全国硕士研究生入学统一考试

笃志图书

2005年

考研数学知识点归纳与总结

经济类

⊙ 主编：北京大学 屈耀辉
⊙ 审阅：中国科学院 林 宁

- 依据2005年版大纲：本书依据最新大纲，由北京大学、清华大学和中国科学院多位考研辅导专家和名师联袂精心编写而成！
- 网络状体系：对知识点进行横向、纵向的梳理、归纳和总结，形成知识网络体系图，简化复习！
- 锤炼知识点：根据对历年考点分析，把握考试规律，剖析重难点，总结各类型解题方法！
- 结合历年真题：将历年真题按考点系统分类，方便学生自测，检验对知识点的掌握情况！
- 提高复习效率：考研学生一般复习六个月以上，耗时约1800小时，借助本书的归纳总结，可以为考生至少节约10% 的复习时间，即 180 个小时！

航空工业出版社

全国硕士研究生入学统一考试

笃志图书

2005年

考研数学

知识点归纳与总结

经济类

⊙ 主编：北京大学　屈耀辉

⊙ 审阅：中国科学院　林　宇

航空工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

考研数学知识点归纳与总结. 理工、经济/徐海军等主编. 一北京：航空工业出版社，2004.8

ISBN 7-80183-420-8

Ⅰ.考… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学一研究生一入学考试一自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 070808 号

考研数学知识点归纳与总结（经济类）

Kao Yan Shu Xue Zhi Shi Dian Gui Na Yu Zong Jie (Jing Ji Lei)

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里 14 号 100029）

发行电话：010-64978486 010-84926529

北京嘉羽印刷厂 全国各地新华书店经售

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

开本：880×1230 1/16 印张：27 字数：540 千字

印数：1—5000 全二册定价：36.00 元

前言

各位考生：

1. 你是否仔细研读过2005年版考研大纲？
2. 你是否已经掌握考研大纲中涉及的知识点？
3. 你是否已经理解了所有的知识点，不存在含糊不清的地方？
4. 你脑海中是否形成了完善的数学知识体系？
5. 你对考研试题的结构、风格、命题思路等是否已经很熟悉？
6. 你是否对2005年的考试充满信心，是否想看看名师预测？

本书定位：

本书所做的主要工作就是将众多知识点归纳并总结，使之形成清晰的网络状体系，便于快速复习。在第一轮复习结束之后，考生需要对所有知识点有一个清晰的框架把握，在做题和查漏补缺中，始终有一个全局的概念，做到"胸中有丘壑"，同时对于各部分知识点的复习能够齐头并进而不顾此失彼，从而达到最佳的复习效果和境界。本书供各位考生第二、三轮复习使用。

本书特色：

依据新大纲：本书依据最新版的《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，由北京大学、清华大学和中国科学院多位考研辅导专家联袂精心编写而成。

网络状体系：本书十分注重知识的体系性，以整体的角度考虑数学学科并通过对大纲的解读，绘制了知识网络图，使单个的知识点形成知识体系，科学地缩短了考生对知识掌握和巩固所用的时间。知识点的选择和讲解融入了各位老师多年教学和考研辅导的经验，既保证了知识的完整性和延续性，又着重突出了考研的重点和易混淆的地方，使考生可以通过一本书完成对知识点的巩固和复习。

结合历年真题：精选近十八年(1987年－2004年)真题，按章节进行分类并对真题详加分析，给考生作为自测使用，让考生直面真题，感受真题的风格和命题思路。

提高复习效率：一般来说，考研耗时六个月，约1800个小时，经过试验和科学统计，本书的归纳总结平均可以为考生节约10%的时间，即180个小时。

使用建议：

1. 第二遍复习知识点时使用，巩固对知识点的理解，形成知识体系。
2. 大量的解题训练之前使用，让不同题型和相关知识点在你脑中形成联系。
3. 解题训练时着重训练名师预测的内容，直击2005年考研数学考试。
4. 解题训练遇到不清楚的知识点时作为速查手册使用。
5. 总复习时依照知识网络图，做知识点回放，查缺补漏。

本书编者

2004年7月

考研高分复习方案(供参考)

高分复习设计方案(四轮复习法)

轮次	月份	时间比例	主要目的和任务	主攻方向
第一轮	3—4 月	10%	明确考试重点 把握命题规律	数学 英语
第二轮	4—9 月	70%	重点深入复习 注重基础	数学 英语
第三轮	9—11 月	10%	重温知识点 归纳与总结	专业课 数学 英语
第四轮	11—1 月	10%	强化冲刺 巩固知识点网络图	强化模拟练习

高分复习计划建议

时间段(准备复习阶段)	时间分配建议
2—3 月(启蒙期)	数学(40%)英语(40%)政治(20%)
4—5 月(起步期)	数学(40%)英语(40%)政治(20%)
时间段(正式复习阶段)	**时间分配建议**
6—7 月(关键时期)	政治(20%)数学(40%)英语(40%)
8—9 月(关键时期)	数学(30%)英语(30%)政治(20%)专业课(20%)
10—11 月(总结归纳期)	数学(25%)英语(25%)政治(20%)专业课(30%)
12—1 月(清醒期)	数学(25%)英语(25%)政治(25%)专业课(25%)

目　　录

第一部分　微积分

第一章　函数　极限　连续

一、考试要求及分析

考试要求

【数学三】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

【数学四】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法. 了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，会应用两个重要极限.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

数学三

函数　极限　连续

历年试题分数统计

年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04
分数	5	6	8	6	8	3	3					3		3		3		12

考点分析

分值 考点 / 年份	复合函数	极限四则运算法则	两个基本极限	夹逼原理	无穷小的阶	间断点类型
87			3			2
88		2	4			
89			5		3	
90	3	3				

年份 \ 分值 \ 考点	复合函数	极限四则运算法则	两个基本极限	夹逼原理	无穷小的阶	间断点类型
91			3＋5			
92					3	
93			3			
94						
95						
96						
97						
98						3
99						
00				3		
01						
02			3			
03						
04		4	4			4
合计	3	9	30	3	6	9

数学四

函数　极限　连续

历年试题分数统计

年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04
分数	8	6	8	3	6	6	3					3	3	6		3	4	12

考点分析

年份 \ 分值 \ 考点	复合函数	极限四则运算法则	两个基本极限	夹逼原理	无穷小的阶	间断点类型	闭区间上连续函数性质
87		4＋2				2	
88		2	4				
89			5		3		
90		3					
91			3		3		
92	3				3		
93		3					
94							
95							
96							
97							
98						3	
99		3					

考点 分值 年份	复合函数	极限四则运算法则	两个基本极限	夹逼原理	无穷小的阶	间断点类型	闭区间上连续函数性质
00			3	3			
01							
02			3				
03			4				
04			4			4	4
合计	3	17	26	3	9	9	4

二、知识网络图

函数

- 概念：一对一或多对一映射
- 性态
  - 有界性
    - (1) $|f(x)| < M$(此时 $M > 0$)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界；
    - (2) $f(x) < M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界；
    - (3) $f(x) > M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界；
  - 单调性
    - 已知 $x_1 < x_2$
    - (1) 若 $f(x_1) > f(x_2)$，则单调减少；
    - (2) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则单调增加.
  - 周期性：$f(x+T) = f(x)$
  - 奇偶性
    - (1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；
    - (2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.
- 特殊形式
  - 复合函数：已知函数：$y = f(u)$，$u \in D_f$，$y \in Z_f$；$u = g(x)$，$x \in D_g$，$u \in Z_g$，如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$(空集)，则称函数 $y = f[g(x)]$，$(x \in D_F = \{x \mid g(x) \in D_f\})$ 为由函数 $y = f(u)$，$u = g(x)$ 复合而成的复合函数.
  - 反函数：设 $y = f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，其值域为 Z_f，如果对每一个 $y \in Z_f$，都有唯一的对应值 $x \in D_f$ 满足 $y = f(x)$，则 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数. 记此函数为 $x = f^{-1}(y)$，$y \in Z_f$，并称其为 $y = f(x)$ 的反函数.
  - 隐函数：若由方程 $F(x,y) = 0$ 确定函数 $y = y(x)$，称 y 是自变量 x 的隐函数.
  - 分段函数：一个函数在其定义域的各个不相交的子集(为子区间)上，分别用不同的分析表达式表达，这类函数称为分段函数.

极限

- 概念
  - 1. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限：

    设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

    $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

  - 2. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限：

    设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $X > 0$，使当 $|x| > X$ 时，总有不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

    $$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$
- 性质
  - 唯一性：若极限 $\lim f(x)$ 存在，则极限值唯一.
  - 有界性：若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界.
  - 保号性：极限为正，则邻域内有值为正.

- 极限
  - 求极限的主要方法
    - 极限存在准则
      - 夹逼定理：设在 x_0 的某空心邻域 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$
      - 单调有界数列有极限
    - 极限的运算法则
      - $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$
      - $\lim[f(x)g(x)]=[\lim f(x)][\lim g(x)]$
      - $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$ （C 为常数）
      - $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$
      - $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （$\lim g(x)\neq 0$）
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ （1^∞ 未定式）
    - 洛必达法则
      - $\dfrac{0}{0}$ 型　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：
        (1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$
        (2) 在点 a 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$
        (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）
        则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）
      - $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：
        (1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$
        (2) 在点 a 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$
        (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）
        则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）
    - 等价无穷小的替换
  - 无穷小量
    - 无穷小量与无穷大量的定义和联系：自变量的同一变化趋势下，无穷大的倒数是无穷小，无穷小（不取 0 值）的倒数是无穷大.
    - 无穷小量的运算性质
      - 性质 1：有限个无穷小的和或差仍为无穷小；
      - 性质 2：有限个无穷小的积仍为无穷小；
      - 性质 3：无穷小和有界变量之积仍为无穷小；
      - 性质 4：无穷小除以极限不为 0 的变量，其商仍为无穷小.
    - 无穷小量的阶、等价无穷小量
      - 设 α,β 是关于自变量同一变化趋势下的两个无穷小，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A$
      - (1) 若 $A=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小量；
      - (2) 若 A 存在且 $A\neq 0$，则称 α 是与 β 同阶的无穷小量，特别地，如果 $A=1$，则称 α 与 β 是等价的无穷小量.

- 连续性
  - 连续的概念
    - 初等函数的连续性
      - 定义 1：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 Δx，相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.
      - 定义 2：设函数 $f(x)$ 满足条件：
        ① $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义；
        ② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；
        ③ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；
        则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
    - 分段函数连续性判断
    - 闭区间上连续函数性质
      - 最值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值和最小值.
      - 介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且最大、最小值分别为 M、m，则对任何实数 $C(m \leqslant C \leqslant M)$，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = C$.
  - 间断点的分类
    - 第一类间断点 —— 左右极限都存在
      - 可去（左右极限相等，但不等于该点的函数值）
      - 跳跃（左右极限不相等）
    - 第二类间断点 —— 左右极限至少有一个不存在

三、重难点知识归纳总结

[知识点 1] 函数的概念和性质

[基础性知识点，要求理解函数概念、了解函数性质]

1. 函数的定义

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对于每一个 $x \in D$，都能由 f 唯一地确定一个实数 y，则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数，称 D 为函数 f 的定义域，称 x 为自变量，y 为因变量. 可记为

$$y = f(x), x \in D$$

全体函数值所组成的集合，称为函数的值域.

分段函数：一个函数在其定义域的各个不相交的子集（为子区间）上，分别用不同的分析表达式表达，这类函数称为分段函数.

【提示】：分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

2. 函数的基本性质

函数有四个最主要的基本性质，分别为奇偶性、周期性、有界性和单调性.

奇偶性：设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x \in D$，恒有

(1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知，对于任意的 $x \in D$，必有 $-x \in D$，否则 $f(-x)$ 没有意义，因此，函数具有奇偶性时，其定义域 D 必定是关于原点对称的.

【提示】：判定函数奇偶性时，首先应该考察其定义域是否关于原点对称，若不对称，则该函数只能为非奇非偶函数. 奇函数的图形关于坐标原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.

奇偶函数的性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数；

(2) 偶数个奇函数（或者偶函数）的乘积为偶函数，奇数个奇函数的乘积为奇函数，奇数个偶函数的乘积为偶函数.

周期性:设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在常数 $T>0$,使对任意 $x\in D$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的性质:

(1) 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 T,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$;

(2) 若 $f(x)$,$g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数;

(3) 若 $f(x)$,$g(x)$ 分别是以 T_1、$T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数;

(4) 常见的周期函数为三角函数.

有界性:设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在常数 M,使得对任意的 $x\in D$,恒有

(1) $|f(x)|<M$(此时 $M>0$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界;

(2)$f(x)<M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有上界;

(3)$f(x)>M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有下界.

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必有界.

【提示】:无界函数不等同于无穷大!在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大,则 $f(x)$ 一定无界;若 $f(x)$ 在某个区间上无界,则 $f(x)$ 不一定是无穷大,例如 $f(x)=x\sin x$,在 $x\to+\infty$ 时是无界函数而不是无穷大.

单调性:设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义,对于任意 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$

(1) 若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少;

(2) 若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数,使函数 $f(x)$ 单调的区间称为单调区间.

[知识点 2] 复合函数和反函数

[*基础性知识点*]

复合函数:

已知函数

$$y=f(u),u\in D_f,y\in Z_f$$
$$u=g(x),x\in D_g,u\in Z_g$$

如果 $Z_g\cap D_f\neq\varnothing$(空集),则称函数

$$y=f[g(x)],x\in D_F=\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

为由函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$ 复合而成的复合函数,这里 y 为因变量,x 为自变量,而 u 称为中间变量.

反函数:

设 $y=f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数,其值域为 Z_f,如果对每一个 $y\in Z_f$,都有唯一的对应值 $x\in D_f$ 满足 $y=f(x)$,则 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数.记此函数为

$$x=f^{-1}(y),y\in Z_f$$

并称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

【提示】:① 只有一一对应的函数才有反函数,显然,单调函数一定有反函数;② 反函数的定义域为原函数的值域.

[知识点 3] 极限

[*重点考察性知识点,重点掌握求极限的方法,可参考知识点 8*]

数列的极限:

设有数列$\{u_n\}$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,总有不等式

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为数列$\{u_n\}$的极限.

【提示】:

① 任意给定的 $\varepsilon>0$

ε 是任意的，无论多大或多小，总能找出一个 N，使满足上述条件.

② 正整数 N

N 不唯一，与 ε 有关，一般情况下 ε 越小，N 越大.

数列的定义：无穷多个数按下列顺序排列：

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

称为数列，记为 $\{u_n\}$，其中 u_n 称为数列的通项或一般项.

函数的极限：

1. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限：

设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称常数 A 为 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

2. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限：

设有函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $X > 0$，使当 $|x| > X$ 时，总有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称常数 A 为 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$

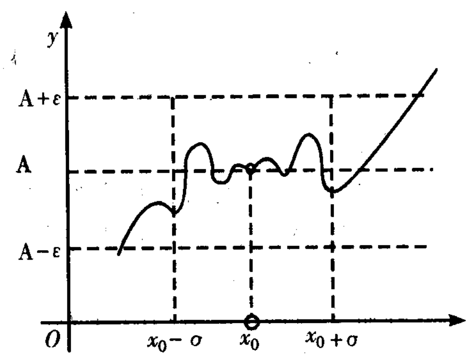

图 1－1－1

【名师指路】：极限的概念是我们到现在以来接触的第一个比较重要的概念，同时，极限也是导数定义的基础，因此，我们不但要掌握它的概念，还要习惯这种定义方法的思维方式，这对于以后理解其它的概念十分有帮助. 下面我们通过讨论极限的几何意义来加深理解.

① $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何意义是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$（无论多么小），总存在正数 δ，只要变量进入点 x_0 的空心邻域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 之内，曲线 $y = f(x)$ 上的所有点 $(x, f(x))$ 必落在两条水平直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 之间的带状区域内（如图 1－1－1）；

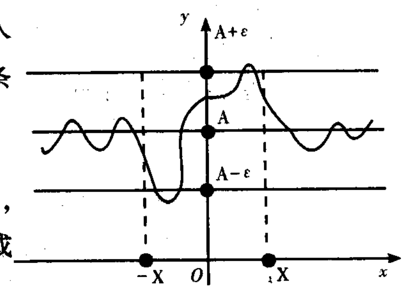

图 1－1－2

② $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的几何意义是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在正数 X，只要变量 x 进入区域 $(-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$ 之内，曲线 $y = f(x)$ 上的相应点 $(x, f(x))$ 必落在两条水平直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 之间的带状区域内（如图 1－1－2）.

左右极限：

一般地，当自变量 x 从 x_0 的左侧（或右侧）趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近常数 A，则称常数 A 为 $x \to x_0^-$（或 $x \to x_0^+$）时函数的左极限（或右极限），记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$）.

函数极限存在且等于 $A \Leftrightarrow$ 函数的左、右极限都存在且都等于 A.

极限的性质：

唯一性：若极限 $\lim f(x)$ 存在，则极限值唯一.

有界性：若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界.

保号性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$（或 $A < 0$）$\Leftrightarrow$ 在 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

极限的四则运算法则：

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则极限 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 和 $\lim[f(x)g(x)]$ 也都存在，且有

$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim[f(x)g(x)] = [\lim f(x)][\lim g(x)]$

$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$　　　(C为常数)

$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

若$\lim g(x) \neq 0$,则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$也存在,且有

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

【提示】:利用极限四则运算法则求极限时:

① 必须满足定理的条件;

② 参加求极限的函数应为有限个,且每个函数的极限必须存在;

③ 考虑商的极限时,还需要求分母的极限不为 0.

[知识点 4] 无穷大与无穷小,无穷小的性质与比较

[考察性知识点,在求极限等问题上有应用]

无穷大量:在自变量的某一变化趋势下,若函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大,则称 $f(x)$ 为无穷大量,记为

$$\lim f(x) = \infty$$

① 无穷大的定义对于数列同样适用;

② 无穷大是针对自变量的某一变化趋势而言的,例如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$,但$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = 1$.

无穷小量:极限为零的变量称为无穷小量.

(因此,0 也是无穷小量)

同无穷大量一样,无穷小量也是相对于自变量的某一变化过程而言的.例如$\lim\limits_{x\to 0}x = 0$,但是$\lim\limits_{x\to 1}x = 1$就不是无穷小量.通过这个例子,我们也可以观察到无穷大量和无穷小量的关系.易证,在自变量的同一变化趋势下,无穷大量的倒数为无穷小量,无穷小量(如不取零值)的倒数为无穷大量.

无穷小的性质:

性质 1:有限个无穷小的和或差仍为无穷小;

性质 2:有限个无穷小的积仍为无穷小;

性质 3:无穷小和有界变量之积仍为无穷小;

性质 4:无穷小除以极限不为 0 的变量,其商仍为无穷小.

无穷小的比较:

设α,β是关于自变量同一变化趋势下的两个无穷小,且

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$$

(1) 若 $A = 0$,则称α是比β高阶的无穷小量;

(2) 若 A 存在且 $A \neq 0$,则称α是与β同阶的无穷小量,特别地,如果 $A = 1$,则称α与β是等价的无穷小量.

常用的等价形式(当 $x \to 0$ 时):

$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

【超级链接】:与函数的幂级数展开结合来理解记忆.

无穷小的比较一般都采用洛必达法则,我们将在后面学到.

[知识点 5] 极限存在性定理与两个重要极限

[重点考察性知识点,属于求极限的方法]

夹逼定理:设在 x_0 的某空心邻域$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$内恒有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}h(x) = A$,则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,且有

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A$$

对于数列，设有数列$\{u_n\}$

(1) 如果$|u_n| \leqslant M(n \in N, M > 0)$，则称数列$\{u_n\}$是有界的；

(2) 如果$u_n \leqslant u_{n+1}(n \in N)$，则称数列$\{u_n\}$是单调增加的；

(3) 如果$u_n \geqslant u_{n+1}(n \in N)$，则称数列$\{u_n\}$是单调减少的.

定理：单调有界数列必有极限.

重要极限 Ⅰ：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

【提示】：自变量变化趋势为 $x \to \infty$ 时，$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

这个极限的证明是典型的利用夹逼定理方法.

首先证明$|x| < \dfrac{\pi}{2}$时，$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\mathrm{tg}x|$

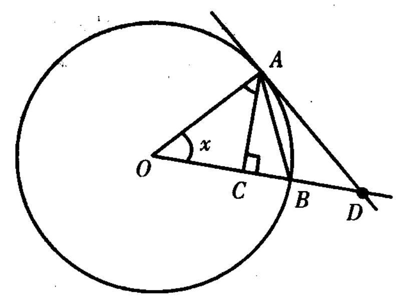

图 1—1—3

如图 1—1—3 所示的单位圆内，设$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为x（弧度值），AD为切线，当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，$S_{\triangle AOB} < S_{扇形AOB} < S_{\triangle AOD}$.

而且 $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}\sin x$

$S_{扇形AOB} = \dfrac{1}{2}x$

$S_{\triangle AOD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x$

所以，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x < x < \mathrm{tg}x$；$x = 0$时，$\sin x = x = \mathrm{tg}x = 0$；三者都为奇函数，所以$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$时，$|\sin x| < |x| < |\mathrm{tg}x|$.

综上，在$|x| < \dfrac{\pi}{2}$时，$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\mathrm{tg}x|$

下面证明极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$|\sin x| < |x| < |\mathrm{tg}x|, 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}\right| = \left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

由此可得

$$|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1, 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

在$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$时，$\cos x > 0$，$\dfrac{\sin x}{x} > 0$，故可得：

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

又 $\lim\limits_{x \to 0}\cos x = 1$，$\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

故由夹逼定理可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

也就是$\sin x$与x为等价无穷小.

【名师指路】：夹逼定理应用的时候，难点在于函数的选择，选择的两个函数既要有相等的极限，又要易于和原函数比较大小.在放缩过程中的一般原则是保留极限变量.

重要极限 Ⅱ：$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ （1^∞ 型未定式）