

数学建模案例选集

姜启源 谢金星 主编



高等教育出版社

数学建模案例选集

姜启源 谢金星 主编

高等教育出版社

内容提要

本书由一些长期从事数学应用研究并有丰富教学经验的教师集体完成,这些案例有的来自他们完成的实际课题,有的根据他们了解的实际背景和掌握资料做了重新编纂,也有的是基于他们实际经验对现成的数学建模实例做了精心改编,内容涉及工程、管理、信息、医疗、地震、社会等领域实际问题的数学建模。

本书可作为高等学校各专业学生数学建模课程的参考书和课外读物、参加数学建模竞赛的辅导教材,也可供教师、研究生和有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模案例选集 / 姜启源, 谢金星主编. —北京:
高等教育出版社, 2006.7
ISBN 7-04-019638-7

I. 数... II. ①姜... ②谢... III. 数学模型 - 案例
—高等学校—教材 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 060250 号

策划编辑 李艳巍 责任编辑 张耀明 封面设计 于文燕
责任绘图 尹莉 版式设计 张岚 责任校对 刘莉
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006 年 7 月第 1 版
印 张	15.5	印 次	2006 年 7 月第 1 次印刷
字 数	280 000	定 价	18.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19638-00

前 言

近几十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学的应用不仅在它的传统领域——工程技术、经济建设——发挥着越来越重要的作用,而且不断地向诸如生物、医学、金融、交通、人口、地质等新的领域渗透.数学与计算机技术相结合,形成了一种普遍的,可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的重要组成部分.

然而,一个实际问题往往不是自然地以现成的数学问题形式出现的,要用数学方法解决它,首要的和关键的一步是用数学的语言和符号表述所研究的对象,即建立数学模型,简称数学建模.在此基础上才有可能利用数学的理论和方法进行深入的研究,从而为解决现实问题提供定量的结果或有价值的指导.

教育必须反映并适应社会发展的需要.为了培养学生数学建模的意识、方法和能力,从20世纪80年代初开始,数学建模课程就逐渐进入我国大学课堂,现在已经有好几百所院校开设了形式多样的课程,二十多年来也出版了几十本教材,特别是1992年开始举办并得以迅速发展的全国大学生数学建模竞赛,更是极大地推动了数学建模教学及课外活动在各个院校的开展.

“数学建模目前与其说是一门技术,不如说是一门艺术,是技艺性很强的技巧”.艺术在某种意义上是无法归纳出几条普遍适用的准则的.可以说,在学习和逐步掌握数学建模的过程中,创造力、想像力、洞察力等能力的培养,比数学知识的积累更为重要.通过什么途径培养这些能力呢?不外乎两条:第一,学习、分析、评价、改进别人作过的模型,首先是弄懂它,分析为什么这么做,然后评价它的优缺点,并尝试改进的方法.第二,亲自动手,认真做几个实际题目.

为了帮助喜欢数学建模的同学在阅读了一般的数学建模教材,学习了数学建模的基本知识的基础上,开拓眼界,丰富积累,了解一些更接近现实问题的数学模型和解决实际问题更有效的数学建模方法,我们邀请了一些长期从事数学应用研究并有丰富教学经验的教师,由他们将自己完成的实际课题简化加工,或是根据他们了解的实际背景和掌握的资料重新编纂,或是基于他们的实际经验对现成的数学建模实例精心改编,汇集成这本案例选集.希望读者通过这些案例进一步领会数学建模的思路,探索数学建模的精髓,而不是满足于学习一些数学知识,更不要追求对个别案例的机械模仿.

参与这本选集的教师和他们编写的案例如下：

姜启源：“多米诺与数学”，“人造卫星的观测”，“艾滋病的发展和传播”，“垄断行业的价格与服务”。

谢金星：“原子弹爆炸的能量估计”，“游戏网站奖项设计”，“隧道阀门足够结实吗”，“遗产分配”。

邢文训：“路灯更换策略”，“酒店客房的最优分配”。

白峰杉，郭瑞，赵晓凡：“Google 搜索引擎的奥妙”，“数字图像的水印防伪”。

蔡大用：“肿瘤热疗中的数学”。

王强：“风中喷泉”。

唐云，杨志辉：“电力市场的动态平衡”。

陆璇：“临床治疗数据的统计分析”。

叶俊：“网上订单的最佳配送时间”。

张立平：“供应链网络的平衡”。

杨顶辉：“波的传播模型及其应用”。

杨志辉：“图像修复”。

全书由姜启源统编。书中各个案例的先后并没有什么规则，只是为了便于阅读，大致上以所用的数学工具从易到难排列。

感谢所有为这本选集付出心血、做出贡献的同志。

这是我们首次选编这样的案例集，由于时间的仓促，难免有许多不足之处。我们将在以后修订时改正缺陷，并补充和丰富更多、更好的案例。

主编

2006年3月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

【案例 1】	原子弹爆炸的能量估计	1
【案例 2】	多米诺与数学	7
【案例 3】	风中喷泉	19
【案例 4】	Google 搜索引擎的奥妙	27
【案例 5】	游戏网站奖项设计	40
【案例 6】	路灯更换策略	54
【案例 7】	隧道阀门足够结实吗	62
【案例 8】	人造卫星的观测	77
【案例 9】	电力市场的动态平衡	92
【案例 10】	艾滋病的发展和传播	107
【案例 11】	数字图像的水印防伪	125
【案例 12】	酒店客房的最优分配	135
【案例 13】	供应链网络的平衡	149
【案例 14】	遗产分配	160
【案例 15】	垄断行业的价格与服务	174
【案例 16】	临床治疗数据的统计分析	184
【案例 17】	网上订单的最佳配送时间	196
【案例 18】	肿瘤热疗中的数学	210
【案例 19】	波的传播模型及其应用	218
【案例 20】	图像修复	228

【案例 1】原子弹爆炸的能量估计

1. 问题的提出

1945 年 7 月 16 日,美国科学家在新墨西哥州阿拉莫戈多沙漠(Los Alamos)进行了“三位一体实验”(Trinity Test),试爆了全球第一颗原子弹(图 1).这一事件令世界为之震惊,并从某种程度上改变了第二次世界大战以及战后世界的历史.但在当时,有关原子弹爆炸的任何资料都是保密的,一般人无法得到任何有关的数据或影像资料,因此人们无法比较准确地了解这次爆炸的威力究竟有多大.两年以后,美国政府首次公开了这次爆炸的录影带,但没有发布任何有关的数据.英国物理学家 G. I. Taylor(1886—1975)通过研究这次爆炸的录影带,建立数学模型对这次爆炸所释放的能量进行了估计,得到的估计值为 19.2 千吨(千吨即相当于 1 千吨 TNT 的核子能量).后来正式公布的信息显示,这次爆炸所释放的实际能量为 21 千吨,可见两者是相当接近的.

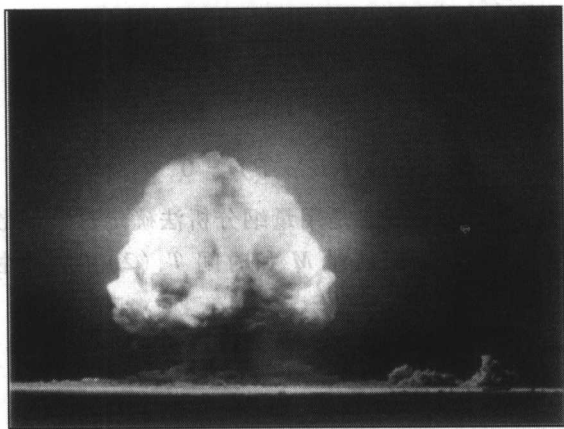


图 1 原子弹爆炸示意图

那么, Taylor 是如何对原子弹爆炸的能量进行估计的呢? Taylor 知道, 爆炸产生的冲击波以爆炸点为中心呈球面向四周传播, 爆炸的能量越大, 在一定时刻冲击波传播得越远, 而冲击波又可以通过爆炸形成的“蘑菇云”反映出来. Taylor 研究这次爆炸的录影带, 测量出了从爆炸开始, 不同时刻爆炸所产生的“蘑菇

云”的半径大小. 表 1 是他测量出的时刻 t 所对应的“蘑菇云”的半径 $r(t)$. 现在的任务就是利用表 1 和其他知识, 估计这次爆炸所释放的能量^[1].

表 1 时刻 t (ms) 所对应的“蘑菇云”的半径 r (m)

t	$r(t)$	t	$r(t)$	t	$r(t)$	t	$r(t)$	t	$r(t)$
0.10	11.1	0.80	34.2	1.50	44.4	3.53	61.1	15.0	106.5
0.24	19.9	0.94	36.3	1.65	46.0	3.80	62.9	25.0	130.0
0.38	25.4	1.08	38.9	1.79	46.9	4.07	64.3	34.0	145.0
0.52	28.8	1.22	41.0	1.93	48.7	4.34	65.6	53.0	175.0
0.66	31.9	1.36	42.8	3.26	59.0	4.61	67.3	62.0	185.0

2. 建立数学模型

表 1 只给出了爆炸后不同时刻“蘑菇云”的半径, 由此无法直接计算爆炸能量, 必须建立模型将不同时刻“蘑菇云”的半径与爆炸能量联系起来.

Taylor 建立计算爆炸能量的数学模型所采用的是量纲分析法. 记爆炸能量为 E , 将“蘑菇云”近似看成是一个球形形状. 除时刻 t 和能量 E 外, 与“蘑菇云”的半径 r 有关的物理量还可能有“蘑菇云”周围的空气密度 (记为 ρ) 和大气压强 (记为 P), 将要寻求的关系

$$r = \varphi(t, E, \rho, P) \quad (1)$$

记作更一般的形式

$$f(r, t, E, \rho, P) = 0, \quad (2)$$

其中有 5 个物理量, 接下来的任务是用量纲分析法确定这个函数关系^[2].

取 3 个基本量纲: 长度 L , 质量 M 和时间 T , (2) 中各个物理量的量纲分别是

$$[r] = L, \quad [t] = T, \quad [E] = L^2MT^{-2}, \quad [\rho] = L^{-3}M, \quad [P] = L^{-1}MT^{-2}, \quad (3)$$

由此得到量纲矩阵

$$A_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

因为 A 的秩是 3, 所以齐次方程

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T \quad (5)$$

有 $5 - 3 = 2$ 个基本解.

令 $y_1 = 1, y_5 = 0$, 得到一个基本解 $\mathbf{y} = (1, -2/5, -1/5, 1/5, 0)^T$; 令 $y_1 = 0, y_5 = 1$, 得到另一个基本解 $\mathbf{y} = (0, 6/5, -2/5, -3/5, 1)^T$. 根据量纲分析的 Buckingham Pi 定理, 由这 2 个基本解可以得到 2 个无量纲量

$$\pi_1 = rt^{-2/5}E^{-1/5}\rho^{1/5} = r\left(\frac{\rho}{t^2E}\right)^{1/5}, \quad (6)$$

$$\pi_2 = t^{6/5}E^{-2/5}\rho^{-3/5}P = \left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5} \quad (7)$$

且存在某个函数 F 使得

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad (8)$$

与(2)等价. 为了得到形如(1)的关系, 取(8)的特殊形式 $\pi_1 = \psi(\pi_2)$ (其中 ψ 是某个函数), 由(6)、(7)即

$$r\left(\frac{\rho}{t^2E}\right)^{1/5} = \psi\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5}, \quad (9)$$

于是

$$r = \left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{1/5} \psi\left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5}. \quad (10)$$

函数 ψ 的具体形式需要采用其他方式确定. (10)式就是量纲分析法确定的、如(1)式所要求的函数关系.

3. 数值计算

为了利用表 1 中 t 和 r 的数据由(10)确定由于原子弹爆炸的能量 E , 必须先估计无量纲量 $\psi(\pi_2)$ 的大小.

Taylor 认为, 对于原子弹爆炸来说, 所经历的时间非常短, 而所释放的能量是非常大的. 仔细分析(7)可知, $\pi_2 = \left(\frac{t^6P^5}{E^2\rho^3}\right)^{1/5} \approx 0$. 他又根据一些小型爆炸试验的数据, 最终建议取 $\psi(0) \approx 1$, 这就是说, (10)可以近似为

$$r = \left(\frac{t^2E}{\rho}\right)^{1/5}. \quad (11)$$

这一近似关系式表明, 半径与大气压强 P 无关, 而当 E, ρ 一定时 r 与 $t^{2/5}$ 成正比. 我们可以先用表 1 的数据检验一下这个关系, 设

$$r = at^b, \quad (12)$$

其中 a, b 是待定系数, 对 (12) 取对数后可以用线性最小二乘拟合根据表 1 中 t 和 r 的数据确定 (MATLAB 程序见附录). 经过计算得到 $b = 0.4058$, 与量纲分析得到的结果 (2/5) 非常接近. (12) 式与实际数据拟合的情况如图 2.

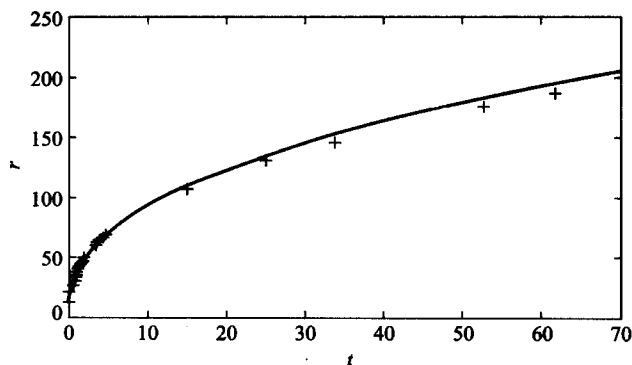


图 2 (12) 式 (曲线) 与实际数据 (+) 的拟合

为了由 (11) 和表 1 的数据估计 E , Taylor 对 (11) 两边取对数 (常用对数) 作线性最小二乘拟合, 并取空气密度为 $\rho = 1.25 (\text{kg}/\text{m}^3)$, 得到

$$\frac{5}{2} \log_{10} r = \log_{10} t + \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{E}{\rho} \right), \quad (13)$$

此式可化为

$$y = c, \quad y = \frac{5}{2} \log_{10} r - x, \quad x = \log_{10} t, \quad c = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{E}{\rho} \right). \quad (14)$$

由表 1 中 t 和 r 的数据算出 y , 就可以拟合出系数 c , 从而得到能量 E 的值 (MATLAB 程序见附录). 实际上 (14) 的形式很简单, 对它作最小二乘拟合, 就是 c 取 y 的平均值, 得到 $c = 6.9038$.

由 c 和 ρ 容易算出 $E = 8.0276 \times 10^{13}$, 单位是能量的国际标准单位焦耳 (Joule), 查表可知 1 千吨 (1 千吨 TNT 的核子能量) = 4.184×10^{12} 焦耳, 由此得到原子弹爆炸的能量是 19.1863 (千吨), 与实际值 21 千吨相差不大.

在附录程序中还绘出了 y 与 x 的关系图 (图 3), 从图中可见除个别点外, 多数数据点的纵坐标都位于 $y = 6.9038$ 附近, 这也说明拟合是比较准确的. 如果剔除掉离平均值较远的第一个数据点 ($t = 0.10$ 的观测值), 则可以得到能量大约为 20.3 千吨, 与实际值更为接近.

还可以直接用 (11) 作拟合, 将其表为

$$E = \frac{\rho r^5}{t^2}. \quad (15)$$

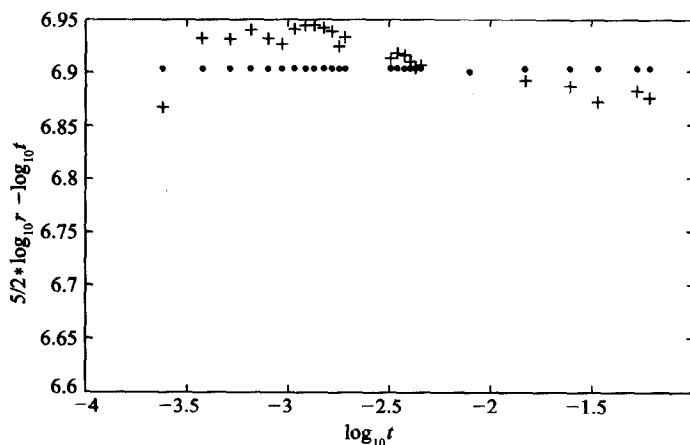


图3 (14)式与实际数据(+)的拟合(·为 $y = 6.9038$)

对它作最小二乘拟合相当于取(15)右端的平均值,得到 $E = 8.2825 \times 10^{13}$, 爆炸能量是 19.7957(千吨)。

从这个例子可以看出, Taylor 采用的量纲分析方法在这里取得了巨大成功。

附录 MATLAB 程序

```
clear,clc;
data = [
0.10 11.1 0.80 34.2 1.50 44.4 3.53 61.1 15.0 106.5
0.24 19.9 0.94 36.3 1.65 46.0 3.80 62.9 25.0 130.0
0.38 25.4 1.08 38.9 1.79 46.9 4.07 64.3 34.0 145.0
0.52 28.8 1.22 41.0 1.93 48.7 4.34 65.6 53.0 175.0
0.66 31.9 1.36 42.8 3.26 59.0 4.61 67.3 62.0 185.0
];
t = [];r = [];
for i = 1:5
    t = [t;data(:,2 * i - 1)];           % 得到 t 的列向量
    r = [r;data(:,2 * i)];             % 得到 r 的列向量
end
r1 = log(r);
t1 = log(t);
s = polyfit(t1,r1,1);                 % (12)取对数后的线性最小二乘拟合
```

```

b = s(1), % (12) 的系数 b
a = s(2);
tt = 0:0.1:70;
rr = exp(a) * tt.^b; % 用拟合结果由(12)进行计算
plot(tt, rr, t, r, ' + ')
pause
x = log10(t * 1e - 3); % t 的单位由 ms 化为 s
y = 5/2 * log10(r) - x;
plot(x, y, ' + ')
xlabel('log10(t)');
ylabel('5/2 * log10(r) - log10(t)');
c = mean(y) % y 的平均值
hold on;
plot(x, c, ' - ');
hold off;
rou0 = 1.25;
E = rou0 * 10^(2 * c)
kiloton = E/4.184e12
E1 = rou0 * mean(r.^5./t.^2) * 1e6 % 用(15)作拟合
kiloton1 = E1/4.184e12

```

参考文献

- [1] Illner R, Bohun C S, Mc Collum S, Van Roode T. *Mathematical Modelling: A Case Studies Approach*. Student Mathematical Library, AMS (American Mathematical Society), 2005, 27.
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

【案例 2】 多米诺与数学

多米诺是英文名词 domino 的音译,一般指人们玩的多米诺骨牌.骨牌是一个小长方体的木块,最基本的玩法是将若干骨牌在桌面或地面上等间距地排成一行,使每张骨牌翻倒时都会碰到相邻的一张.这样,当用手轻触第一张骨牌使它翻倒时,就会依次撞倒相邻的骨牌,直到全部骨牌一一倒下,图 1 是用高速摄影机拍下的骨牌翻倒时的系列照片^[1].现在人们已经可以用几百万张骨牌排成非常复杂的图形,骨牌翻倒时其势如排山倒海,巍巍壮观,时间长达几十分钟.

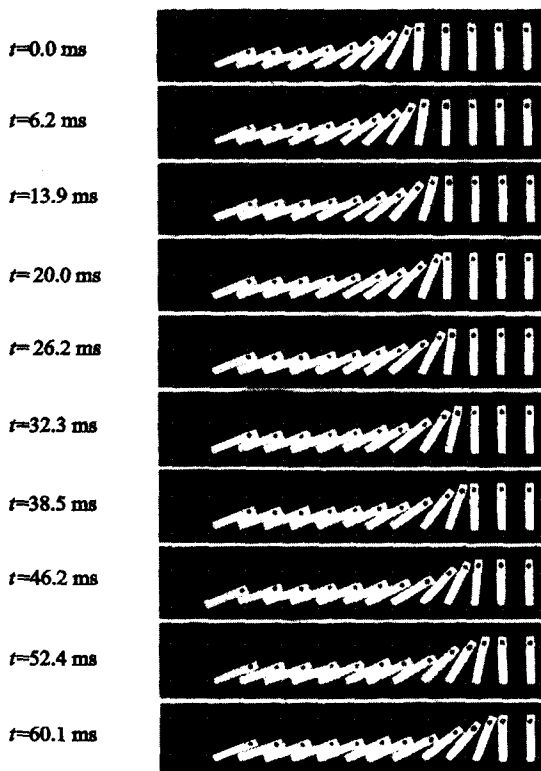


图 1 高速摄影机拍下的骨牌翻倒时的系列照片

从物理模型的角度看,多米诺骨牌是一系列处于不稳定平衡的物体在满足一定条件下,由初始扰动引起连锁反应,相继失去平衡而翻到,导致最终的稳定.人们还常用多米诺效应来描述其他领域中的类似现象,如大型建筑结构和机械结构内部的一些构件,由于不合理的设计处于不稳定平衡状态,偶然出现的外力

作用在一定条件下使它们相继失效,最终导致整个结构垮掉;又如存在不稳定因素及某种联系的一些国家政府或派别,在内外势力的干预下一个接一个地垮台。

多米诺骨牌一一翻倒的景象犹如波浪向前涌进,前进的速度称为波速.本文的对象是排成一行的多米诺骨牌的运动,介绍怎样从实验和理论的角度研究波速和哪些因素有关,可以得到些什么样的定量结果.

1. 问题的提出

关于多米诺骨牌下落问题我们检索到最早是 1971 年由 D. E. Daykin 提出的^[2],他是这样写的:

“多米诺骨牌下落有多快?”

关于“东南亚的多米诺连锁反应理论”说,如果越南陷落,那么老挝就会陷落,接着是柬埔寨陷落,等等^①.听到这种讨论让我想提出上面这个物理问题,请读者建立自己的“合理”的、简化的假设,如完全弹性的骨牌、骨牌与桌面间不变的摩擦系数、骨牌间距地排成一条直线的初始形状等.

2. 实验研究

12 年后的 1983 年 B. G. McLachlan 等人给出了上述问题的一个实验结果^[3],他们的简化假设是(图 2):骨牌等间距地排成一行;骨牌的宽度 w 不影响它的运动;在骨牌间距不太小的情况下骨牌厚度 b 对于运动的影响可以忽略;波速 v 只与骨牌间距 d (相邻两张牌中心之间的距离)、骨牌高度 h 和重力加速度 g 有关,即 $v = v(d, h, g)$. 为了减少自变量的个数,做无量纲化处理:以相对间距 d/h 为自变量,无量纲波速 v/\sqrt{gh} 为因变量,则这个函数的无量纲形式为 $v/\sqrt{gh} = f(d/h)$,即无量纲波速只是相对间距的函数.

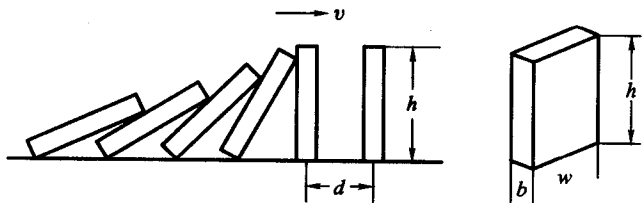


图 2 骨牌等间距地排成一行,向下翻倒

^① 编者注:20 世纪 60 年代越南战争使美国深陷其中,并且老挝、柬埔寨等国的政局也不稳定,美国及欧洲一些国家内的反战运动风起云涌,要求美军退出越南,于是出现了这里说的多米诺连锁反应理论.

为了验证这个关系使用典型尺寸的骨牌($h = 4.445 \text{ cm}$, $b = 0.794 \text{ cm}$, $w = 2.223 \text{ cm}$)做如下实验:将 100 张骨牌在平面上间距地排成一条直线,用秒表记下轻推第一张骨牌及最后一张骨牌倒下的时刻. 实验对于 6 种不同的相对间距 d/h 进行,并且用了高度为 h 和 $2h$ 的两种牌,得到的数据如图 3,显示出(无量纲)波速与(相对)间距之间存在相关性很强的关系,只是当间距较大时出现了明显的分散,这是由于骨牌不全沿着直线落下,延长了下落的时间而造成的. 另外,结果显示 $d/h \rightarrow b/h$ 时 $v \rightarrow \infty$ 也是容易解释的.

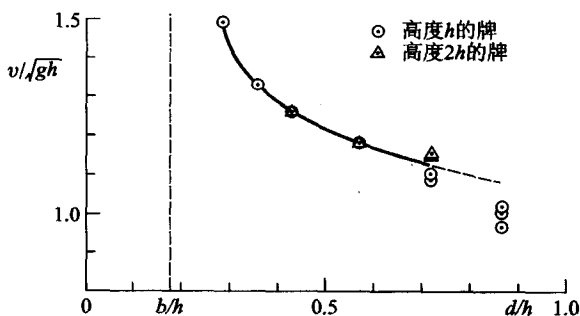


图 3 B. G. McLachlan 等人的实验结果

3. 理论研究

1986 年 C. W. Bert 对这个问题给出了一个理论结果^[4],他的简化假设是:

所有骨牌完全一样,相互平行且等间距;骨牌下落时在平面上没有滑动,至少有一条边与平面接触,且只沿着一个方向转动;骨牌是刚性的,相撞时没有能量损失,也不考虑摩擦;每张骨牌下落的时间是相同的,骨牌相撞时除了开始的接触之外没有相互作用.

3.1 动力学分析

与图 2 相同,记骨牌高度 h 、厚度 b 、间距 d (相邻两张牌中心之间的距离)和重力加速度 g ,骨牌沿直线落下时与它的宽度无关. 骨牌是均匀的,记质量为 m ,可以认为 m 集中在对角线的中点,即质心(图 4). 骨牌下落时以 O 点为中心、对角线 OA 为轴翻转,以过 O 点的边为转动角度的坐标轴,顺时针方向角度为正. 初始位置的角度 φ_0 为负(图 4(a)),且 $\varphi_0 = -\arctan(b/h)$. 在骨牌下落的任意位置(图 4(b))角度 φ 为正. 记骨牌翻转时的转动惯量为 I ,根据转动惯量的计算公式有 $I = m(h^2 + b^2)/3$.

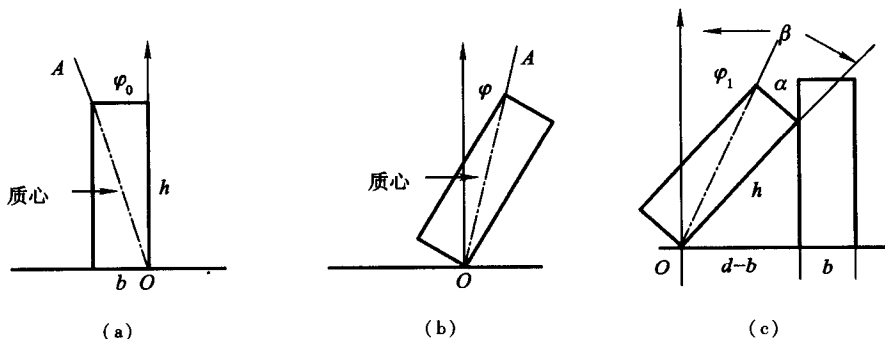


图4 骨牌下落的动力学分析示意图

按照能量守恒定律,一张骨牌翻转时总能量(动能与位能之和,位能以平面为基准)不变,所以

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{mg\sqrt{h^2+b^2}\cos\varphi}{2} = \frac{I\omega_0^2}{2} + \frac{mg\sqrt{h^2+b^2}\cos\varphi_0}{2}, \quad (1)$$

其中 $\omega = d\varphi/dt$ 是骨牌在时刻 t 的角速度, ω_0 是初始角速度. 将上面的 I 和 φ_0 代入,得到

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[\omega_0^2 + \frac{3g}{\sqrt{h^2+b^2}} \left(\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}} - \cos\varphi \right) \right]^{1/2}. \quad (2)$$

于是骨牌从受到外力作用下落到与相邻骨牌相撞(图4(c))所用的时间为

$$\tau = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(a - c\cos\varphi)^{1/2}}, \quad a = \omega_0^2 + \frac{3gh}{h^2+b^2}, \quad c = \frac{3g}{\sqrt{h^2+b^2}}, \quad (3)$$

其中骨牌与相邻骨牌相撞时的角度 $\varphi_1 = \beta - \alpha$, 而 $\beta = \arcsin[(d-b)/h]$, $\alpha = -\varphi_0$, 所以

$$\varphi_1 = \arcsin[(d-b)/h] - \arctan(b/h). \quad (4)$$

显然,波速 v 可以按照

$$v = d/\tau \quad (5)$$

计算.

定义无量纲波速 $\bar{v} = v/\sqrt{gh}$, 无量纲时间 $\bar{\tau} = \tau\sqrt{g/h}$, 则^①

$$\bar{v} = \frac{d/h}{\bar{\tau}}, \quad \bar{\tau} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{(\bar{a} - \bar{c}\cos\varphi)^{1/2}},$$

① 注意到骨牌的质量集中于质心,在自由落体条件下质心落到桌面时的速度是 \sqrt{gh} , 时间是 $\sqrt{g/h}$, 所以这样定义无量纲波速和无量纲时间是有道理的.