普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

微积分(二)

萧树铁 主编
郑建华 编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

微 积 分(二)

萧树铁 主编
郑建华 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部“十五”国家级规划教材，是高等教育出版社2000年版“大学数学”系列教材的第二版，相当于第一版中《一元微积分》的第二篇。

内容包括：实数和极限理论、函数的连续性、函数序列的一致收敛性、定积分和广义积分、级数(幂级数和付氏级数)的各种收敛性，其中黎曼积分理论以阶梯函数逼近为基础，融入了函数空间扩张的思想，为学生进一步学习作一个铺垫。

本书着重训练学生领会严格证明的必要性以及一些证明的基本技巧，有利于培育学生理性思维的习惯；内容虽然理论性较强，但有较好的启发性，并不显得枯燥。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供其他专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分 .2/郑建华编著. —2版. —北京：高等教育出版社，2003.6

(大学数学/萧树铁主编)

ISBN 7-04-011912-9

Ⅰ.微... Ⅱ.郑... Ⅲ.微积分-高等学校-教材

Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第026028号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		
		版　　次	2000年7月第1版
开　　本	787×960　1/16		2003年5月第2版
印　　张	12	**印　　次**	2003年5月第1次印刷
字　　数	210 000	**定　　价**	13 10元

再版序言

提高大学数学教学质量的关键在于教师，但一套较好的教材也是重要的.随着我国大学数学教学内容改革的逐步深入，当前不少高等学校在基础数学教学内容的改革方面有了一些进展，例如单纯“面向专业”的观念有所淡化，代数课程的内容和学时有所增加，开设了一些新的课程，如“数学实验”和“随机数学”等；相应地有一批新教材出版.本套教材也在试用了两年多以后，进行了部分修订.这就是《大学数学》的第二版.

在保持原有的指导思想和风格的前提下，这一套教材由原来的五本：《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》改编、扩充为七本，即：《微积分(一)》、《微积分(二)》、《多元微积分及其应用》、《流形上的微积分》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》，其中《流形上的微积分》是新编入的，《随机数学》正在在修订中，《数学实验》这次还来不及修订.除了这三本以外，另外四本改编的大致情况如下：

《微积分(一)》以原来的《一元微积分》中的第一篇，即“直观基础上的微积分”为其主要内容，力求做到“返璞归真”.除了进一步强调了计算和应用之外，还增加了一些对“极限”的朴素描述.

《微积分(二)》是把原来《一元微积分》中的第二篇，即“理性微积分”的内容作一些修改而成.其中为了使读者能更好体会数学分析中的一些基本手法，对用阶梯函数逼近的办法来处理定积分(即函数集扩张的思想)又作了一些改进.

《多元微积分及其应用》是把原书加以适当精简而成.原书中“复变函数”部分重新改写以求突出重点和更加精练；原书的“微分几何”部分移到《代数与几何》.

以上三本教材的习题也都作了调整.

《代数与几何》内容的变动是适当精简了代数的内容，增加了“行列式的几何意义”；几何部分则增加了“微分几何”的基本内容.

《流形上的微积分》与前面三本微积分教材合在一起，就显示了微积分从古典一直到现代的基本面貌，而且也是一个理解当代数学和物理一个不可缺少的台阶.虽然目前它并不属于数学基础课的范围，但可供对此有兴趣的学生选修.此外，对从事微积分教学而在这方面有所欠缺的教师来讲，不妨顺便补

上这一课.

《代数与几何》中的几何部分包括了仿射、射影和微分几何,还有两个非欧几何的模型.它所需的学时不多(不超过 30 学时).这些内容的选取和写法是否合适,能在多大程度上体现数学理性思维和“数学美”,还有待进一步讨论.人们对大学数学课程中几何被严重削弱的缺陷已有共识,但又往往以“课内学时不够”或“没有用”等理由保留了这个缺陷.精简课内学时是必要的,内容的选取更可以讨论.希望有志于此的教师能先试开一些这方面的选修课,供大家来讨论.

这次内容的调整主要是为了增加这套教材的灵活性,不同的学校或专业在内容上可以有不同的选择:可以选择其中的某几本,或删去某些用小字写的部分.例如在清华,这套教材就初步适应了一个较为稳定的教学计划.即除了部分文科和艺术类专业以外,数学基础课的内容确定为:“微积分(一)”(3 学分),“微积分(二)”(3 学分),“多元微积分及其应用”(4 学分),“代数”(4 学分),“几何”(2 学分),“随机数学”(3 学分),“数学实验”(3 学分),其中 1 学分表示一个学期(实上课 15 周)上 15 节课(每节 45 分钟),另外适当安排少数课外习题课.这样数学基础课的总学时就是 330 学时,而其中被列为必修基础课的只有“微积分(一)”和“代数”两门.但实际上多数专业的学生几乎都选了大部分甚至全部数学基础课.

参加这一版改写工作的有朱学贤、郑建华、章纪民、华苏、居余马、萧树铁、李津、陈维恒等同志;谭泽光、白峰杉同志参加了讨论并提出很多好的意见.

编者于清华园

2002 年 10 月

序　言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的"高等数学".面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要.而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视.这就需要一部与之相适应的教材.

这套"大学数学"教材是在前国家教委"面向21世纪教学内容和课程体系改革"研究课题的支持下完成的.共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》.我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础.希望学生通过对它们的学习,能在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础.这种要求应该是针对任何专业的,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题.19世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点.诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神.这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算.在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论,并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及19世纪有着辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近50年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了"仿射及射影几何"及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把"随机数学"正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学习者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

这套系列教材中的《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程.这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为340左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段"评注",主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.因为这是一个尝试,对习惯讲授传统"高等数学"的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社1995年出版、由萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试,目的在于根据"百家争鸣"的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999年6月

再版前言

本书是由原面向21世纪课程教材大学数学《一元微积分》中“理性微积分”部分经全面细致地修改而成的，并根据教学因材施教的理念将其作为《微积分(二)》独立出来.

在本书的修改中，我们保持了原教材的知识结构和主要内容，因为我们认为这些都是好的，也是我们进行教材改革的新颖之处、创新之处.我们所做的主要修改是：由于原教材对知识的陈述过于精练，使得有些内容陈述还有不够完善之嫌，这给教师的教学和学生的学习带来一种无形(作者以为是没有必要)的难点，使得教材本身给自己设置了约束.这对我们所做的教材改革是致命的，因为它们制约了本教材的发展.教材有一定的难度是可行的，但难度要与面对的教学对象相适应，我们力求本教材能够适应普通高等学校非数学专业的微积分教学，使我们的关于数学思想方法的学习，数学处理普遍规律的思维方式和逻辑思维理性训练成为素质教育的重要部分的理念能够具体地体现.

在数学研究中逻辑无处不在，但逻辑并不是数学的全部.我们可以用非常直观的语言讲清楚导数以及导数所揭示的某种普遍规律，但导数要令人信服地成为数学的一部分，那就要用人们信服的遵循客观规律的数学理性来引出.学生也应该掌握数学的基本理性处理方法，它将带给学习者一个新境界，那么在数学上直观与理性差多少？我们要用较通俗的语言把这说清楚.直观也好，理性也好，所要阐述的都是发生在数学世界中的客观存在的“故事”.讲一个真实发生的故事可以用多种语言，如可以用汉语，也可以用英语，法语等，但如果要将这个故事讲给中国的老百姓听，那么请用汉语，不要用其它语言，不然这个故事即使再精彩，对于作为听者的中国老百姓来说也会不得要领，甚至什么感觉也没有.一个发生在数学世界的“故事”要真正地成为数学里的“故事”，或者说在数学中立住脚，唯一的途径就是这个“故事”能够，也应该用数学的语言来阐述.当一个数学“故事”已经在数学中立住脚之后，讲这个“故事”可以采取两个方式：一个是不强调，也不完全撇开用严格数学语言来阐述，甚至下结论；另一个是用严格的数学语言来定论这个故事，但这个故事的引出或者为它打补丁时又不必严格强调数学语言.如果我们一开始就以 ε-δ 语言来给学生讲

解极限的话,那么在学生的脑海里极限是什么呢? 恐怕除了一些符号之外很难较好地把握住极限的本质,而极限作为一个工具在其它学科中应用的时候,显然在使用者的脑子里不是 ε-δ 语言,而是含有因果关系的动态趋势,但是如果我们只讲这些,又缺乏了对极限更深一层的刻画,缺乏从感性到理性的升华.一个较为有效的符合学习心理的处理方式应该是在学习者对极限已有充分地感性认识基础上来掌握从现象中抽象出来的理性刻画.

总之,作者以为上述两种处理方式是直观讲解微积分与理性讲解微积分形成的两个要点.本书是从理性角度来讲解微积分(也就是数学分析味道很浓),但不拒绝直观.而这正是本书的特点,也就是尽量地用直观方式来讲解理性,不让过份的理性逻辑掩盖了学习者原有的感觉,这是非常之宝贵的.作者以为我们要做的就是在原有的感觉基础上去升华.这样就可以在直观与理性之间架起桥梁,就会体会到数学处理问题的过程.

本书借助于直观的语言,以及逐步渐近的叙述方式化解理性微积分部分的难点,阐述相应内容的数学思想和处理方式,同时为让读者更好理解和应用,我们较详尽地添加了各种例子.下面我们侧重说明本书几处关键的修改.

第一章实数集的逻辑结构,对于初学者来说是个难点.作者把本章的中心思想定在二个主要方面:一个是实数集由有理数集在极限封闭意义下的延拓,有理数集关于极限不封闭,这是要延拓有理数集的重要动力之一,我们通过有理数集的稠密性来直观说明一个处理方法;另一个是阐述研究实数集的逻辑结构所获得的研究成果——几个等价命题,它们从不同的角度来刻画实数集的结构,但对它们的理解有一定的难度.我们用直观方式建立起"基本假设",并给出了等价命题之间的推演.添加了上、下极限,通过极限点来认识上、下极限,这样对上、下极限认识就很自然了.

第二章借用实数理论来完善对函数的研究,如函数的连续性,一致连续性以及函数列一致收敛性.在直观的基础上引出极限的 ε-δ 语言式定义,并通过例子来让读者理解和学习应用 ε-δ 语言.对闭区间上连续函数基本性质给出了多种证明.强调指出一致收敛有别于逐点收敛性的整体收敛性,用曲线列收敛于目标曲线的直观方法来引入一致收敛的概念,读者会更易于理解一致收敛的 ε-δ 语言式定义.

第三章以一种全新的处理方式来定义 Riemann 积分,全新是因为似乎还没有其它微积分教材使用过这个处理方法.用直观引入的方法,使得读者不会感到很突然,并能较好地把握住这个处理方法的思想.本章 Riemann 积分的处理方式与 Riemann – Darboux 上、下和的方法相比,重要区别在于,Riemann – Darboux 方法是先选择较好的阶梯函数的积分来内外逼近函数的积分,而我们的方法则是让所有的阶梯函数参与逼近,最后选择出最佳逼近.这个逼近

通过确界来实现.我们向读者阐明将积分作为和来研究是最本质的出发点,粗糙一些可以把积分看成是“纵坐标”或函数值的(连续)和.从这个角度很容易对比 Riemann 积分与 Lebesgue 积分,从而看出两者的区别,进而更深层地认识 Riemann 积分.

第四章广义积分,第五章无穷级数和第六章 Fourier 级数都有适当的修改,使它们更具有可读性.

本次修改主要就是将原教材讲得更清楚,更详尽,更完善,使教学能更顺利地进行,但必须指出的是本书中有一些定理的证明对初学者来说有相当的难度,这些地方在书中被注明了.我们给出这些定理的详尽证明是出于教材逻辑上全面完整的考虑,但对初学者来说就不一定要求了.书中还把一些内容用小字来排版,是作者认为这部分内容供读者参阅,可能超出了教学的范围.在有些习题的序号上加了 * 号,表示该题有一定的难度,可以不作要求.因此,教师完全可以根据教学的要求删减内容.作者以为教材就是提供教学以一个环境,在这个环境中,不同的对象有不同的索取,不同的收获.作者在清华大学基础科学班使用了该教材,得到良好的反映.其他教师在使用本教材教学中的反馈意见对本次修改帮助很大,为此作者非常感谢他们,尤其是华苏、苏宁、朱学贤、潭泽光、章纪民、刘智新等老师.

本教材难免仍有不足之处,敬请读者批评指正,并将宝贵意见反馈给我们,将不胜感激.

作者 郑建华
于清华大学
2003.03.11

前　言

微积分历来是大学基础数学课程最重要的组成部分.

知识资本是成功国家的基石.21 世纪的大学教育是更高层次的基础教育.它的目的之一是培养学生具有终生学习的扎实基础;能充分发掘自己的潜力,去吸取和创造新的知识和技术.微积分的教学也应该围绕这个宗旨.

本书的内容分为"直观基础上"和"理性"的微积分两大块(第一篇和第二篇).这两个名字取得未必合适,主要目的是希望强调历史上微积分发展的不同阶段以及不尽相同的教学重点.

第一篇在 3 个直观基本假设(基本初等函数是连续的;两个重要极限及连续函数可积)的基础上,讲述微积分的基本思想和方法,大体相当于 17 和 18 世纪微积分的基本内容.主要强调的是微积分的运算和它对初等连续模型的应用,包括极限、连续、导数、导数的应用(微分及其应用、连续函数的一些性质、函数的形态和函数作图、不定型的 L'Hospital 法则、导数在经济学中的应用和 Taylor 公式等)、定积分、不定积分、定积分在几何、物理及经济学中的应用和常微分方程初步(一阶线性方程、一些特殊的二阶方程及 Kepler 三大定律的证明)等内容.本书尽可能把这部分内容写得浅近一些,以我国中学毕业生现有的数学基础,相信经过适当的训练,对接受和理解诸如"以直代曲","从有限认识无限"等思想方法不会有太大的困难.同时也为以后数学的学习及例如物理等课程的学习作好铺垫.本书还以评注的形式在每章结尾处开一些小窗口,以激发学生的思考潜能.

这一部分的内容是微积分课程中必不可少的,学生必需力求熟练地掌握它.可能有一部分学生对一元微积分的了解只需到此为止.

微积分是近代数学的第一个伟大创造,同时也是近代科学精神诞生的一个重要标志.微积分的学习如果仅限于第一部分是不够的,因为它本身存在的一些矛盾有待于提升到理性层次来加以探讨.本书的第二篇主要讨论"极限理论"和"一致收敛性",包括了广义积分、级数、幂级数和 Fourier 级数等内容.按传统的看法,这部分内容应该属于"高等微积分"或"数学分析"这类课程.50 年代以来,我国高校的数学教师往往在"高等数学"课程中这部分内容的选取和安排方面存在不少争论.其实,逻辑推演方法对于近代科学的重要性是大家

熟知的，而且它是我国传统文化较为薄弱的一环. 在初步具有上述用数学处理简单连续模式能力的基础上，从理性的角度来提出问题和处理问题(在这里就是审视一下微积分的逻辑基础)，这应该是大学数学教学的一项基本任务. 当然，鉴于一般中学生在这方面的基础比较薄弱，我们力图写得浅近一些，而且教师还可以在此基础上适当删减，但不能忽视对学生理性思维的训练.

这本教材曾在清华大学三个系试用. 所需学时在 70 左右，另外还需适当安排一些习题课.

改革教学内容和课程体系是新世纪高等教育改革的重要内容. 教育部从 1995 年起进行立项研究，本书是清华大学萧树铁教授领导的课题项目的一项成果. 萧树铁先生审阅了本书全稿，许多同志为本书提供了宝贵的建议，编者在此一并表示衷心的感谢.

这本教材还没有经过较为广泛的试用，缺点和毛病还不少，期待同行和读者们不吝多提宝贵意见.

编者

1999 年 9 月

郑重声明

策　　划　王　瑜

编　　辑　胡乃冏

封面设计　于文燕

责任绘图　朱　静

版式设计　李　杰

责任校对　胡乃冏

责任印制　孔　源

目　　录

第 1 章　实数、实数序列及其极限

1.1　实数集

17 世纪微积分发明后，很快在力学、物理和几何中得到广泛的应用. 在这个过程中人们却发现它的基础不牢固：例如"无穷小"、"极限"等概念就很不清楚，因而受到一些人的怀疑甚至攻击.

为了把微积分建立在一个坚实的理性基础上，数学家们进行了近两个世纪的探索. 1821 年，Cauchy 给出了极限的一个比较清晰的定义. 但直到 1850 年，Weierstrass 才最终给出了现在还通用的极限的严格定义，即极限的 ϵ-δ 语言式定义. 在本章将简要地阐述为把微积分建立在坚实的理性基础上而集中面临的问题，以及为解决这个问题而建立起的主要成果.

通过对极限、导数和积分等微积分的基本内容的学习，我们已知微积分的理论是建立在极限的基础之上的一门实函数理论，因此要在严格的数学理性下建立起微积分，就要弄清楚实数集在极限意义下的结构. 让我们把这一点看得更清楚一些. 我们对极限已有了直观的认识，或者说我们已知极限大致说的是什么，就是一个趋向的目标加上一个趋向的动态方式，然而这个直观的但又非常重要的认识是在忽略了一些基本的重要事实上完成的. 我们忽略的基本事实来自于对实数集的结构的认识. 给定一个实数列有趋向的目标，那么这个目标一定是个实数吗？让我们用直观的方法把这话说得更清楚些. 我们把给定的这个实数列中的每个元素在一条直线轴上标记出来，那么在该条直线轴上就对应出一个点列，这个点列向一个确定点趋近的话，问这个被趋近的点对应一个实数吗？这个问题是非常重要的. 设想一下，我们学了导数就是变化率，而作为平均变化率的极限的变化率可能不是实数，或者从几何上讲，割线的极限切线的斜率可能不是实数，那么会怎样呢？微积分的世界那将是个"混沌"的世界，我们连求导数都不能顺畅地去做了. 很明显，我们的问题可以归结到结论"实数与实轴上的点一一对应"是否成立. 我们在中学里就接受了的这个结论在微积分理论的数学理性的建立上就成为非常突出的关键性问题. 如果我们把这个结论作为一个"公理"来处理，那么我们的问题就解决了，但我们又面对一个新的问题：从正整数、有理数自然地延伸出来的实数与公理中的实数是吻合的吗？公理中的实数集可以定义为实数轴上点的标记的集合，显然它把有理数包含在内，那么对通常的实数可以做这样的标记吗？这样我们又回到原

来的问题上了，但上面的处理迫使我们要进一步深入地认识通常实数的本质.

对于实数我们已有先验性的认识：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 关于通常的加法和乘法运算是封闭的. 正整数集中比大小的二元关系"$\leqslant$"是全序关系，也就是任何两个正整数可比较大小，而且是良序集，也就是任何非空子集都有最小元. 引入负数和零，我们构造了整数集 $\mathbf{Z}$. 在 $\mathbf{Z}$ 中对减法也封闭，从而整数集 $\mathbf{Z}$ 关于通常的数的加法和乘法是一个交换环，它是全序集，但不是良序集. 再引入分数，产生有理数集 $\mathbf{Q}$：

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

有理数集 $\mathbf{Q}$ 对除法运算封闭，关于数的加法和乘法构成一个域. 它是全序集，但不是良序集. 有理数是我们熟悉的较直观的数.

任何一个有理数 $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ 都可写为有限小数（包括整数）或无限循环小数. 由带余除法，可写

$$p = dq + r_1, 10r_1 = d_1 q + r_2, \cdots, 10r_{k-1} = d_{k-1}q + r_k, \cdots,$$

其中 $\{r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots\}$ 为余数集. 如果 $\exists k \in \mathbf{N}^*$，使 $r_k = 0$，则

$$\frac{p}{q} = d.d_1 d_2 \cdots d_k$$

是有限小数；如果除不尽，即余数集为无穷集时，由于 $0 < r_k < q, k = 1, 2, \cdots$，则必存在 $i, j \in \mathbf{N}^*(i < j)$，使 $r_i = r_j$，从而 $\frac{p}{q}$ 为无限循环小数，即

$$\frac{p}{q} = d.d_1 d_2 \cdots \dot{d}_i \cdots \dot{d}_{j-1},$$

其中 $\dot{d}_i \cdots \dot{d}_{j-1}$ 表示这部分无限重复下去. 有理数对四则运算虽是封闭的，但对"开方"运算不封闭. 人们早已知道 $\sqrt{2}$ 不是一个有理数，也就是不能是两个正整数的比 p/q（p, q 为正整数），这是要扩大有理数集的一个动力. 我们可以用"开方法"求出 $\sqrt{2}$ 任意小数位的有理近似值，例如 1.4, 1.41, 1.414, …. 如果把第 n 个近似有理数记为 a_n，用极限的话来说，就是

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}.$$

这提示我们：在有理数集中极限运算是不封闭的，也就是一个有理数列趋近的目标可以不是有理数，但又告诉我们可以用有理数列的极限来认识 $\sqrt{2}$，再如我们也可以这样来看圆周率 π. 这样，让极限封闭就成为扩大有理数集的一个动力，重要的是这个动力代表了普遍性，因此，对实数的认识要结合极限来完成，从极限的角度来扩大有理数集，从而产生实数集.

我们可以在实轴上标出有理数，对应有理数的实轴上的点称为有理点. 容易验证：实数轴上任意两个有理点间一定还有有理点，而且每个有理点的任意