21世纪高等院校数学基础课系列教材

Fubian Hanshu Lun

复变函数论

冯志新 沈永祥 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪
高等院校数学基础课系列教材

复变函数论

主　编　冯志新　沈永祥
编著者　冯志新　沈永祥　宋文晶
　　　　孙艳君　卜红彧　刘小舟
　　　　赵　爽　马明玥　李晓霞

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论/冯志新，沈永祥主编. —北京：北京大学出版社，2012.8
(21世纪高等院校数学基础课系列教材)
ISBN 978-7-301-21069-7

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①冯… ②沈… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第181027号

书　　名：复变函数论
著作责任者：冯志新　沈永祥　主编
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-21069-7/O·0880
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62767347　出版部62754962
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
787mm×980mm　16开本　10.5印张　216千字
2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
印　　数：0001—3000册
定　　价：22.00元

内 容 简 介

本书是在遵循普通高等院校《理工科本科复变函数课程教学基本要求》的基础上，广泛参考国内外经典教材，按照新形势下教材改革精神，同时结合作者长期的教学改革实践经验编写而成的，其内容组织由浅入深，较全面、系统地介绍了解析函数的基本理论和方法.

全书共七章，内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数理论、留数理论及其应用、共形映射、解析延拓简介. 每章配有适量的习题，并在书后给出简略参考答案. 本书内容丰富，体系严谨，讲解通俗易懂，具有很强的可读性.

本书可作为普通高等院校数学与应用数学专业及相关专业复变函数课程的教材，也可作为自学参考书.

为了方便教师多媒体教学和读者学习，作者提供与本教材配套的相关内容的电子资源，需要者请电子邮件联系 fengzhixin-2008@163. com.

前　言

数域从实数域扩大到复数域后，产生了复变函数论，并且深刻地深入到代数学、微分方程、概率统计、拓扑学等数学分支. 19 世纪的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且称之为这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一. 复变函数理论的奠基人是柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)和黎曼(Riemann). 20 世纪以来，复变函数理论已被广泛地应用到理论物理、天体力学等方面，发展到今天已成为一个内容非常丰富，应用极为广泛的数学分支.

作为大学数学与应用数学专业必修课程的复变函数主要讲述解析函数的基本理论和有关方法，内容包括柯西积分、魏尔斯特拉斯级数和黎曼共形映射三大部分. 本书以这三部分为主线，讲述了以下内容：

1. 复数与复变函数. 这个部分是预备知识. 鉴于近年来高中教材改革，复数部分的难度和所占比例有所减少. 实际教学过程中发现学生对这部分知识掌握不够扎实，影响到复变函数课程的学习，因此书中对复数做了比较详细的介绍.

2. 解析函数. 复变函数理论的主要研究对象就是解析函数. 书中在介绍复变函数的导数与微分基础之上重点介绍了解析函数的基本理论(基本概念、判定函数解析的基本方法)，以及初等解析函数和初等多值函数. 其中初等多值函数部分是复变函数理论的难点之一.

3. 复变函数的积分. 它是研究解析函数的一个重要工具，其理论是复变函数理论的基础. 书中介绍了复变函数积分的基本概念和性质、复变函数积分的基本计算方法、著名的柯西积分定理及其推论和应用.

4. 解析函数的级数理论. 级数也是研究解析函数的一个重要工具，更具有实际意义，例如可用来计算函数的近似值等. 书中主要介绍了解析函数的幂级数和洛朗级数的相关理论，并介绍了孤立奇点的相关知识，为留数理论作铺垫.

5. 留数理论及其应用. 它是柯西积分理论的延续，是计算周线积分和“大范围”积分的有力工具. 书中介绍了留数的基本理论及其应用，包括利用留数求积分，特别是求几种特殊类型的实积分，并可考察解析函数零点分布状况.

6. 共形映射. 前面内容是用分析的方法(微分、积分、级数等)来研究解析函数，共形映

射理论是从几何角度讨论解析函数的性质和应用. 书中介绍了解析变换的特性、几种基本映射和几种常用的共形映射，为其他学科和实际问题提供有力工具.

7. 解析延拓简介. 书中简单介绍了解析延拓理论的一些基本概念，供学生自学.

其中带星号“*”部分的教学环节可略讲或不讲.

本书由数位具有多年复变函数课程教学经验的教师精心研究编写. 我们参考了国内外诸多相关的经典教材，并结合多年实际教学改革经验，力图编写出一本内容丰富、体系严谨、讲解通俗易懂、可读性强的复变函数课程教材.

在本书的编写过程中，吉林师范大学刘声华教授对书稿提出了宝贵建议，统稿过程中也得到了北京大学出版社曾琬婷老师的精心指导，在此向几位老师表示衷心的感谢！

本书内容虽然经过各编委多次讨论、审阅、修改，但限于编者的水平，不妥之处仍然会存在，诚恳希望广大同行给予批评指正.

作者

2012 年 1 月

目　录

第一章 复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数.本书研究的主要对象就是在某种意义下可导的复变函数,即解析函数.为了建立这种解析函数的理论基础,必须要对复数及复变函数有清晰的认识.在这一章中,我们首先引入复数域与复平面的概念,然后介绍复平面上的点集、区域、约当曲线以及复变函数的极限与连续等概念.

§1 复　　数

一、复数域

形如

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{或} \quad z = x + y\mathrm{i}$$

的数称为**复数**,其中 x 和 y 是任意的实数,i 称为**虚数单位**,满足 $\mathrm{i}^2 = -1$.实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记做

$$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z.$$

当 $y=0$ 时,$x+\mathrm{i}\cdot 0$ 为实数 x.特别地,$0+\mathrm{i}\cdot 0=0$.当 $y\neq 0$ 时,称 z 为**虚数**.当 $y\neq 0$ 但 $x=0$ 时,称 $z=\mathrm{i}y$ 为**纯虚数**.

两个复数 $x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $x_2+\mathrm{i}y_2$ **相等**当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 $x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**.显然,复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数.复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$,于是

$$x - \mathrm{i}y = \overline{x + \mathrm{i}y}.$$

基于复数的定义,我们规定两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的四则运算法则如下:

复数 z_1,z_2 相加(减)等于对应实部和虚部相加(减),即

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2).$$

称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**和**,复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**差**.

复数 z_1,z_2 相乘可按多项式乘法法则进行,只需将结果中 i^2 换成 -1,即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2).$$

称复数 z_1z_2 是复数 z_1 与 z_2 的**积**.

复数 z_1,z_2 相除(除数不为 0)可先将它写成分式的形式,然后分子、分母同乘以分母的共轭复数,再进行简化,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0).$$

称复数 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是复数 z_1 与 z_2 的**商**.

根据上述定义的四则运算,容易验证复数的加法、乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

全体复数并引入上述运算后就称为**复数域**,记做 $\mathbf{C}$. 它是实数域 $\mathbf{R}$ 的扩张,但它已不是有序数域,即任意两个复数之间不能比较大小. 例如,我们能说 $2+3\mathrm{i}\neq 4-5\mathrm{i}$,但我们不能得出 $2+3\mathrm{i}<4-5\mathrm{i}$ 或 $2+3\mathrm{i}>4-5\mathrm{i}$ 的结论.

二、复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 唯一确定,于是能够建立平面上全部的点和全体复数之间一一对应的关系. 也就是说,我们可以借助于横坐标为 x,纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ (图 1.1). 这种复数的表示方法通常称为**点表示**,并且常把点 z 和复数 z 不加区分.

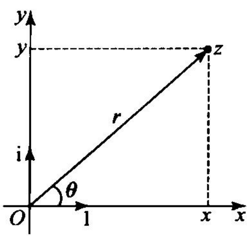

图 1.1

由于 x 轴上的点对应着实数,故 x 轴称为**实轴**;y 轴上非原点的点对应着纯虚数,故 y 轴称为**虚轴**. 这样表示复数 z 的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

在复平面上,从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(图 1.1). 因此复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用一向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示. 特别地,复数 0 对应着零向量. 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**,记做 r 或 $|z|$,即

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0.$$

显然,下列各式成立:

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1}$$

由复数的向量表示易见,复数的加减法法则与向量加减法的平行四边形法则一致(图 1.2). 根据图 1.2,我们有不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\quad (\text{三角形两边之和大于第三边}) \tag{1.2}$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|,\quad (\text{三角形两边之差小于第三边}) \tag{1.3}$$

其中当复数 z_1 和 z_2 表示的两个向量共线(平行)且同向时,(1.2)式和(1.3)式中等号成立.两个复数差的模 $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 的距离,记为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.\quad(1.4)$$

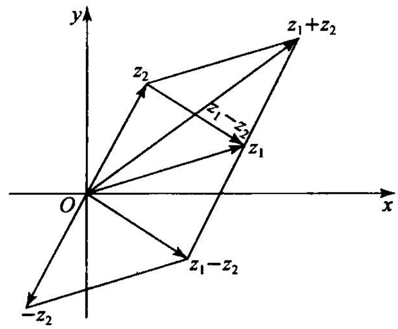

图 1.2

实轴正向到非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 之间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**,记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z,$$

并规定 θ 按逆时针方向取值为正,顺时针方向取值为负.显然 $\theta=\mathrm{Arg}z$ 满足 $\tan\theta=\frac{y}{x}$.任意一个非零复数 z 都有无穷多个辐角,且彼此之间相差 2π 的整数倍.取其中一个特定值 θ_0 且符合 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ (或 $0\leqslant\theta_0<2\pi$),称其为 z 的**主辐角**或**辐角主值**,记为 $\arg z$.于是

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{1.5}$$

注 当 $z=0$ 时,其模为零,辐角无意义.

由三角函数知识可知 $\arg z$ 与 $\arctan\frac{y}{x}$ 有如下关系(图 1.3,图 1.4):

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限时},\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限时},\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限时},\\ \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第四象限时}\end{cases}\quad(z\neq0),$$

其中 $-\pi<\arg z<\pi$,$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

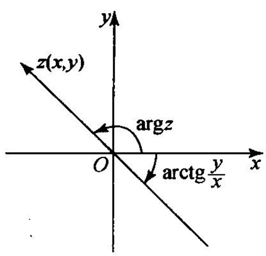

图 1.3

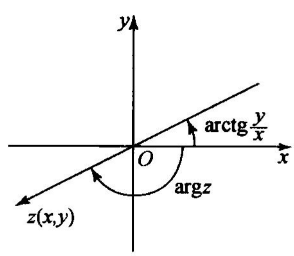

图 1.4

例 1.1 求 $\operatorname{Arg}(3-3i)$及 $\operatorname{Arg}(-5+6i)$.

解 $$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(3-3i)&=\arg(3-3i)+2k\pi=\arctan\frac{-3}{3}+2k\pi\\&=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(-5+6i)&=\arg(-5+6i)+2k\pi=\arctan\frac{6}{-5}+\pi+2k\pi\\&=(2k+1)\pi-\arctan\frac{6}{5}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{aligned}$$

由直角坐标系与极坐标系的关系，我们可以用复数的模与辐角来表示非零复数 z（图 1.1)，即

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).\tag{1.6}$$

特别地，当 $r=1$ 时，有

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,$$

称之为**单位复数**.

根据欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，(1.6)式可改写为

$$z=re^{i\theta}.\tag{1.7}$$

我们分别称(1.6)式和(1.7)式为非零复数 z 的**三角形式**和**指数形式**，并称 $z=x+iy$ 为复数 z 的**代数形式**. 复数的这三种表示法可以相互转化，根据所讨论问题的需要来选择.

例 1.2 求复数 $z=\dfrac{-2i}{-1+i}$ 的三角形式与指数形式.

解 因为 $z=\dfrac{-2i}{-1+i}=\dfrac{-2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1+i$，所以

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \arctan\frac{y}{x}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\arg z=\arctan\frac{y}{x}+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}.$$

于是 $z=\dfrac{-2i}{-1+i}$ 的三角形式与指数形式分别如下：

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\quad z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

例 1.3 将复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(0<\varphi\leqslant\pi)$化为指数形式.

解 $$\begin{aligned}1-\cos\varphi+i\sin\varphi&=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)i}.\end{aligned}$$

对于复数 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，有

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow r_1=r_2,\ \theta_1=\theta_2+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\tag{1.8}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(z_2\neq0),\tag{1.9}$$

所以利用复数的指数形式作乘除法比较简单，并且有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq0),\tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Arg}(z_1z_2)&=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)&=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

公式(1.8)说明 z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $r_2=|z_2|$ 倍，然后再旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 得到的(图 1.5)。特别地，当 $|z_2|=1$ 时，只需旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 即可. 例如，iz 相当于将 z 所对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 沿逆时针方向旋转 $\pi/2$.

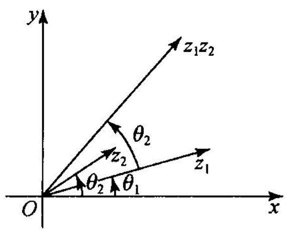

图 1.5

公式(1.11)表示的是集合的运算，其左端 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ $\left(\text{或}\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)$的每一个值，必有 $\operatorname{Arg}z_1$ 和 $\operatorname{Arg}z_2$ 的各一值，使它们的和(或差)与之相等；反之亦然. 例如，设(1.11)中第一式的右端两项分别为

$$\operatorname{Arg}z_1=\left\{\frac{\pi}{6}+2m\pi\right\}_{m=0,\pm1,\cdots},\quad \operatorname{Arg}z_2=\left\{\frac{\pi}{4}+2n\pi\right\}_{n=0,\pm1,\cdots},$$

则左端为

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right\}_{k=0,\pm1,\cdots}.$$

公式(1.11)中的第一式意味着，在等式左端取出一个数值即取定一个 k 值，等式右端也可以相应地找出 m 与 n 的值，使得右端的和等于左端的数值；反之也成立.

公式(1.11)中的 $\operatorname{Arg}z$ 可以换成主辐角 $\arg z$，则等式两端允许相差 2π 的某个整数倍，即有

$$\left.\begin{aligned}\arg(z_1z_2)&=\arg z_1+\arg z_2+2k_1\pi,\\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)&=\arg z_1-\arg z_2+2k_2\pi,\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

其中 k_1,k_2 各表示某个整数.

三、复数的乘幂与方根

设非零复数 $z=re^{i\theta}$,反复运用(1.8)式 n 次就得到非零复数 z 的正整数次幂 z^n,即

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

当 $r=1$ 时,则得到**德摩弗**(De Moivre)**公式**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

当 n 为不小于 2 的正整数时,称满足方程

$$\omega^n = z \tag{1.13}$$

的复数 ω 为复数 z 的 **n 次方根**,记做 $\sqrt[n]{z}$.

为了从已知的 z 求它的 n 次方根 ω,我们设 $z=re^{i\theta}$,$\omega=\rho e^{i\varphi}$,则(1.13)式变形为

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta},$$

从而得到两个方程

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

解得

$$\rho=\sqrt[n]{r}\ (\text{取算术根}), \quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

因此 z 的 n 次方根为

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}. \tag{1.14}$$

由于三角函数具有周期性,所以只要取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 就可得出方程(1.13)的总共 n 个不同的根.这里记号 $\sqrt[n]{z}$ 与 $(\sqrt[n]{z})_k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$是一致的.

我们将(1.14)式表示为

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot \omega_0,$$

其中 $\omega_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$.由此可见,$\sqrt[n]{z}$ 的不同值 ω_k 可由 ω_0 依次绕原点旋转

$$\frac{2\pi}{n},\ 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ 3\cdot\frac{2\pi}{n},\ \cdots,\ k\cdot\frac{2\pi}{n},\ \cdots$$

而得到,但当 k 取到 n 时,与 ω_0 重合了.故非零复数 z 的 n 次方根共有 n 个,它们均匀地分布在以原点为心,半径为 $\sqrt[n]{r}$ 的圆周上,即它们是内接于该圆的正 n 边形的 n 个顶点(图 1.6 是 $n=6$ 的情形).

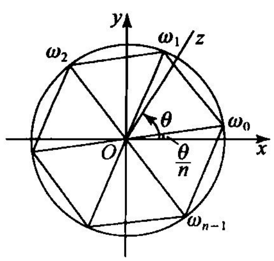

图 1.6

例 1.4 求 $\cos3\theta$ 及 $\sin3\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示的式子.

解 由德摩弗公式有

$$\begin{aligned}\cos3\theta + i\sin3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta,\end{aligned}$$

因此有

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

例 1.5 计算$\sqrt[3]{-27}$.

解 因$-27=27(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$,故

$$(\sqrt[3]{-27})_k = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2.$$

当 $k=0$ 时,$(\sqrt[3]{-27})_0=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;

当 $k=1$ 时,$(\sqrt[3]{-27})_1=3(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-3$;

当 $k=2$ 时,$(\sqrt[3]{-27})_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

四、共轭复数的性质

对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数$\overline{z}=x-\mathrm{i}y$,显然有

$$|\overline{z}| = |z|, \quad \mathrm{Arg}\,\overline{z} = -\mathrm{Arg}z. \tag{1.15}$$

这表明,在复平面上点 z 与$\overline{z}$关于实轴对称.我们容易验证共轭复数具有以下性质:

(1) $\overline{(\overline{z})}=z$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$;

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\,\overline{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ $(z_2\neq 0)$;

(3) $|z|^2=z\overline{z}$, $\mathrm{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$;

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$表示对于复数 $a,b,c,\cdots$的任一有理运算,则

$$\overline{R(a,b,c,\cdots)} = R(\overline{a},\overline{b},\overline{c},\cdots).$$

灵活运用这些性质,可以简化运算.

例 1.6 求复数 $w=\frac{1+z}{1-z}$ 的实部、虚部和模.

解 (1) 因为

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(\overline{1-z})}{(1-z)(\overline{1-z})}=\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(\overline{1-z})}=\frac{1-z\overline{z}+z-\overline{z}}{|1-z|^2}=\frac{1-|z|^2+2\mathrm{i}\mathrm{Im}z}{|1-z|^2},$$

所以

$$\mathrm{Re}w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}, \quad \mathrm{Im}w = \frac{2\mathrm{Im}z}{|1-z|^2}.$$

(2) 因为

$$|w|^2=w\overline{w}=\frac{1+z}{1-z}\cdot\overline{\frac{1+z}{1-z}}=\frac{(1+z)(1+\overline{z})}{(1-z)(\overline{1-z})}=\frac{1+z\overline{z}+z+\overline{z}}{|1-z|^2}=\frac{1+|z|^2+2\mathrm{Re}z}{|1-z|^2},$$

所以

$$|w|=\frac{\sqrt{1+|z|^2+2\mathrm{Re}z}}{|1-z|}.$$

五、复数在几何中的应用

1. 起点为 z_0，倾角为 θ_0 的射线方程

设 l 是起点为 z_0，倾角为 θ_0 的射线，z 是该射线上任意异于 z_0 的一点，则向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 与该射线同向(图 1.7). 因此非零复数 $z-z_0$ 所对应向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 的主辐角为 θ_0，即

$$\arg(z-z_0)=\theta_0. \tag{1.16}$$

容易验证满足(1.16)式的点 z 也必定在该射线上. 因此(1.16)式是起点为 z_0，倾角为 θ_0 的射线方程.

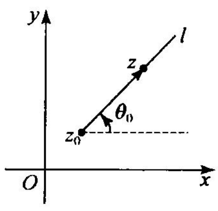

图 1.7

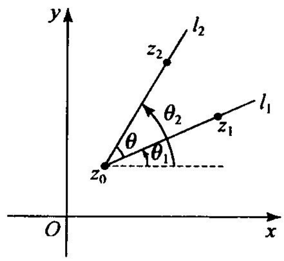

图 1.8

复平面上的任意一个角 $\theta\,(0\leqslant\theta<2\pi)$，都可以看成由起点为 z_0 的两条射线 l_1,l_2 构成的(图 1.8). 设射线 l_1,l_2 的方程分别为

$$l_1:\arg(z-z_0)=\theta_1,\quad l_2:\arg(z-z_0)=\theta_2,$$

这里限制 $0\leqslant\arg z<2\pi$，在射线 l_1 上任取一点 $z_1(z_1\neq z_0)$，射线 l_2 上任取一点 $z_2(z_2\neq z_0)$，从而有 l_1 到 l_2 的角

$$\theta=\theta_2-\theta_1=\arg(z_2-z_0)-\arg(z_1-z_0)=\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}.$$

2. 过 z_1,z_2 两点的直线方程

设 l 是过 z_1,z_2 两点的直线，z 是该直线上的任意一点，则 z_1,z,z_2 三点共线(图 1.9). 因此，$\arg\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=0$ 或 π，即 $\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=t\in\mathbf{R}$，整理得

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \tag{1.17}$$

容易验证满足(1.17)式的点 z 也必定在直线 l 上.因此(1.17)式是过 z_1, z_2 两点的直线方程.

特别地,当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时,点 z 在点 z_1, z_2 之间,故(1.17)式表示端点为 z_1, z_2 的直线段;当 $0 \leqslant t < +\infty$ 时,(1.17)式表示起点为 z_1 且过点 z_2 的射线.

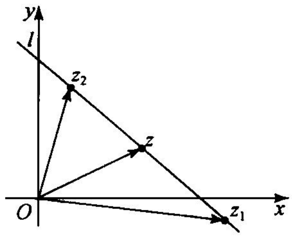

图 1.9

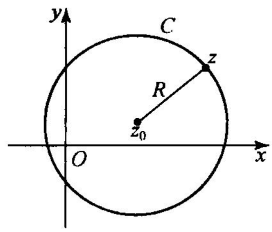

图 1.10

3. 以 z_0 为心,R 为半径的圆周方程

设 C 是以 z_0 为心,R 为半径的圆周,z 是该圆周上的任意一点,则点 z 与 z_0 之间的距离为定值 R(图 1.10),即

$$|z - z_0| = R. \tag{1.18}$$

显然,满足(1.18)式的点必定在圆周 C 上,故(1.18)式为 z 平面上以 z_0 为心,$R>0$ 为半径的圆周方程.

我们可将满足(1.18)式的 z 表示为

$$z = z_0 + Re^{i\theta}. \tag{1.19}$$

由此可见,当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时,(1.19)式表示的是以 z_0 为心,$R>0$ 为半径的圆周;当 $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$时,(1.19)式表示的是以 z_0 为心,$R>0$ 为半径的圆周的一部分,即圆弧.

例 1.7 证明:三个复数 z_1, z_2, z_3 成为一等边三角形的三顶点的充分必要条件是它们满足等式

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2.$$

证 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 为等边三角形的充分必要条件是:向量 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 由向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$ 得到,即

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}.$$

由上式整理得