

三次方程解算表格

(基数法)

[苏联] Б. М. 許米耶格斯基 著

科学技術出版社

三次方程解算表格

(基数法)

[苏联] Б. М. 許米耶格斯基 著

胡 鼎 譯 注

科 学 技 術 出 版 社

內 容 提 要

本書表格可適合解三次完全方程之用。使用這本表格時，一切計算可用計算機或算盤進行，但如所需的準確度不高，即用計算尺作計算也無不可。

本表格的使用方法簡單，基數範圍合於實用，在一般計算中，可以大大減少解算三次方程的時間。

譯者增加了附錄，對表格的基本原理作了詳細的說明，可供大專學生及計算人員應用。

三次方程解算表格 (基數法)

ТАБЛИЦЫ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДОМ ОСНОВ

原 著 者 [蘇聯] Б. М. Шумятский

原出版者 Гостехиздат • 1950 年 版

譯 注 者 胡 汝 鼎

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版

(上海建國西路 336 弄 1 号)

上海市書刊出版業營業許可証出〇七九号

上海市印刷四厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号：13119 · 55

开本 850×1168 毫米 1/32 • 印張 4 1/2 • 字數 109,000

一九五六年十月第一版

一九五六年十月第一次印刷 • 印數 1—7,000

定價：(10) 九 角

序 言

这一本表格,是为解算完全三次方程之用,解算的方法是把方程化为特殊形式的三項方程。至于这方法的念头已經在我的論文《Исчисление шойрош》里說明了(參照第 1 頁上的注解)。

使用这一本表格的时候,所有一切計算都是打算在計算机上做的;如果不須要高度准确,那就不妨用計算尺做計算。

任何批評、指教和建議,請函寄下列地址,作者表示万分感謝:
Москва, Орликов 3, Гостехиздат.

表格的說明

§ 1

在这一本表格里,按照 A 的各值,排列方程

$$z^3 + Az - A = 0 \quad (1)$$

的根 ①.

在表格里,每一个 A 的值与三个根相对应,我們称它为 A 的三次基数,并以符号

$$z = \sqrt[3]{A}. \quad (2)$$

作为标志.

§ 2. 表格的内容

表格 I 包括方程(1)的基数(根),而与从 $8 \cdot 10^{-2}$ 到 300 的 A 的正值相对应. 每一个值 A 与一个实基数和两个共轭复基数相对应.

表格里,給出了实基数的值,并以 z_1 为标志;同时,又給出了复根中 i (虚数部分)的系数绝对值被实根 z_1 的绝对值除得的商;在表格里,这商以 α 作为标志.

假如已知 z_1 的值,則值 $z_{2,3}$ 可表示为

$$z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm iz_1 \alpha. \quad (3)$$

最后的等式是根据:方程所有的三个根之和是等于零.

① 关于 $x^n + Ax - A = 0$ 形式的三項方程性質的詳細說明,請參照我的以《Исчисление корней》为題的論文,登載于《Математический сборник》,1938年,卷40·3

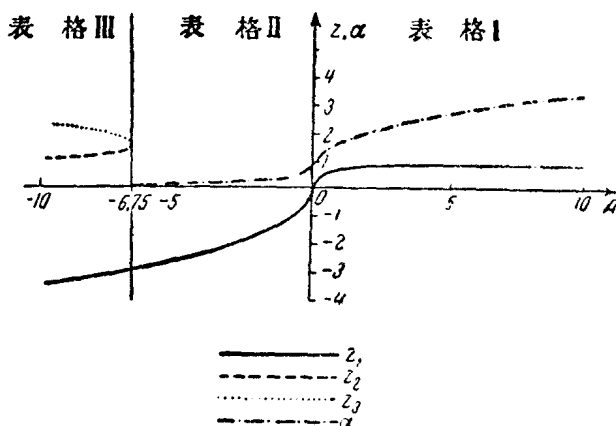
在表格 II 里, 給出大于 -6.75 到 -0.000000008 (包括在內) 的負值 A 的基数。

这些值 A 也与一个負实基数和两个共轭复基数相应。不論在表格 I 或者在表格 II 里, 都給出負实基数 z_1 和值 α (如前: $z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm iz_1 \alpha$)。

表格 III 包括从 -6.75 到 -300 的負值 A 。这些值 A 与三个实基数相应: 一个負, 两个正。

在表格里, 以 z_1 标志着負基数, 以 z_2 标志着較小的正基数。

表格分別由两个部分組成: 表格 IIIa 包括值 z_1 (負数), 表格 IIIb 包括值 z_2 (正数)。按公式 $z_3 = -(z_1 + z_2)$ 求得第三个根。



表格里, 根的分布如附圖所示。

对于实基数來說, 表格准确到小数点后四个有效数字; 对于复基数來說, 表格准确到小数点后三个有效数字。

第一个情形中的小数点后第四、第五个有效数字以及第二个情形中的小数点后第四个有效数字, 都可以用直綫內插法求得。在極大多數的情形下, 用了內插法可以求得准确到小数点后五个有效数字的实基数。用直綫內插法只能求出小数点后四个 (不是五个) 有效数字的那几頁实基数表格, 在它的左上角上以星号作为标

記。

§ 3. 三次完全方程的解法

最初我們說明怎樣解算三項三次方程，然後說明怎樣解算完全三次方程。

方程

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4)$$

可以導成如形式(1)的方程

$$z^3 + Az - A = 0;$$

為此，在方程(4)里應當標志着

$$y = -\frac{q}{p}z. \quad (5)$$

我們得到

$$z^3 + \frac{p^3}{q^2}z - \frac{p^3}{q^2} = 0.$$

這得到的方程，正是方程(1)的形式，其中

$$A = \frac{p^3}{q^2}.$$

用我們的符號來表示，這方程解算為

$$y = -\frac{q}{p} \sqrt[3]{\frac{p^3}{q^2}} \quad (6)$$

假設給出方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (7)$$

這方程可按如下的步序來解算：

1. 消去這方程里的第二項，把它導成如形式(4)。
2. 把形式(4)的方程導成如形式(1)的方程，再接公式(6)解

算。

在方程(7)，我們標志

$$x = y - \frac{a}{3},$$

則得

$$y^3 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)y + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right) = 0. \quad (8)$$

這是形式(4)的方程,其中

$$p = b - \frac{1}{3}a^2; \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

在方程(8)里我們標志了 $y = -\frac{p}{q}z$, 則得

$$z^3 + \frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}z - \frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2} = 0. \quad (9)$$

我們得到了方程(1),其中

$$A = \frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}. \quad (10)$$

現在假設我們已知方程(9)里的基數的值. 讓我們來求出原方程(7)的根的值.

我們有

$$y = -\frac{q}{p}z,$$

$$x = y - \frac{a}{3} = -\frac{q}{p}z - \frac{a}{3}. \quad (11)$$

應用我們的符號, 採取 $A = \frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}$ ① 和 $z = \sqrt[3]{A}$,

我們就可以寫出

$$x = -\frac{1}{3} \left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{3(3b - a^2)} \sqrt[3]{\frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}} + a \right) \quad (12)$$

① 原文作 $A = \frac{[3(3b - a^2)]^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}$ ———譯者

当 $b=0$, 則得

$$x = -\frac{1}{3} \left(\frac{2a^3 + 27c}{3a^2} \sqrt[3]{\frac{27a^6}{(2a^3 + 27c)^2} + a} \right). \quad (13)$$

当 $a=0$, 則得

$$x = -\frac{c}{b} \sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}}. \quad (14)$$

对于 $mx^3 + nx + k = 0$ 形式的方程,

$$x = -\frac{k}{n} \sqrt[3]{\frac{n^3}{k^2 m}}. \quad (15)$$

于是, 解算形式(7)的三次完全方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

归结为解算

$$z^3 + Az - A = 0$$

的形式的方程, 我們称它的根为 A 的三次基数.

我們个别地考察 2 种情形:

$$1. \quad A \leq -6.75.$$

$$2. \quad A > -6.75.$$

假如 $A \leq -6.75$, 則所有三个 A 的基数: z_1, z_2 和 z_3 都是实数.

在这情况之下, 我們最初按公式(10)求出 A , 然后按照表格求取值 z_1, z_2 和 z_3 . 按照公式(12)——(15)中的一个公式(与方程的形式有关), 進一步我們求出原方程(7)的三个根.

假如 $A > -6.75$, 基数中的一个基数 z_1 是实数, 而其它两个基数是共轭复数. 在这情形之下, 如同第一情形中的順序一样, 我們首先求出方程(7)的实根 x_1 .

为了求出方程(7)的复根, 我們应用公式(3):

$$z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm iz_1 \alpha.$$

这时,按公式(5),我們有

$$y_{2,3} = \frac{q}{p} \cdot \frac{z_1}{2} + i \frac{q}{p} z_1 \alpha = -\frac{y_1}{2} \pm i y_1 \alpha. \quad (16)$$

最后,

$$x_{2,3} = -\frac{x_1 + a}{2} \pm i \left(x_1 + \frac{a}{3} \right) \alpha. \quad (17)$$

假如 $A > -6.75$, 則按表格 I (假如 $A > 0$) 求出 z_1 和 α , 或者按表格 II (假如 $-6.75 < A < 0$) 求得值 z_1 和 α .

按照 z_1 求出方程(7)的第一个根(x_1). 按照方程(16)或(17), 進一步求出值 $y_{2,3}$ 或 $x_{2,3}$. 于是:

对于方程 $y^3 + py + q = 0$,

則
$$y_{2,3} = -\frac{y_1}{2} \pm i y_1 \alpha \textcircled{1};$$

对于方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \textcircled{2}$,

則
$$x_{2,3} = -\frac{x_1 + a}{2} \pm i \left(x_1 + \frac{a}{3} \right) \alpha.$$

当 $|A| > 300$ 或 $|A| < 8 \cdot 10^{-9}$ 的时候, 可以采用如下的近似公式.

1. 假如 $A > 300$, 則

$$z_1 = \frac{A+2}{A+3}; \quad (18)$$

$$z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{-A - 3\left(\frac{z_1}{2}\right)^2}. \quad (19)$$

2. 假如 $A < -300$, 則

$$z_2 = \frac{A+2}{A+3} \quad (20)$$

$$z_{3,1} = -\frac{z_2}{2} \pm \sqrt{-A - 3\left(\frac{z_2}{2}\right)^2}. \quad (21)$$

① 原文作 $y_{2,3} = -\frac{y_1}{2} \pm i y_1 \alpha$ ——譯者

② 原文作 $x^3 + ax^2 + by + c = 0$ ——譯者

3. 假如 $|A| < 10^{-9}$, 則

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{A}. \quad (22)$$

我們用实例來說明表格的使用方法.

例 1. $x^3 + 0.9156x - 1.91 = 0.$

按公式(14), 我們求得解答

$$x_1 = -\frac{-1.91}{0.9156} \sqrt[3]{\frac{0.9156^3}{(-1.91)^2}} = \frac{1.91}{0.9156} \sqrt[3]{0.21041} \textcircled{1}$$

在这一个例子里, A 是正数, 它有一个正的实基数和两个复基数. 我們在表格 I 里求出正数(从 0 到 300)的基数.

在表格 I 第 8 頁上, 我們求出实基数 z_1 和复根虚数部分的系数 α . 按表格直接求出三个有效数字. 其余的有效数字可以用直綫內插法求出.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 0.21041 \\ 0.20923 \\ \hline 118 \\ 172 \approx 0.69 \end{array} & \begin{array}{r} 0.47800 \\ 69 \\ \hline z_1 = 0.47869 \end{array} \end{array} \left| \begin{array}{l} 15.0.69 \dots\dots \\ \alpha = 1.2916 \end{array} \right. \begin{array}{r} 1.2906 \\ 10 \end{array}$$

現在我們來求出根的值, 同时, 按公式(16)求出复根:

$$x_1 = \frac{1.91}{0.9156} \cdot 0.47869 = 0.99858 \text{(准确到第五个有效数字)}; \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{0.99858}{2} \pm i \cdot 0.99858 \alpha \textcircled{3} = -0.49929 \pm \\ &\quad \pm i \cdot 0.99858 \cdot 1.2916 = -0.49929 \pm i \cdot 1.2897 \textcircled{4}. \end{aligned}$$

例 2. $716x^3 - 512x + 467 = 0.$ 按公式(15), 我們有

$$x = -\frac{467}{(-512)} \sqrt[3]{\frac{(-512)^3}{(467)^2 \cdot 716}} = \frac{467}{512} \sqrt[3]{-0.85952}.$$

① 原文作 $x_1 = \frac{1.91}{0.9156} \sqrt[3]{\frac{0.9156^3}{1.91^2}} = \frac{1.91}{0.9156} \sqrt[3]{0.21041}$, 为明确起見,

寫成上式——譯者

② 原文作 $x_1 = \frac{1.91}{0.9195} \cdot 0.47869$ ——譯者

③ 原文作 $+0.99858\alpha$ ——譯者

④ 原文作 $-0.49929 \pm i \cdot 1.2897$ ——譯者

在符号之下的基数是負数,而且是大于-6.75,它有一个負的实基数和两个复基数.

在表格 II 里給出从 0 到 -6.75 的基数.

36 頁上求得

$$\begin{array}{r} 0.85952 \\ -60 \\ \hline -\frac{8}{169} \approx -0.05 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.24500 \\ -5 \\ \hline z_1 = 1.24495 \end{array} \quad \left| \alpha = 0.4420 \right. \textcircled{1}$$

我們求得 $z_1 = -1.24495$; $\alpha = 0.4420$.

現在求出这方程的根:

$$x_1 = \frac{467}{512}(-1.24495) = -1.13553;$$

$$x_{2,3} = \frac{1.13553}{2} \pm i \cdot 1.13553 \cdot 0.442 = 0.56776 \pm i \cdot 0.5019.$$

例 3. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.

按公式(12),我們有

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{-16 + 54 - 135}{3(9-4)} \sqrt[3]{\frac{\{3(9-4)\}^3}{(\ominus 16 + 54 - 135)^3} - 2} \right) = \\ &= \frac{97}{45} \sqrt[3]{0.3587} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

我們來求这方程的三个根(一个实根和两个共轭复根).

$$\begin{array}{r} 0.35870 \\ 53 \\ \hline 17 \\ 277 \approx 0.06 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.54600 \\ 6 \\ \hline z_1 = 0.54606 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 17 \cdot 0.06 \dots \dots 1.3974 \\ 1 \\ \hline \alpha = 1.3975. \end{array} \right.$$

我們有

$$x_1 = \frac{97}{45} \cdot 0.54606 + \frac{2}{3} = 1.84373 \textcircled{2}.$$

● 原文作 $z = 1.24495$ 和 $\alpha = 0.44$ ——譯者

● 原文作 $x = \frac{97}{45} \cdot 0.54606 \pm \frac{2}{3} = 1.84373$ ——譯者

按公式(17)求出复根:

$$x_{2,3} = -\frac{1.84373-2}{2} \pm i \cdot \left(1.84373 - \frac{2}{3}\right) \cdot 1.3975 = \\ = 0.07814 \pm i \cdot 1.6448.$$

例 4. $x^3 - 5x + 3 = 0$ ①

按公式(14), 我們有

$$x_1 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{-\frac{5^3}{3^3}} = 0.6 \cdot \sqrt[3]{-13.8889}.$$

数 $A < -6.75$: 它有三个实基数. 在这情况之下, 在表 III a 求出它的第一个基数 (負的), 而在表格 III 6 求出第二个基数 (正的).

在表格 III a 里, 求得

$$\begin{array}{r} 13.8889 \\ \underline{57} \\ 32 \\ \underline{74} \end{array} \approx 0.43 - 4.15143$$

在表格 III 6 里, 求得

$$\begin{array}{r} 13.8889 \\ \underline{204} \\ 685 \\ \underline{-1065} \end{array} \approx -0.64$$

現在我們有 $z_1 = -4.15143$; $z_2 = 1.09436$.

$$x_1 = 0.6 \cdot (-4.15143) = -2.49086,$$

$$x_2 = 0.6 \cdot 1.09436 = 0.65662$$

我們已經求得二个根, 第三个根等于已求得的二根之和, 附以相反的符号:

$$x_3 = -(-2.49086 + 0.65662) = 1.83424$$
②.

① 原文作 $x^3 - 5x + 3 = 0$ ——譯者

② 原文作 $x_3 = -(-2.49086 + 0.65662) = 1.83424$

目 錄

序言

表格的說明	1
表格 I. A 从 -0.000000080 到 300 的值 z_1 和值 α	1-18
表格 II. A 从 -0.00000008 到 -6.75 的值 z_1 和值 α ...	19-58
表格 IIIa. A 从 -6.75 到 -300 的值 z_1	59-112
表格 IIIb. A 从 -6.75 到 -300 的值 z_2	113-123
附錄	124-130

表格 I

A 从 -0.000000008 到 300 的值 z_1 和值 α

表 格 I

A 从 0.0000000080 到 0.00000010

A	d	z_1	α	A	d	z_1	α
0.0000000080	13	0.0020	0.867	0.0000002173	111	0.0060	0.869
93	14	21	67	2284	114	61	69
0.0000000107	15	22	67	2398	118	62	70
122	17	23	67	2516	122	63	70
139	18	24	67	2638	126	64	70
0.0000000157	19	0.0025	0.867	0.0000002764	130	0.0065	0.870
176	21	26	67	2894	134	66	70
197	23	27	68	3028	137	67	70
220	25	28	68	3165	142	68	70
245	26	29	68	3307	147	69	70
0.0000000271	28	0.0030	0.868	0.0000003454	151	0.0070	0.870
299	30	31	68	3605	154	71	70
329	32	32	68	3759	160	72	70
361	33	33	68	3919	163	73	70
394	36	34	68	4082	169	74	70
0.0000000430	38	0.0035	0.868	0.0000004251	172	0.0075	0.870
468	40	36	68	4423	177	76	70
508	43	37	68	4600	183	77	70
551	45	38	68	4783	186	78	70
596	47	39	68	4969	192	79	71
0.0000000643	49	0.0040	0.868	0.0000005161	196	0.0080	0.871
692	52	41	68	5357	203	81	71
744	54	42	68	5560	206	82	71
798	57	43	68	5766	211	83	71
855	60	44	69	5977	217	84	71
0.0000000915	63	0.0045	0.869	0.0000006194	221	0.0085	0.871
978	65	46	69	6415	228	86	71
0.0000001043	68	47	69	6643	233	87	71
1111	71	48	69	6876	237	88	71
1182	74	49	69	7113	243	89	71
0.0000001256	77	0.0050	0.869	0.0000007356	249	0.0090	0.871
1333	80	51	69	7605	254	91	71
1413	84	52	69	7859	261	92	72
1497	87	53	69	8120	265	93	72
1584	89	54	69	8385	271	94	72
0.0000001673	93	0.0055	0.869	0.0000008656	277	0.0095	0.872
1766	97	56	69	8933	283	96	72
1863	99	57	69	9216	289	97	72
1962	104	58	69	9505	295	98	72
2066	107	59	69	9800	300	99	72
2173		60	69	0.00000100		0.0100	72

表 格 1

A 从 0.0000010 到 0.000801

3

A	d	z_1	α	d	A	d	z_1	α	d
0.0000010	4	0.010	0.872		0.000132	8	0.050	0.896	
14	4	11	872		140	8	51	896	
18	4	12	873		148	8	52	897	
22	4	13	874		157	9	53	898	
28	4	14	874		166	9	54	898	
	6					10			
0.0000034	8	0.015	0.875		0.000176	10	0.055	0.899	
42	8	16	875		186	10	56	900	
50	9	17	876		196	11	57	900	
59	9	18	876		207	11	58	901	
70	11	19	877		218	11	59	902	
	12					12			
0.0000082	13	0.020	0.878		0.000230	12	0.060	0.902	
95	14	2	879		242	12	61	903	
0.0000109	16	22	880		254	13	62	903	
125	16	23	880		267	13	63	904	
142	17	24	880		280	13	64	905	
	18					14			
0.0000160	20	0.025	0.881		0.000294	14	0.065	0.905	
180	22	26	881		308	14	66	906	
202	24	27	882		322	15	67	906	
226	25	28	882		337	15	68	907	
251	27	29	883		353	16	69	908	
						16			
0.0000278	29	0.030	0.884		0.000369	16	0.070	0.908	
307	31	31	884		385	17	71	909	
338	34	32	885		402	18	72	910	
372	35	33	886		420	18	73	910	
407	37	34	886		438	18	74	911	
						18			
0.0000444	40	0.035	0.887		0.000456	19	0.075	0.912	
484	42	36	887		475	20	76	912	
526	44	37	888		495	20	77	913	
570	47	38	888		515	21	78	914	
617	50	39	889		536	21	79	914	
						21			
0.0000667	52	0.040	0.890		0.000557	21	0.080	0.915	
719	54	41	890		578	22	81	916	
773	57	42	891		600	23	82	916	
830	61	43	892		623	23	83	917	
891	63	44	892		647	24	84	917	
						24			
0.0000954	66	0.045	0.893		0.000671	25	0.085	0.918	
0.0001020	70	46	893		696	25	86	919	
1090	72	47	894		721	26	87	919	
1162	75	48	895		747	27	88	920	
1237	79	49	895		774	27	89	921	
						27			
1316	50	896			801	28	90	921	