

阶梯奥数

脑筋急转弯

一辆火车由甲地到乙地全程需要6小时，行使3小时后，火车应该在什么地方？

主编 / 陈国强

本书适用于五、六年级



答案：

在铁轨上



上海科学普及出版社

阶 梯 奥 数

1(下)

(本书适用于五、六年级)

陈国强 主编

上海科学普及出版社

内 容 提 要

本书是为小学高年级和初中阶段在数学学习上学有余力的优秀学生提供的竞赛培训教材或数学较好者自学的课外读物。

该书是一些长期在第一线从事数学竞赛数学的教师多年实践的知识积累和总结。按照学生所学基础知识的程度,由浅入深、从易到难、分门别类地把内容归纳成许多专题,在每个专题中力求简炼地介绍知识的由来、要点和重要定理及公式,再通过典型的例题和练习来展开知识的探究,并进行归纳和总结。从而使学生一级一级地沿着知识的阶梯循序渐进,这种做法将有利于培养学生学习数学和兴趣和自信心。

主 编：陈国强

副主编：夏钟英

编 委：夏钟英	唐清成	朱 瑞	李岚雄
郑曾波	张 达	朱文革	陈慧珍
魏新魁	刘淑珍	常文武	郭震渔
施 斌	田廷彦	魏 磊	王之任

序

现在我们常说的一个名词是“素质教育”。到底素质教育指的是什么？是不是简单地指那些课外的活动？学生除了正常的文化课学习以外，再搞一些舞蹈、书法班的训练，就算是得到素质教育了？不可否认，艺术教育也提高学生的素质。但是素质教育的内容也许应该更加广一些，我们学生现在所需要的素质也应该包括文化课的素质。

我对中学的教育也很感兴趣，曾经认识了几位中学的校长，我们对学校素质教育的看法在很大程度上有相同之处，大家认为素质教育也应该体现在文化课的教育中，特别是数学教育中。在进华中学陈国强校长的倡导下，几十位多年从事中学数学提高教育的大学教授、数学博士、奥数教练员、中学资深数学教师聚集一起，开始了在数学课程教育中的实验。我们的主要想法是通过数学课程的教育让学生认识数学、理解数学、掌握数学，这就是学生所需要的素质。这个实验已经进行了六年多了，收到了不错的效果，培养出一大批有扎实数学基础的初中毕业生。

现在的这套书，是实验的一部分，希望暨此能够提高学生学习数学的兴趣。很小的时候我也读过一些有趣的数学小册子，但现在这些小册子很难找了，不敢说现在的这套书十全十美了，但是对于希望理解数学、学习奥数的小学中高年级和初中学生，应该是有帮助的。

我很希望这套书能够受到学生们的喜欢,也希望看到有更多的这类书能够出版。

上海交通大学数学系教授 周 青

2003.3.25

目 录

第一讲	平均数问题	1
第二讲	还原问题	8
第三讲	归一问题	15
第四讲	牛吃草问题	21
第五讲	分数的计算	31
第六讲	分数数列求和	39
第七讲	分数与百分数应用题	46
第八讲	巧配浓度	57
第九讲	工程问题	64
第十讲	行程问题	73
第十一讲	比和比例	83
第十二讲	钟面上的数学	92
第十三讲	圆的周长和面积	98
第十四讲	扇形	105
第十五讲	长方体与正方体	112
第十六讲	圆柱与圆锥	120
第十七讲	同余	128
第十八讲	韩信点兵	134
第十九讲	奇数与偶数(一)	141
第二十讲	质数与合数	147
第二十一讲	逻辑推理(一)	152
第二十二讲	抽屉原理(一)	162
第二十三讲	不定方程(一)	170
第二十四讲	数的进制	177
第二十五讲	形形色色的最值问题	183



脑筋急转弯

与电脑打交道
的小李是怎样解释
“一轮明月”的?



答案:

“光盘”。

第二十六讲	将军饮马并不难	189
第二十七讲	想起丁谓施工	199
第二十八讲	奇妙的染色解题法	207
第二十九讲	取胜策略	214
附	参考答案及提示	220

智力魔方

“人生自古谁
无死”选自文天祥
的哪一首诗？

答案：

《过零丁洋》。

第一讲 平均数问题

小明学校欲推选市三好学生一人,候选人有四人,统计结果表明:有效选票(不含弃权票,即只在一位候选人姓名上面打“√”的选票)共 2511 张,稍后的统计显示:

当选者超出其他三位对手的票数分别是 72、29、24.

小朋友,你知道四个人各得票多少吗?

小明想:这很容易,不就是平均数问题吗?先算平均数,再进行加减不就行了?试试看

$$2511 \div 4 = 627.75 \quad \text{出现了小数!}$$

小华想:总票数中应先减去 72、29、24,然后再求平均数:

$$[2511 - (72 + 29 + 24)] \div 4 = 596.5, \text{又出现了小数!}$$

这是谁的得票数呢?仔细想想发现:谁的都不是.

这一问题该怎么算?画图试一试.

由图 1-1 中可以看出,每一位对手,再加上其差额,就与当选者的票数相等.所以正确解法为:

$$[2511 + (72 + 29 + 24)] \div 4$$

$$= 659$$

这恰好是当选者所得票数,而其余三位所得票数分别为: $659 - 72 = 587$, $659 - 29 = 630$, $659 - 24 = 635$.

在日常生活中,我们常能遇到有关平均数的问题,数学竞赛中平均数也用得很多.

求平均数问题的基本数量关系是:

 脑筋急转弯

电脑中的什么操作叫“司机拒载”?

 答案:

回车。

$$\begin{array}{r} \text{_____} \\ \text{_____} \quad 72 \\ \text{_____} \quad 29 \\ \text{_____} \quad 24 \\ \hline \end{array}$$

图 1-1

$$\begin{array}{r} 2511 \\ + 125 \\ \hline 2636 \\ \hline 659 \end{array}$$

总数量 $\div$ 总份数 = 平均数;

平均数 $\times$ 总份数 = 总数量;

总数量 $\div$ 平均数 = 总份数.

【例1】 同学们春游时拍照,用去一卷可拍36张底片的胶卷,一卷胶卷21元,冲洗费4.2元,每印一张照片0.8元,平均每张照片多少元?

分析:要求“平均每张照片多少元”,就要用“总价 $\div$ 照片总数”,其中总价为一卷胶卷21元加冲费4.2元,还要加上印36张的钱.

解: $(21 + 4.2 + 36 \times 0.8) \div 36 = 1.5$ (元).

答:平均每张照片1.5元.

【例2】 小明参加了四次语文测验,平均成绩是68分,他想在下次语文测验后,把五次的平均成绩提高到70分以上,那么,在下次测验中,他至少要得多少分?

分析:由“平均 $\times$ 总份数 = 总数量”可求得前四次考试的总分;如果五次平均在70分以上.

解: $70 \times 5 - 4 \times 68 = 78$.

答:在下次测验中,他至少要得78分.

【例3】 小雪读《哈里·波特》这本书,第一天读了75页,第二天读了85页,第三天读了62页,第四天读了90页,第五天读的页数比五天中平均读的页数还多16页.问小雪在第五天读了多少页?

分析:可列方程解,设第五天读了 x 页,那么五天平均读的是 $(x-16)$ 页;列出方程的等量关系是:五天读的页数和 = 五天平均读的页数 $\times 5$

解:设小雪在第五天读了 x 页,

$75 + 85 + 62 + 90 + x = 5(x - 16)$,

$x = 98$.

答:第五天读了98页.

智力魔方

古龙哪部小说的主人公是傅红雪、燕南天?

答案:

《天涯明月刀》.

【例4】过节了,妈妈单位的工会给职工买了点大米.妈妈班组里分了5袋(每袋重约50千克,只多不少),可是班组里共有19人,要均分,当然要先称一下大米的总重量,食堂的磅秤只能称100~150千克范围的重量,一袋一袋称显然不行,因为每袋大米都不足100千克,可是一次又称不了3袋(或3袋以上),因为它们总重量超过150千克,看来只能两袋合起来称,可是这样称最后还是剩一袋,怎么办?

分析:将五袋大米分别标以 A, B, C, D, E , 从 A 开始依次轮换着两袋一称,共称5次,记下且算出它们的总数,再将总数除以2,就得到5袋大米的总重量,然后将5袋大米的总重量除以19.

解:将每袋大米都称两次.将五袋大米分别标以 A, B, C, D, E , 每两袋一起称,共称5次(每袋必须称两次且只称两次),记下且算出它们的总和,将总和除以2,再除以19即得每人分得米.

【例5】某校有100名学生参加第四届小学“祖冲之杯”数学竞赛,平均分是63分,其中参赛男同平均分为60分,女同学平均分为70分,那么该校参赛男同学比女同学多几人?

分析:全校平均成绩63分,而男同学平均分为60分,因此每个男同学比全班平均成绩少 $63 - 60 = 3$ (分),而每个女同学比全班平均成绩多 $70 - 63 = 7$ (分),根据题意可知:男同学总共少的分数就等于女同学总共多的分数.

解:男生 x 人,

$$3x = 7(100 - x),$$

$$x = 70.$$

$$70 - 30 = 40.$$

答:男生比女生多40人.

脑筋急转弯

语文老师在上第一节课时,首先讲的一句话是什么话?

答案:

中国话。

 智力魔方

李白诗云“明月出天山，苍茫云海间”，指的是哪座山？

 答案：

祁连山。

【例6】老师在黑板上写了23个自然数，让学生计算它们的平均数(保留三位小数)，有一个学生用“四舍五入法”算得的结果是9.173。老师说：“最后一位数字错了，其他的数字都对”。那么，正确结果是多少？

分析：这23个自然数的平均数大于9.17而小于9.18。所以这23个自然数的和应该大于 $9.17 \times 23 = 210.91$ ，而小于 $9.18 \times 23 = 211.14$ 。由于23个自然数的和仍为自然数，所以23个自然数的和为211。

$$\text{解：} 23 \times 9.17 = 210.91,$$

$$23 \times 9.18 = 211.14,$$

而23个自然数和应大于210.91小于211.14的自然数。所以23个自然数的和为211。

【例7】某班买来单价0.5元的练习本若干，如果将这些练习本只分给女生，平均每人可分得15本，如果将这些练习本只分给男生，平均每人可得10本，那么这些练习本平均分给全班同学，每人应付多少钱？

分析：如果知道了每人应分得多少练习本，那么应付的钱就知道了。

但总的练习本数=每人分得本数 $\times$ 人数。本题不知道练习本的总数及男、女生的人数，只知道每人分得的本数，因此可以从假定人数或假定练习本数着手解决。

解：练习本总数应是15的倍数，也是10的倍数，所以是30的倍数。故设练习本有30本，于是女生人数= $30 \div 15 = 2$ ，男生人数= $30 \div 10 = 3$ ，每人分得 $30 \div (2 + 3) = 6$ (本)， $6 \times 0.5 = 3$ (元)。

答：每人应付3元。

【例8】星期天，小刚去爬山，上午8点半开始上山，每小时走4千米，在山顶休息1小时后开始下山，每小时走6千米，到山下刚好是下午1点钟，小刚上山下山一共走了多少千米？

分析:根据已知条件,小刚上山、下山用在走路的时间为 $12-8.5+1-1=3.5$ (小时). 由于知道上山、下山的速度,所以如果能求出上山或下山的时间,问题就可解决.

因为上山与下山所走的路程相等,所以根据“速度 $\times$ 时间=路程”就有:

$$4 \times \text{上山所用时间} = 6 \times \text{下山所用时间},$$

$$\text{所以上山所用时间} = 6 \times \text{下山所用时间} \div 4$$

$$= 1.5 \times \text{下山所用时间}.$$

这说明上山所用时间是下山所用时间的 1.5 倍,上、下山走路共用的时间就是下山所用的时间的 2.5 倍,这就可以求出下山所用时间.

解:上、下山走路共用的时间为 $12-8.5+1-1=3.5$ (小时),下山用的时间为 $3.5 \div (1+6 \div 4) = 1.4$ (小时),

上山下山一共走了 $2 \times 6 \times 1.4 = 16.8$ (千米),

答:上山下山一共走了 16.8 千米.

【例 9】下面是某厂一张生产日期表,现已破损,请设法把第五、六车间的日产量中缺掉的数字填进去.

车间	一	二	三	四	五	六	七	平均数
日产(件)	69	78	75	68	$\square$ 5	8 $\square$	91	79

分析:先求五、六车间日产量的和:

$$79 \times 7 - (69 + 78 + 75 + 68 + 91) = 172,$$

再利用 $\square$ 5 + 8 $\square$ = 172, 即可求解:

$$\text{解: } 79 \times 7 - (69 + 78 + 75 + 68 + 91) = 172,$$

$$\square$$
5 + 8 $\square$ = 172,

所以五车间 85, 第六车间为 87.

【例 10】如图 1-2 把 1.2、3.7、6.5、2.9、4.6 这五个数字分别填在五个圆圈内,再在每个方框中填上和它相连的三个圆圈中的数的平均数,再把三个方

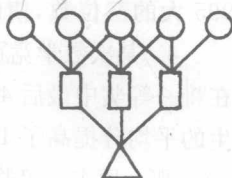


图 1-2

脑筋急转弯

开会时,迈克尔为什么小心翼翼地离开会场?

答案:

怕吵醒了开会的人。

智力魔方

“抽刀断水水更流，举杯消愁愁更愁”是谁的诗句？

框中的数的平均数填在三角中，三角中填的数最小是多少？

分析：先用 a, b, c, d, e 表示这 5 个数填入圆圈中，于是三个方框中依次填入的数应为 $(a+b+c) \div 3, (b+c+d) \div 3, (c+d+e) \div 3$ ，而三角中填入的数应为 $[(a+b+c) \div 3 + (b+c+d) \div 3 + (c+d+e) \div 3] \div 3 = (a+2b+3c+2d+e) \div 9$ 。要求三角中填入的平均数最小，就要尽量少用大的数，而要多用小的数，也就是 c 应最小， b 与 d 次之， a 与 e 再次之。

解：因五个圆圈中，两端的圆圈中的数都只参加一次运算，就该填 6.5 和 4.6，正中间的圆圈中的数参加了三次运算，所以应该填最小数 1.2；然后，再注意数的搭配，以保证相邻三个数的和能被 3 整除。这样，圆圈中的数从左起，分别为 4.6, 2.9, 1.2, 3.7, 6.5；方框中的三个平均数从左起分别为 2.9, 2.6, 3.8，最后经计算得三角中的数为 3.1。

练习 题

1. 一个房间里有 9 个人，平均年龄是 25 岁，另一个房间里有 11 人，平均年龄是 45 岁，两个房间里的人合在一起，他们的平均年龄是多少？

答案：

李白。

2. 期中考试，小明语文和自然成绩共 197 分，语文和数学的成绩共 195 分，数学和自然成绩共 196 分，小明三门课中成绩最高的是哪一门？

3. 三个数分别是 827、938、949，请你再写出一个比 995 大的三位数，使四个数的平均数为整数。

4. 某次数学竞赛原定一等奖 10 人，二等奖 20 人，现在将一等奖中最后 4 人调整为二等奖，这样得二等奖的学生的平均分提高了 1 分，得一等奖的学生的平均分提高了 3 分，那么原来一等奖平均分比二等奖平均分多几分？

5. 一列火车装运一批货物,原来每节车皮平均装46吨,结果有100吨货物未能装进去;后改进装车方法,使每节车皮多装4吨,结果把这批货物装完后还剩下两节空车皮,这列火车有多少节车皮? 这批货物共有多少吨? 2400

6. 某人骑自行车过一座桥,上桥每分钟行100米,下桥每分钟行400米,而且上桥与下桥所经过的路程相等,中间没有停顿.这个人骑自行车过这座桥的平均速度是每分钟多少米? 160

7. 某同学求出1991个数的平均数后,粗心地把这个平均数和原来的1991个数混在一起,成为1992个数,而忘记哪个是平均数.如果这1992个数的平均数恰为1992,则原来的1991个数的平均数是多少?

8. 在图1-3的七个圆圈内各填一个数,要求每一条边上的三个数中,当中的数是两边两个数的平均数.现已填好两个数,那么 x 等于多少? 19

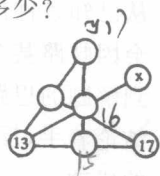


图 1-3

9. “小歌手”大奖赛的裁判小组由若干人组成,每名裁判给歌手最高分不超过10分,第一名歌手得分是:全体裁判员所给分数的平均分是9.64分;如果只去掉一个最高分,则其余裁判员所给分数的平均分是9.60分;如果只去掉一个最低分,则裁判员所给分数的平均分是9.68分.那么所有裁判员所给分数中的最低分最少可以是多少分? 这次大奖赛的裁判员共有多少名?

答案:

从左到右写。

第二讲 还原问题

智力魔方

“春蚕到死丝方尽，蜡炬成灰泪始干”是谁的诗句？

“三国演义”中“草船借箭”的故事可谓家喻户晓，嫉贤妒能的周瑜想找借口杀掉诸葛亮，限令他在十天之内造出二十万支箭。根据当时实际情况，这个任务根本不可能完成，但聪明的诸葛亮转换思考的角度，变“造箭”为“借箭”，超额完成了任务，既挫败了周瑜的阴谋，又削弱了曹操的力量。

在解数学问题时，有时也会碰到这样的困惑，如果从已知条件出发，顺着题目的要求一步一步去做，可能会因歧路甚多，而使计算异常繁琐，有时还可能会找不到解题的思路。这时不妨变换一下思考问题的方向，从结论着手，反过来考虑问题，可能会顿开茅塞，获利意外的成功。

【例1】一个数加上30，减去20，再乘以5，最后除以4，等于25，这个数是多少？

答案：

李商隐。

分析：这道题通过加、减、乘、除四种运算后，得出最后的结果。求解时，可以从运算的结果“25”逐步逆推，如这数没除以4时是多少？没乘以5是多少？不减去20，不加上30又各是多少？依次逆推，就可求出此数。

解： $25 \times 4 \div 5 + 20 - 30 = 10$ 。

【例2】某手机专卖店上午卖出的手机占总数的一半少10部，下午卖出剩下的一半多10部，这时还有库存75部，专卖店原有手机多少部？

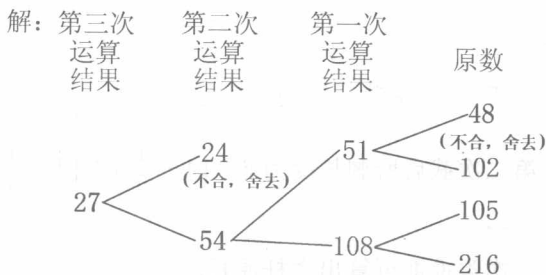
分析：如果下午不多卖10部，则应剩 $(75 + 10) = 85$ (部)，因此下午卖出前应有手机 85×2 部，如上午

不少卖 10 部,则应剩 $85 \times 2 - 10 = 160$ (部),故推出原有手机数.

解: $[(75 + 10) \times 2 - 10] \times 2 = 320$ (部).

【例 3】在电脑里输入一个数,它会按给定指令进行如下运算:如果输入的是偶数,就把它除以 2;如果输入的数是奇数就把它加上 3. 现有一数按这样的运算进行了 3 次,得出结果为 27,原来输入的数可能是什么?

分析:从最后结果依次往前推,不合题意的逐个排除,即可推出原数.



所以原来输入的数可以是 102 或 105 或 216.

【例 4】一堆硬币,面值有 1 分、2 分、5 分三种,其中 1 分的个数是 2 分个数的 11 倍,如这堆硬币共值 1 元,那么 5 分的硬币有几枚?

分析:1 分硬币个数是 2 分的 11 倍,1 分、2 分的币值共为 $2 + 11 \times 1 = 13$ 分的整数倍,剩下的是 5 分币,币值为 5 的整数倍,所以 1 分、2 分的币值和应是 5 的整数倍, $[13, 5] = 65, \dots$

解: $[100 - (2 + 11 \times 1) \times 5] \div 5 = 7$ (枚).

【例 5】甲、乙、丙、丁四个小朋友共有围棋子 160 粒,如果甲给乙 4 粒,乙给丙 5 粒,丙给丁 4 粒,丁给甲 1 粒.这时四人棋子粒数相等.原来他们各有多少粒?

分析:四人共有围棋子 160,而最后四人棋子粒数

脑筋急转弯

将军怎样照顾
近视眼的士兵?

答案:

打仗时让他冲
在最前面。