷上限估量值的计算.....104
§ 2-10 均匀变形.....29	§ 5-8 圆棒料挤压的载荷上限估量值的计算.....108
第三章 塑性状态理论.....31	§ 5-9 圆柱体的不均匀墩粗.....113
§ 3-1 拉伸图及应力-应变曲线.....31	第六章 确定表面压力的工程计算方法.....119
§ 3-2 塑性表面.....32	§ 6-1 接触表面的摩擦条件.....119
§ 3-3 最大剪应力等于常值的塑性条件.....33	§ 6-2 全滑动摩擦的平面墩粗的单位压力公式.....123
§ 3-4 单位弹性形状改变势能等于常值的塑性条件.....34	§ 6-3 混合摩擦的平面墩粗的单位压力
§ 3-5 加工硬化金属的塑性条件.....36	
§ 3-6 弹-塑性变形理论方程式.....38	
§ 3-7 塑性流动理论方程式.....39	
第四章 滑移线方法.....41	
§ 4-1 平面应变问题方程式.....41	
§ 4-2 滑移线.....44	
§ 4-3 汉基积分.....46	
§ 4-4 滑移线的几何性质.....48	
§ 4-5 应力平面.....51	

公式 .....	124	测定方法 .....	199
§ 6-4 圆柱体锻粗的单位压力公式 .....	129	§ 9-4 热轧摩擦系数的确定 .....	201
§ 6-5 轧制时的近似平衡微分方程式 .....	134	§ 9-5 冷轧摩擦系数的确定 .....	205
§ 6-6 粗糙斜面间金属楔的压缩 .....	137	<b>第十章 轧制压力的计算</b> .....	211
§ 6-7 奥洛万近似平衡微分方程式 .....	140	§ 10-1 轧制压力的计算方法 .....	211
§ 6-8 全滑动摩擦的轧制单位压力公式 .....	143	§ 10-2 接触面积的确定 .....	213
§ 6-9 混合摩擦的轧制单位压力公式 .....	145	§ 10-3 采利柯夫 (А. И. Целиков) 公式 .....	217
§ 6-10 轧制时单位压力分布的实验研究 .....	148	§ 10-4 勃兰特-福特 (Bland-Ford) 公式 .....	222
<b>第七章 轧制时金属的流动及轧制过程的建立</b> .....	151	§ 10-5 西姆斯 (R. B. Sims) 公式 .....	228
§ 7-1 变形区及其参数 .....	151	§ 10-6 斯通 (M. D. Stone) 公式 .....	230
§ 7-2 咬入条件 .....	152	§ 10-7 伊卓 (H. F. Izzo) 公式 .....	232
§ 7-3 轧制过程的建立 .....	154	§ 10-8 其它轧制压力公式 .....	235
§ 7-4 金属在变形区内各不同横断面上的流动速度之间的关系 .....	154	§ 10-9 轧件宽度对平均单位压力的影响 .....	239
§ 7-5 中性角的确定 .....	155	§ 10-10 外端对平均单位压力的影响 .....	243
§ 7-6 稳定轧制条件 .....	157	<b>第十一章 轧机传动力矩的计算</b> .....	246
§ 7-7 前滑和后滑 .....	158	§ 11-1 轧机传动力矩的组成 .....	246
§ 7-8 轧件的工程常用变形系数 .....	160	§ 11-2 金属对轧辊的作用力的方向 .....	248
§ 7-9 位移体积及对数变形系数 .....	161	§ 11-3 按轧制压力确定轧制力矩 .....	250
§ 7-10 轧制时的不均匀变形 .....	162	§ 11-4 按能耗曲线确定轧制力矩 .....	254
§ 7-11 轧件的宽展及各种因素对宽展的影响 .....	166	§ 11-5 轧辊弹性压缩对轧制力矩的影响 .....	258
<b>第八章 金属的塑性变形抗力</b> .....	173	§ 11-6 四辊轧机的辊系附加摩擦力矩的确定 .....	259
§ 8-1 变形抗力的概念 .....	173	<b>第十二章 斜轧原理</b> .....	264
§ 8-2 轧制时金属温度的变化 .....	174	§ 12-1 斜轧过程的运动学 .....	264
§ 8-3 温度对变形抗力的影响 .....	175	§ 12-2 接触面积的计算 .....	269
§ 8-4 变形程度对变形抗力的影响 .....	176	§ 12-3 斜轧时的平均变形速度及平均变形程度的确定 .....	271
§ 8-5 变形速度对变形抗力的影响 .....	177	§ 12-4 平均单位压力的计算 .....	273
§ 8-6 轧制时的平均变形速度及平均变形程度的确定 .....	179	§ 12-5 金属作用在顶头上的轴向力 .....	274
§ 8-7 确定变形抗力的实验曲线和经验公式 .....	181	§ 12-6 轧制力的作用方向及轧制力矩 .....	275
<b>第九章 轧制过程的滑动摩擦</b> .....	194	<b>附表 对称双中心扇形滑移线场节点座标值</b> .....	277
§ 9-1 滑动摩擦的种类 .....	194	<b>主要参考书目</b> .....	279
§ 9-2 轧制过程的滑动摩擦 .....	195		
§ 9-3 咬入和稳定轧制时的摩擦系数的			

# 第一章 应力状态理论

## § 1-1 外力和内力

金属的塑性变形是在外力的作用下产生的。作用在变形物体上的外力有两种：表面力和体积力（或称质量力）。

表面力是作用在变形物体表面上的外力。在金属压力加工中表面力是由变形工具对变形物体的作用而产生的，一般为分布载荷。金属的塑性变形通常是由这种表面力所引起的。作用在接触表面上的分布载荷，可分解为垂直接触表面的单位正压力  $P$  和切于接触表面的单位摩擦力  $\tau$ 。在接触表面上有切向摩擦力产生，是由于金属在变形过程中相对工具表面有滑动的趋势和产生滑动的结果。

体积力是作用于变形物体的所有质点（包括内部质点）上的力，如重力及惯性力等。惯性力的产生是由于在变形过程中，介质质点的流动速度发生变化的缘故。体积力与质量的大小成正比。质量力通常很小，故在本课程里，在一般情况下不考虑质量力的作用。

当物体上作用有外力时，在物体内便要产生与外力相应的内力。内力是物体的一部分和另一部分间相互作用而产生的力。如果想象用某一截面将在外力作用下处于平衡状态的物体切截一部分下来，并将物体作为整体存在时它部分对该部分的作用力在截面上保留下来，所切截下来的这部分物体在其表面上的

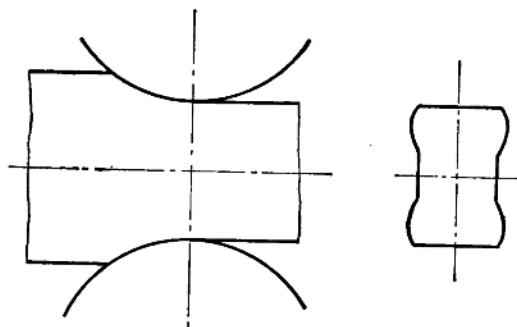


图1-1 轧制高轧件时的不均匀变形

的外力和截面上的内力的作用下将仍然处于平衡状态。变形物体内的内力不仅具有与外力相平衡的性质，而且具有在物体各部分间相平衡的性质。在物体变形时由于应变分布不均匀所引起的附加内力就是这样。如在轧制时，当轧辊直径比较小，而轧件的厚度较大时（如图 1-1 左图），塑性变形将主要地产生在接触表面附近的表层区域内，上、下层的金属得到的压缩显著地大于中间层的金属。从而表层金属力图得到较大的延伸，中层金属力图得到较小的延伸。由于轧件是一整体，特别是在塑性变形区的前后有非塑性状态区存在，塑性区内各层金属通过非塑性区相互作用的结果，在上、下表层内产生纵向压内力，在中间层内产生纵向拉内力，这些内力在轧件内自相平衡。表层金属纵向延伸被限制的结果，被迫产生横向流动，使轧件的横断面呈中凹状（图 1-1 右图）。中部金属有时在拉内力的作用下而产生裂纹。

在加热不均和冷却不均时都会产生类似的内力。在本课程内，主要研究与金属塑性流动有关的内力。

## § 1-2 应力的概念

为了引出应力的概念，想象用某一平面  $F$  将在外力作用下处于平衡状态的物体切截成两个部分（图 1-2）。考虑物体作为整体存在时，物体的一部分（如  $B$  部分）对另一部分（如  $A$  部分）沿截面  $F$  所作用的内力。一般来讲，内力沿截面的分布是不均匀的。在截面  $F$  上的任一点  $M$  周围取一面素  $\Delta F$ 。如果面素  $\Delta F$  上的作用力的主矢用  $\Delta P$  表示，则比值

$$\frac{\Delta P}{\Delta F}$$

称为面素  $\Delta F$  上的平均应力。若使面素  $\Delta F$  的轮廓围绕其上的一点  $M$  进行收缩，则在面素  $\Delta F$  减小的同时作用力主矢  $\Delta P$  的大小将减小，其方向将改变，极限

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = S_n$$

就称为  $M$  点在面素  $\Delta F$  上的应力。应力为矢量，通常将  $S_n$  称为全应力，以区别由其分解所得到的应力分量。

由于处于应力状态（在外力作用下处于平衡状态）的物体的各质点，都处于和其周围所有质点发生作用的状态之中，因此面素  $\Delta F$  在空间处于任何方位时在  $M$  点都有应力存在。并且在一般情况下，应力的大小和方向彼此不相同。由此可见，应力  $S_n$  不仅依赖于  $M$  点（ $\Delta F$  的中心）的位置——座标  $(x, y, z)$ ，而且和面素  $\Delta F$  的方位有关。过一点

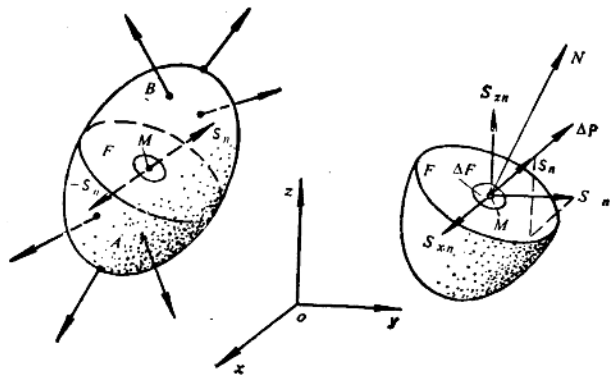


图1-2 面素上的内力和应力

$M$  可作无限多个方位不同的面素，可得无数多个  $M$  点的全应力。由此可得结论，一点的应力状态不能用一个矢量简单地加以表示，一点的应力状态是一个具有一定性质的由该点在各方位不同的面素  $\Delta F$  上之无限多个应力矢量所构成的矢量集合。不计质量力的作用，该矢量集合乃是一种比矢量更为复杂的量——张量。

下面研究应力的分解。引用直角坐标系  $oxyz$ （图 1-3），空间某一点  $M$  的座标用  $(x, y, z)$  表示，而沿座标轴方向的单位矢量以  $e_x$ 、 $e_y$ 、 $e_z$  表示。点在某一外法线为  $N$  的平面上的应力  $S_n$ ，为其在三个座标方向上的三个分量的几何和

$$S_n = e_x \cdot S_{xn} + e_y \cdot S_{yn} + e_z \cdot S_{zn} \quad (1-1)$$

式中  $S_{in} = S_n \cdot e_i$  ( $i = x, y, z$ )

为矢量  $S_n$  在座标轴上的投影。

在应力状态理论中，具有重要意义的是点在三个垂直座标方向的平面（座标平面）上的应力。面素  $\Delta F$  处在平行座标平面的方位时，全应力矢量沿三个座标方向  $x$ 、 $y$  及  $z$  分解

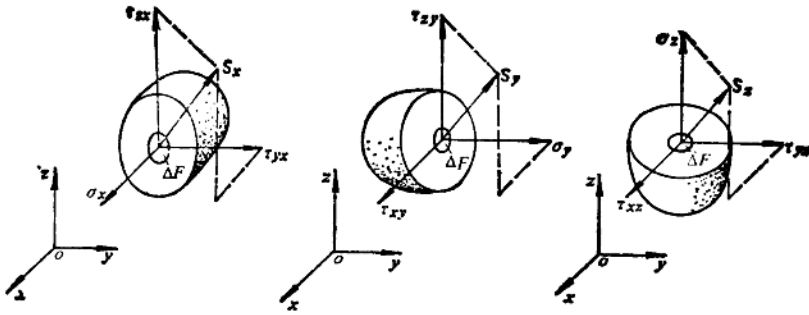


图1-3 坐标平面上的全应力的分解

的三个应力分量：一个为垂直于作用面的法应力分量，用 $\sigma$ 表示；两个为切于作用面的剪应力分量，用 $\tau$ 表示（图1-3）。在垂直 $x$ 轴的坐标平面上全应力可表示为：

$$\mathbf{S}_x = e_x \sigma_x + e_y \tau_{yx} + e_z \tau_{zx} \quad (1-2 a)$$

在垂直 $y$ 及 $z$ 轴的坐标平面上，则有

$$\mathbf{S}_y = e_x \tau_{xy} + e_y \sigma_y + e_z \tau_{zy} \quad (1-2 b)$$

$$\mathbf{S}_z = e_x \tau_{xz} + e_y \tau_{yz} + e_z \sigma_z \quad (1-2 c)$$

对于各应力分量按下述规则标记角标：

以和应力分量相平行的坐标轴的符号为第一个角标，表示应力分量的方向；以和应力作用面相垂直的坐标轴的符号为第二个角标，表示应力的所在平面。对于法应力分量，表示应力方向和作用面的角标相同，为了简化可采用一个角标。

关于应力分量的正负号作如下规定：拉伸法应力规定为正；在外法线与坐标轴正方向一致的坐标平面上，剪应力指向坐标轴正方向时为正；在外法线指向坐标轴负方向的坐标平面上，剪应力指向坐标轴负方向时为正。

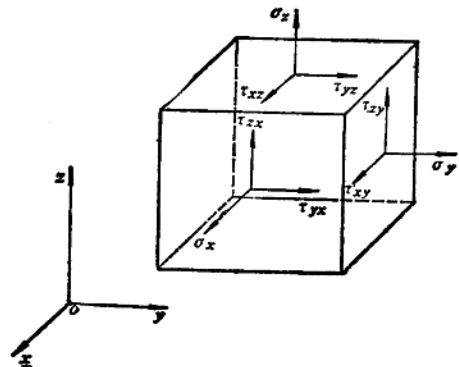


图1-4 应力状态图示

可将点在三个相互垂直的坐标平面上的应力，表示在认为是无限小的直角六面体的表面上，由此所得到的图形称为应力状态图示（图1-4）。

### § 1-3 斜面上的应力

如前所述，一点的应力状态乃是点在各不同平面上的无限多个应力矢量的集合。

由此可以提出这样一个问题：欲知一点的应力状态，是否需要知道矢量集合中的每个矢量呢？根据所研究点处于静力平衡状态的条件，可以证明，如果已知一点在通过其本身的三个相互垂直平面（坐标平面）上的应力，则点在通过它的任何一个平面上的应力均可求得。



为此,取一四面体体素(图1-5),以四面体的三个相互垂直的棱线为座标轴。假定所研究点和座标原点相重合。由外法线 $N$ 所决定的四面体的斜面 $dF$ ( $\triangle abc$ )相对座标轴是任意的。如果使所取的四面体的棱线无限减小,在极限的情况下四面体将趋于一点,此时作用在四面体各面上的应力即为所研究点在这些平面上的应力。因此,可根据四面体的平衡条件来确定点在不同平面上的应力间的解析关系。

四面体的垂直座标方向 $x$ 、 $y$ 及 $z$ 的各表面的面积,分别用 $dF_x$ 、 $dF_y$ 及 $dF_z$ 表示。把作用在正向座标平面(外法线指向座标轴正方向的平面)上的全应力 $S_i$ ( $i = x, y, z$ )视为正。

根据静力平衡条件,作用在微小四面体 $abcO$ 各面上的所有作用力的几何和应该等于零,即

$$S_n dF = S_x dF_x + S_y dF_y + S_z dF_z$$

或写为

$$S_n = S_x \frac{dF_x}{dF} + S_y \frac{dF_y}{dF} + S_z \frac{dF_z}{dF} \quad (1-3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_x}{dF} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x = \cos(N, x) = \alpha_x \\ \frac{dF_y}{dF} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y = \cos(N, y) = \alpha_y \\ \frac{dF_z}{dF} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \cos(N, z) = \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

$\mathbf{n}$ ——为外法线 $N$ 方向上的单位矢量。

所以方程式(1-3)可写为

$$S_n = S_x \alpha_x + S_y \alpha_y + S_z \alpha_z \quad (1-5)$$

式中 $\alpha_i$ ( $i = x, y, z$ )称为外法线 $N$ 的方向余弦数值。

根据公式(1-1)和(1-2),由矢量方程式(1-5)可得如下三个代数方程式

$$\left. \begin{aligned} S_{xn} &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ S_{yn} &= \tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ S_{zn} &= \tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

或写成缩写式

$$S_{in} = \sigma_{ij} \alpha_j \quad (i, j = x, y, z)$$

由上式可知,如果已知一点在通过其本身的三个相互垂直的座标平面上的三个全应力矢量或其在三个座标轴上的九个投影,该点在通过其本身的任一斜面上的应力均可求得。也就是说,一点的应力状态决定于对应座标方向的三个全应力矢量或其在三个座标方向上的九个分量(标量),因而是一张量。九个应力分量称为应力张量的分量。

张量可用由其分量组成的矩阵表示。应力张量通常是用如下的矩阵表示

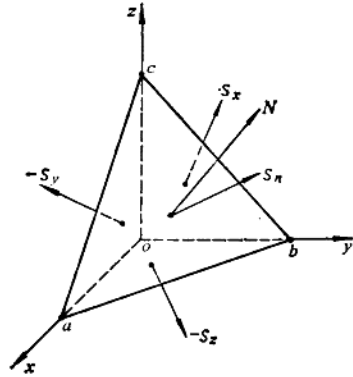


图1-5 四面体上的应力

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

在矩阵的各横行中，各应力的方向相同，应力按所在平面（第二个角标）的顺序排列。各纵列内是同一平面上的三个应力分量，各应力按作用方向（第一个角标）的顺序排列。

实际上，点的应力状态张量并非决定于九个应力分量，而是决定于六个。因为相对矩阵主对角线，位于对称位置上的剪应力彼此互等

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1-8)$$

角标顺序彼此颠倒的两剪应力在数值上互等这一定理，可根据体素的力矩平衡条件加以证明。

由于在表示应力张量的矩阵中，位于主对角线之对称位置上的剪应力互等，因此点的应力状态不仅是一张量，而且是对称张量。据此，为了书写方便可将应力张量的矩阵写为

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$

根据公式 (1-1)，已知斜面上的全应力矢量在坐标轴上的投影，可按下式计算全应力的大小

$$S_n^2 = S_{xn}^2 + S_{yn}^2 + S_{zn}^2 \quad (1-10)$$

如果将  $S_n$  视为作用在物体表面  $F$  上的表面应力（外力），公式 (1-6) 中的  $S_{xn}$ 、 $S_{yn}$  及  $S_{zn}$  则为其在坐标方向上的分量，此时该式即成为边界条件方程式。

## § 1-4 主应力及应力张量的不变量

根据张量的理论，对称张量有三个相互垂直的主轴方向存在。具体来讲，对于应力张量就是有这样三个相互垂直的坐标方向存在，在垂直这三个坐标方向的三个平面上只有法应力分量，剪应力分量等于零。

对称张量的三个主轴方向，通常用数字 1、2、3 表示。垂直主轴方向的平面称主平面，作用在主平面上的应力（法应力）称主应力。三个主应力分别用符号  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  表示。

如图 1-6 所示，假定斜面的外法线方向  $N$  为任一主方向，关于坐标轴的方向余弦数值用  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_z$  表示。斜面上的应力则为任一主应力，用  $\sigma_i$  表示。故，对于方程式 (1-6) 的左侧各项有

$$S_{xn} = \sigma_i \alpha_x, \quad S_{yn} = \sigma_i \alpha_y, \quad S_{zn} = \sigma_i \alpha_z$$

将该关系式代入到方程式 (1-6) 中去，则得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z &= 0 \\ \tau_{yx} \alpha_x + (\sigma_y - \sigma_i) \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z &= 0 \\ \tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y + (\sigma_z - \sigma_i) \alpha_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

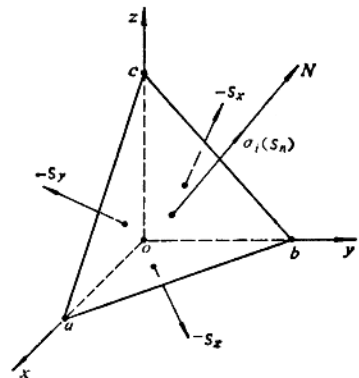


图1-6 斜面为主平面的四面体上的应力

方程式 (1-11) 是关于三个方向余弦的齐次线性方程组。利用该方程组和关系式

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1 \quad (1-12)$$

可以确定四个未知数:  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_z$  及  $\sigma_i$ 。根据关系式 (1-12), 三个方向余弦数值不可能同时为零。因此, 方程组 (1-11) 必定有非零解, 所以下面的行列式等于零

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_i) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_i) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_i) \end{vmatrix} = 0 \quad (1-13 a)$$

将行列式展开, 得

$$-\sigma_i^3 + J_1\sigma_i^2 + J_2\sigma_i + J_3 = 0 \quad (1-13 b)$$

式中

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ J_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1-14)$$

三次方程式 (1-13) 称为应力状态特征方程式。对该方程式求解, 可得三个实根——三个主应力值  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  及  $\sigma_3$ 。将所求得的主应力值代入方程组 (1-11) 中去, 应用其中的两个方程式, 即可求出相应主轴的三个方向余弦的比值。再利用关系式 (1-12) 即可求出方向余弦的数值。

在导出应力状态特征方程式 (1-13) 时, 坐标系  $oxyz$  的选取是任意的。而主应力值对于任一给定的应力状态是一定的。因此, 对于任一给定的应力状态, 不管所选取的座标方向如何, 方程式 (1-13) 的系数  $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  将具有相同的数值, 即当座标轴转动时这些系数保持不变。由此, 称这些系数为应力状态张量的不变量,  $J_1$  称为应力状态张量的一次不变量;  $J_2$ ——二次不变量;  $J_3$ ——三次不变量。应力张量的这三个不变量, 亦可由主应力给出:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} (1-15)$$

应力张量不变量具有十分重要的意义。只有不变量和由不变量组成的解析式才能反映应力状态的强度特性。因为一点的应力状态, 不依座标系的选取而改变, 因此, 表示应力状态强度特性的量, 亦不应和座标系的选取有关。

应力张量一次不变量的三分之一等于平均应力:

$$\frac{1}{3}J_1 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma \quad (1-16)$$

平均应力和体积的弹性改变成正比。

一次不变量的平方与三倍二次不变量之和

$$J_1^2 + 3J_2$$

同单位弹性形状改变势能成正比。

应力张量亦可由三个主方向及相应的三个主应力值给出

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (1-17)$$

所以，关于主轴方向对称张量只有三个独立分量。

已知主方向和主应力的大小，同样可确定任一斜面上的应力。这时方程式 (1-6) 变为

$$\left. \begin{aligned} S_{1n} &= \sigma_1 \alpha_1 \\ S_{2n} &= \sigma_2 \alpha_2 \\ S_{3n} &= \sigma_3 \alpha_3 \end{aligned} \right\} (1-18)$$

式中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ——斜面外法线  $N$  相对主轴的方向余弦数值。

斜面上的全应力

$$\begin{aligned} S_n^2 &= S_{1n}^2 + S_{2n}^2 + S_{3n}^2 \\ &= \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2 \end{aligned} \quad (1-19)$$

表示一点的主应力的方向和应力的状态图示称为主应力图示。按主应力的存在情况和主应力的方向，主应力图示共有九种：四种体应力图示，三种平面应力图示，两种线应力图示（见图 1-7）。主应力图示是应力状态的分类工具，所有可能的应力状态都包括在这九种应力状态之内。

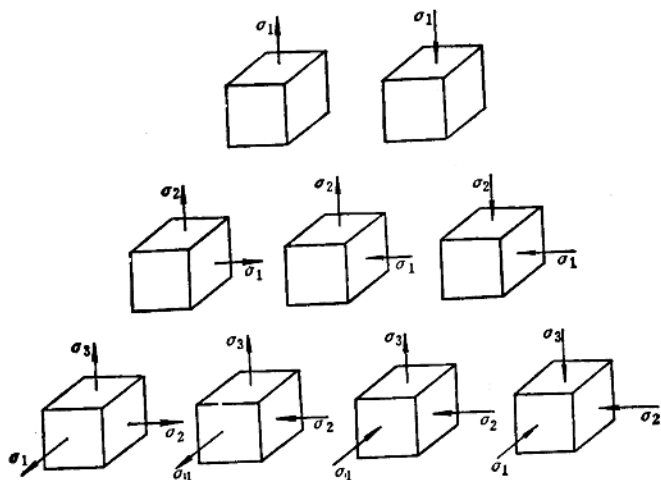


图1-7 主应力图示

## § 1-5 应力椭球

为了对点在各不同斜面上的应力有一清晰的概念，我们来研究一应力状态的几何图示——拉梅应力椭球。

假定应力主轴和主应力为已知，根据方程式 (1-18)，斜面上的全应力在主轴上的投影

$$S_{1n} = \sigma_1 \alpha_1, \quad S_{2n} = \sigma_2 \alpha_2, \quad S_{3n} = \sigma_3 \alpha_3$$

从所研究点  $O$  引一矢量  $\vec{OP}$ ，使其等于斜面上的全应力  $S_n$ 。因此，矢量端点  $P$  的坐标  $(x, y, z)$  等于全应力在坐标轴上的投影，即

$$x = S_{1n}, \quad y = S_{2n}, \quad z = S_{3n}$$

将上述等式代入到方程式 (1-18) 中去，得

$$x = \sigma_1 \alpha_1, \quad y = \sigma_2 \alpha_2, \quad z = \sigma_3 \alpha_3$$

由此求得

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad (1-20)$$

对于给定的应力状态，主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  及  $\sigma_3$  是定值，因此方程式 (1-20) 是一关于主轴的椭球方程。这表明，当斜面绕  $O$  点转动时，全应力矢量端点的轨迹为一椭球面。由方程式 (1-20) 所确定的这一椭球面，即谓应力椭球。它的三个主半轴，表示该点三个主应力的大小。由于椭球的任一直径，均不超过其最大主轴的长度，所以点的最大应力是点的最大主应力（按绝对值）。

如果三个主应力中有两个绝对值相等，则应力椭球将变为旋转椭球体。如果三个主应力中有两个不仅绝对值相等，而且符号相同，则在通过第三个主方向的所有平面上，应力的绝对值及符号均相同，并且垂直于作用面。这时，在垂直第三个主方向的坐标平面上，任意两个相互垂直的坐标轴均为主轴。

如果所有的三个主应力的绝对值及符号均相同，椭球将变为球，空间内的任意三个相互垂直的坐标轴均为主轴。在所有的斜面上都只作用有法应力，并且应力的大小和符号都相同。换句话说，点处于各向均匀拉伸或各向均匀压缩应力状态。此时应力张量可表示为

$$T_o = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma \end{Bmatrix} \quad (1-21)$$

这样的应力张量称为应力球张量。

如果有一个主应力为零，则椭球即变为椭圆，此时乃为平面应力状态。

## § 1-6 应力摩尔图及主剪应力

应力摩尔图亦为表示一点应力状态的一种几何图示。由应力图可以确定点在各不同平面上的应力值。

将斜面上的全应力  $S_n$  分解为两个分量：与外法线方向相重合的法应力  $\sigma_n$  和切于斜面的剪应力  $\tau_n$ 。（见图 1-9）。法应力分量

$$\sigma_n = S_n \cdot n \quad (1-22)$$

式中  $n$ ——斜面外法线方向的单位矢量

$$n = \alpha_x e_x + \alpha_y e_y + \alpha_z e_z$$

根据公式 (1-1) 将  $S_n$  值代入上式 (1-22)，求得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (e_x S_{x_n} + e_y S_{y_n} + e_z S_{z_n}) \times (\alpha_x e_x + \alpha_y e_y + \alpha_z e_z) \\ &= S_{x_n} \alpha_x + S_{y_n} \alpha_y + S_{z_n} \alpha_z \end{aligned}$$

由此，考虑到关系式 (1-18) 则有

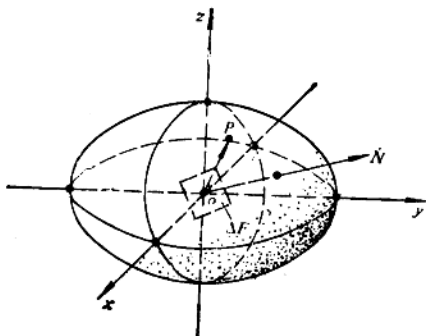


图1-8 拉梅应力椭球

$$\sigma_n = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2 \quad (1-23)$$

剪应力分量

$$\tau_n^2 = S_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2 - (\sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_2 \alpha_2^2 + \sigma_3 \alpha_3^2)^2 \quad (1-24)$$

此外，三个方向余弦数值满足下列关系式

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

对上述方程组关于方向余弦  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  及  $\alpha_3$  联立求解，得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \alpha_2^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \\ \alpha_3^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \right\} (1-25)$$

变换后，将具有如下形式

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \alpha_1^2 + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1-26 a)$$

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2) \alpha_2^2 + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1-26 b)$$

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) \alpha_3^2 + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (1-26 c)$$

取  $\sigma_n$  为横坐标轴、 $\tau_n$  为纵坐标轴，上述方程组中的每一方程式均表示一族同心圆，各族同心圆的圆心均位于横轴上，而圆心到坐标原点的距离分别为：

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

当方程式中的对应的方向余弦数值由零变到 1 时，圆的半径将相应发生改变。假定  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，对于方程式 (1-26 a)，由于  $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)$  为正，所以当  $\alpha_1$  由零变化到 1 时，半径将由  $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$  增大至  $\left[ (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$ 。对于方程式 (1-26 b)，由于  $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2)$  为负，所以当  $\alpha_2$  由零变化到 1 时半径将由  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  减小至  $\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2) + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$ 。对于方程式 (1-26 c) 由于  $(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)$  为正，所以当  $\alpha_3$  由零变化到 1 时，半径将由  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$  增大至  $\left[ (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$ 。

半径为  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ 、 $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  及  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  的这三个圆称为主应力圆。由主应力圆构成的几何图形称应力摩尔图 (见图 1-10)。

给定斜面的方向余弦数值，可在应力图上找出表示斜面的应力值的点  $a$ 。根据方程式 (1-26)  $a$  点必位于同心圆族的三个确定的圆的交点上。因此，在应力图上决定各斜面的应力

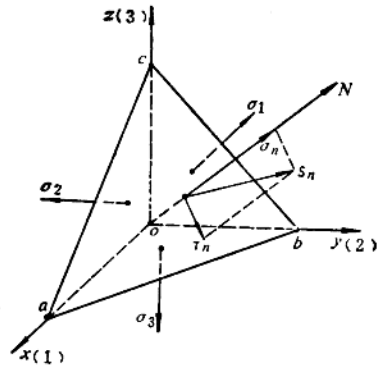


图1-9 斜面上的全应力的分解

值的各点必位于主应力圆围成的曲线三角形上。

主应力圆上的各点的坐标值，表示通过某一主轴方向的各斜面上的应力值。例如，当斜面通过主轴 2（外法线与主轴 2 相垂直）且绕其转动时，表示斜面上的应力值的点，将在方程式 (1-26 b) 确定的主应力圆的圆周上，朝相反的方向转动（见图 1-11）。

由应力图可以看出，当斜面分别通过三个主轴，又以三个主轴为轴转动时，剪应力将达到三个数值不同的极值。剪应力的这三个极值，在应力状态理论中称为主剪应力，主剪应力所在平面称为主剪应力平面。根据应力图，三个主剪应力为

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_3 &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \right\} (1-27)$$

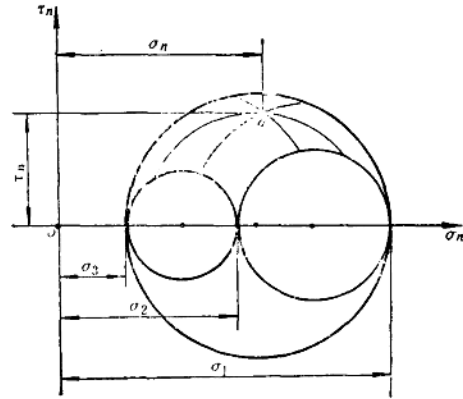


图1-10 应力摩尔图

主剪应力为剪应力的极大值，所以其中最大者为最大剪应力。因此，最大剪应力等于代数最大的主应力与代数最小的主应力之差的一半。由应力图可求得，三个主剪应力平面上的法应力分别为

$$\frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3), \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3), \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1-28)$$

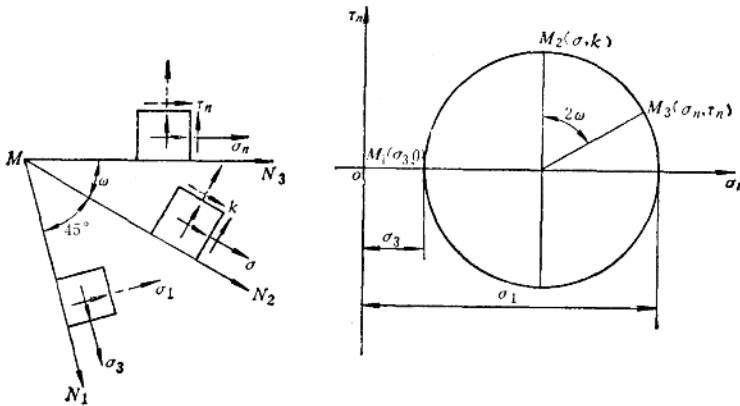


图1-11 面素方位改变时表示应力的点在应力圆上位置的变化

当三个主应力增加或减小某一相同数值即叠加各向均匀拉伸或各向均匀压缩应力状态时，由方程式 (1-26) 可知，应力图中的主应力圆的半径不变，因而剪应力的大小不变，只是整个应力图沿  $\sigma_n$  轴移动。如果三个主应力值相等，应力图收缩为一点，各面上的剪应力值均等于零，而法应力为一常值，此即谓应力球张量。由应力图还可以看出，法应力的最小值

为最小主应力  $\sigma_3$ ，法应力的最大值为最大主应力  $\sigma_1$ 。

以主剪应力平面上的主剪应力和法应力的数值代替方程式 (1-25) 中的  $\tau_n$  和  $\sigma_n$ ，可求得相应的主剪应力平面的方向余弦数值（见右表）。三组方向余弦数值，每组决定两个通过同一主轴且和另外两个主轴成  $45^\circ$  相交的平面（外法线与一个主轴相垂直，与另外两个主轴成  $45^\circ$  和  $135^\circ$ ）。因此，通过主轴且平分主平面二面角的主剪应力平面总计有三对（见图1-12）。

主剪应力	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

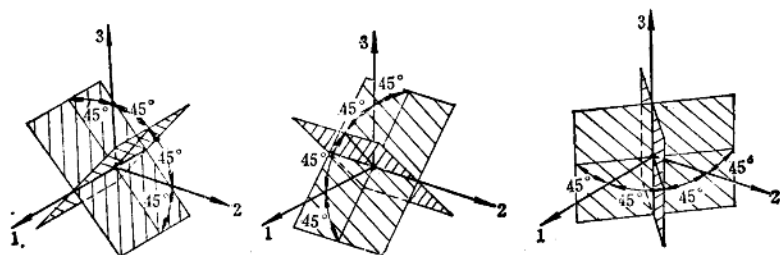


图1-12 主剪应力面图示

## § 1-7 八面体应力

除了主剪应力外，与主轴成等倾的平面（外法线关于主轴的三个方向余弦的绝对值相等的平面）上的剪应力，在塑性理论中具有重要的意义。

如果已知主应力和应力主方向，应用公式(1-23)和(1-24)可求得任意斜面上的应力。现在利用这些公式来确定相对三个主轴方向成等倾的斜面上的应力。在座标系统的八个卦限中可以作出八个这样的斜面，在空间内构成一个八面体（见图1-13）。因此，称等倾平面为八面体平面，称其上的应力为八面体应力。

八面体平面的外法线  $N$  关于三个主轴方向的方向余弦的绝对值相等。用  $\alpha$  表示八面体平面的方向余弦数值，则有

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 3\alpha^2 = 1$$

由此求得

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

根据方程式 (1-13)，八面体全应力

$$S_8 = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \quad (1-29)$$

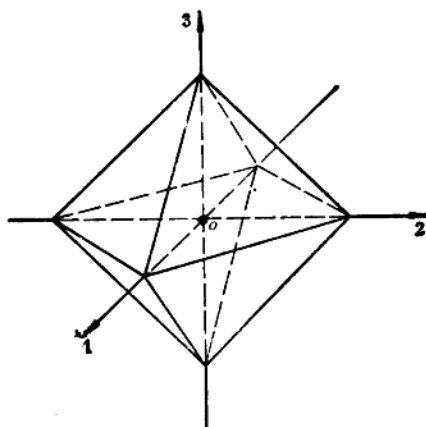


图1-13 八面体图示



八面体全应力的平方等于主应力平方和的三分之一。

根据公式(1-23)，八面体法应力

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma \quad (1-30)$$

八面体法应力等于平均应力。

根据公式(1-24)，八面体剪应力

$$\tau_8^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

将上式展开，整理后得：

$$\tau_8^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

由此得

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1-31)$$

八面体剪应力等于主应力差之平方和的平方根的三分之一。

### § 1-8 应力张量的分解

在分解一点的应力张量时，可设想用这一点的平均应力为分量构成一应力球张量：

$$T_\sigma'' = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma \end{Bmatrix}$$

式中

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}J_1$$

应力球张量  $T_\sigma''$  表示作用于点上的各向均匀拉伸或各向均匀压缩应力状态。由于增加各向均匀拉伸或各向均匀压缩应力状态，只意味着在法应力上增加或减去某一相同的数值，并不改变剪应力的大小。因此，由应力张量  $T$  减去球张量  $T_\sigma''$  可表示为

$$\begin{aligned} T_\sigma - T_\sigma'' &= \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & (\sigma_z - \sigma) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma'_z \end{Bmatrix} = T'_\sigma \end{aligned} \quad (1-32 a)$$

所得到的张量  $T'_\sigma$  称为应力偏张量，其法应力分量

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma \quad (1-32 b)$$