燃气涡轮发动机可靠性与寿命

研究讲座第二册

发动机可靠性工程研究

宋兆泓　洪其麟　主编

吴大观　　审

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书为燃气涡轮发动机可靠性与寿命研究专题讲座的第二分册，重点介绍航空与地面燃气涡轮发动机的可靠性工程问题。全书共计十讲：可靠性数学基础；可靠性基本概念；发动机可靠性；系统可靠性分析与设计；数据统计分析与寿命评估；失效模式与失效分析；失效树分析；结构可靠性设计；可靠性试验与可靠性管理。书中收集了与航空发动机有关的可靠性文献资料和处理可靠性的方法。内容比较新颖。全书文字通俗易懂，图表清晰，可供从事燃气涡轮专业和一般旋转机械专业工程技术人员及管理人员阅读，也可供大专院校有关专业的师生作参考。

燃气涡轮发动机可靠性与寿命研究讲座第二册

发动机可靠性工程研究

FADONGJI KEKAOXING GONGCHENG YANJIU

宋兆泓 洪其麟 主编

吴大观 审

责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

北京农业工程大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张：19.5 字数：499千字

1989年10月第一版 1989年10月 第一次印刷 印数：2000册

ISBN 7-81012-126-X/TK·004 定价：9.20元

前　言

随同航空科学技术的不断发展和航空产品进入国际市场，航空发动机已从单纯追求高性能指标，进入提高寿命、可靠性、耐久性、使用性和可维护性的时代。为使我国航空发动机适应这些需要，已初步开展并将系统地进行这方面工作。

为了配合这一工作需要，近年来我们在航空航天部内部分厂、所举办了几期发动机可靠性与寿命研究短训班和专题讲座，收到较好的效果。与此同时，为了更好地普及和扩大影响，我们在讲座的基础上，征集成文，编辑成"燃气涡轮发动机可靠性与寿命研究"讲座集，共分三册，陆续出版。第一册为发动机寿命研究专辑，第二册为发动机可靠性工程研究专辑，第三册为发动机诊断与维修技术专辑。每个专辑皆按单元讲座专题安排，各单元讲题内容独立，但总体上又有一定联系。

在各专辑选题与编排内容上，力求联系我国发动机生产实际，同时介绍国内、外发展状况，既有科普又重专业，力求文词通达，深入浅出。本书可供从事燃气涡轮发动机研制、生产和使用的工程技术人员阅读，也适用于大专院校的有关专业师生阅读和参考。

本册是全书的第二册，为燃气涡轮发动机可靠性工程研究专辑。本册共十讲：可靠性数学基础；可靠性基本概念；发动机可靠性；系统可靠性分析与设计；数据统计与寿命评估；失效模式与失效分析；失效树分析；结构可靠性设计；可靠性试验和可靠性管理等。在编写中，收集了航空发动机可靠性的有关资料以及处理可靠性的方法和部分实例，内容比较新颖。

本书由宋兆泓和洪其麟主编，参加编写的还有饶寿期、陈光、马枚、孔瑞莲、郭淑芬、熊昌炳和赵长占等老师。本书由吴大观教授审校。在编写过程中还得到北京航空航天大学十四系杨为民教授等和动力系405教研室的指导与支持，在此一并致谢，并感谢北京航空学会的大力支持。

由于编写仓促，水平有限，对错误和不当之处，望读者指正。

航空航天工业部发动机局

可靠性办公室

1989年4月于北京

目　录

第一讲　可靠性数学基础

一、工程可靠性的概率基础

1. 概　述

本讲的目的是为可靠性分析人员提供必要的数学基础。众所周知，可靠性定义是，在规定条件下和规定时间内，产品完成预定功能的能力。很显然，产品或结构可靠性是属于非确定性的或随机性的。结构可靠性问题之所以提出，是由于结构的一系列基本变量具有不确定性，必须占有大量的有关信息，才能确定其可靠性量的大小——可靠度。可靠度是用产品完成预定功能的概率来定义的。因此，和可靠性相对应的数学模型应当是概率论和统计学。为此，我们先从概率分析谈起，然后再介绍统计学的有关问题。

自然界和人类社会中，普遍存在两种现象：确定性现象和不确定性现象(即随机现象)。例如，在标准大气压下，水加热到100℃，必然沸腾，这是确定性现象。如果在一定条件下，具有多种可能的结果，而事先又不能肯定那一种结果会发生，这就是不确定性现象，也叫随机现象。比如，掷骰子，它朝上一面到底出现几点，是无法预料的，只有在掷了之后才能知道，这就是最简单随机现象的例子。但随机现象也并不是捉摸不透的，经过大量的重复观察，却具有统计的规律性。例如，掷骰子，经过大量投掷统计以后，发现每种点数出现朝上的次数大致相等，约为投掷总数的1/6。由此可见，个别现象虽然是不确定的，无规律的，但在大量观测和统计以后却是有规律的。这种规律性叫统计规律性。概率论就是研究随机现象数量规律的数学分支，其最基本的概念是随机事件及其概率。数理统计则是针对实际处理随机现象的任务，提出数学模型，并研究其规律，提出解决问题的方法。统计理论两个明显的特点是，部分推断整体，通过样本（子样）的统计分析来推断总体的某些性质，以接近于1的概率作出推断。

2. 随机试验及随机事件

为了研究随机现象的规律性，常常需要对随机现象进行观测，我们把每次观测看作是一个试验。因此，随机试经的定义是，可以在同一组条件下重复地进行；每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果，进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验，常记作E。例如，E_1：抛一枚硬币，观察正面和反面。E_2：从一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命，等等。

随机现象的每一种表现或结果叫做一个随机事件，简称事件。常用A，B，C等字母表示。它是在随机试验中，对一次试验可能发生也可能不发生，但在大量重复试验中却具有某种规律性的事件。

我们把在随机试验E中必然会发生的事情叫做必然事件，用U表示，其概率为1。把不可

能发生的事情叫做不可能事件，用V表示，其概率为零。例如，水在标准大气压下，加热到100℃就会沸腾，这是必然事件。如果说水在标准压力下，在常温（15℃）下会结冰，这就是不可能事件。

3． 样本空间

我们把一个随机现象的一切可能发生的基本结果的全体称为这个随机现象的样本空间。在实际应用中，样本空间通常是由代表基本事件的数所组成的数集合。基本事件也称样本点，一般的事件是由基本事件构成的，即相当于样本空间的一个子集合。实际应用中相当于一个数集合。一个样本空间的基本事件的个数可以是有限个，可以是可数个，也可以是无穷的不可数个。如记 s 为E的样本空间，则在随机试验E_1和E_2例子中，s_1：{正面，反面}。s_2：$\{t \mid t \geqslant 0\}$。应该注意，样本空间中基本结果的个数不同，其研究方法也有所不同。

4． 事件之间的关系及其运算。

（1）包含关系

若事件A发生，必然导至事件B发生，或者说A的每一个基本结果且都含于事件B中，则称事件B包含事件A，记为$B \supset A$。

图1-1中矩形表示非空集合Ω，即平面上一些点组成的集合，区域B表示事件B，区域A表示事件A。事件B包含事件A，则区域A在区域B内，例如，考察轴加工是否合格时，则要求直径和长度都必须合格。如果用A表示外径超差，用B表示轴不合格，则A发生必然导至B发生，即$B \supset A$。

（2）相等关系

若$A \supset B$，且$B \supset A$，则称事件A和事件B相等，记为$A=B$。图1-1中，如在Ω内区域A和区域B相重合时，则称A和B是相等的。例如，从一批产品中连抽2件，用A表示"至少抽到一件次品"，用B表示"抽到了次品"，则互相导致发生，因而事件A和事件B是相等的。

（3）事件的和

由属于事件A或属于事件B的一切基本结果组成的事件称为事件A与事件B的和事件，记为$A+B$，或$A \cup B$（称A，B的并集），如图1-2所示。和事件$A \cup B$意味着事件A与

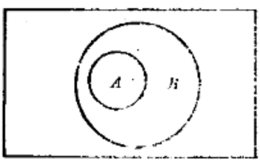

图1-1 $B \supset A$

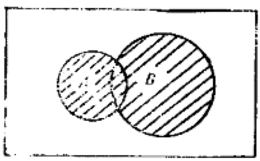

图1-2 $A+B$

事件B至少有一个发生。例如：用A表示轴直径超差，B表示轴长度超差，C表示轴不合

格，则$C=A\cup B$，因为A与B至少有一个发生，则C发生。

二事件的和事件可以推广到有限个事件的和事件与可数个事件的和事件，分别记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$与$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。

（4）事件的积

事件A与事件B同时发生，这一发生了的事件称为事件A与事件B的积，记为AB。或者说由事件A与事件B中公共的基本结果组成的事件称为A与B的积事件或交事件，也可记为$A\cap B$。如图1-3所示。例如，对球轴承滚珠要求包括：直径和光洁度都要合格。若令A表示直径合格，B表示光洁度合格，AB表示滚珠合格。类似地也可以定义几个事件A_1，A_2，…，A_n的交(积)事件，记为$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$。或$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$。

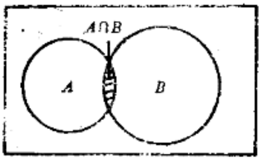

图1-3　AB

又例，加工一等厚盘，要求厚度和直径均应合格。如果把“厚度合格”记为A，“直径合格”记为B，那么“另件合格”$C=AB$，或$A\cap B$。如果把“厚度超差”记为D，“直径超差”记为E，那么“另件不合格”F就是和事件，或D与E的并集，即$F=D+E$，或$F=D\cup E$。

（5）互斥事件

在随机试验E的每次试验中，事件A和事件B不可能同时发生，或者说事件A与事件B没有公共的基本结果，则称事件A与事件B是互斥的或互不相容的。即$AB=V$例如，投掷硬币“出现正面”和“出现反面”是互斥事件。所有简单事件都是两两互斥的。

（6）互逆关系（对应关系）

若在随机试验E中，事件A与事件B中必然有一个发生，且仅有一个发生，亦即，事件A和事件B满足下列条件：

在试验E中，A和B一定有一个发生，即$A\cup B=U$（必然事件）；

在试验E中，A和B不可能同时发生，即$A\cap B=V$（不可能事件）。

则称A与B是逆事件，又称A是B的对立事件（或B是A的对立事件），记为$A=\bar{B}$（$\bar{B}$是B的逆事件），或$B=\bar{A}$（$\bar{A}$是A的逆事件），如图1-4所示。例如，有10个从1到10编了号的小球，如用“抽到偶数编号的球”记为A，“抽到奇数编号的球”记为B，“抽到1或3编号的球“记为C，则B是A的逆事件，但C只与A互斥，而不是A的逆事件。

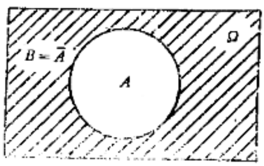

图1-4　A与B互逆

5.　概率的定义

在一次试验中，随机事件可能发生也可能不发生，但经过大量试验后，就会发现它呈现出一定的规律性。这种规律性揭示了事件出现可能性的大小。刻划事件出

现可能性大小的量便是概率。

（1）**概率的古典定义**

在叙述概率的古典定义以前，先引进一些辅助概念。

① 如果在试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中的每一个事件发生的可能性是完全相同的，则称这些事件是等可能的。例如，任意投掷一枚硬币，“花纹向上”和“字向上”这两个事件发生的可能性是相同的。抽查产品时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性也是相同的。这都是等可能型。

② 如果试验的所有可能的结果可以表示为若干个互不相容的且等可能的事件构成的完备群，则这些事件叫做试验的基本事件，它是有限个简单事件。例如，投掷硬币就是两个基本事件。从10个编了号的球任抽一个，就是10个基本事件，等等。

现在叙述概率的古典定义：设试验的所有可能的结果可以表示为由 n 个互不相容且等可能的事件构成的完备群，其中有且仅有m个事件是包含于随机事件 A 的（即当且仅当这 m 个事件中任一个事件发生时，事件 A 发生），则随机事件 A 所包含的基本事件数m与基本事件总数 n 的比值叫随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

例如，把一只白球和一只黑球随机地分别放到编号为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的三只盒子里，如图1-5所示。一共有9种放法。这是这一试验的所有简单事件。不难看出，任一简单事件发生的可能性都是相等的，即都有1/9的机会。如果把“盒子Ⅰ中没有球“记为事件 A，则 A 应包含四个简单事件。只要这个简单事件 A 中任何一个发生，就引起 A 发生，所以事件 A 发生的可能性就是4/9，即 $P(A)=\frac{4}{9}$。又如，从0，1，2，…，9十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率。基本事件总数 $n=10$，设事件 A 为取得奇数数字，则它所包含的基本事件数为 m＝5，因此，所求概率为

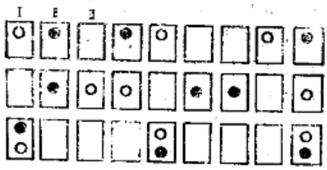

图.5 放球示意图

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$$

又例，袋内有5个白球与三个黑球，从其中任取两个球都是白球的概率。

基本事件总数 $n=C_8^2=28$。设事件 A 表示取出的两个球都是白球，则它所包含的基本事件数 $m=C_5^2=10$。因此，所求的概率为

$$P(A)=\frac{10}{28}=0.357$$

按概率的上述定义，可以推得：

性质 1：　　$P(U)=1$，$P(V)=0$。

因为必然事件 U 包含了所有基本事件，所以 $P(U)=\frac{n}{n}=1$。而不可能事件 V 不含有任何基本事件，所以，$P(V)=\frac{0}{n}=0$。

性质 2：　　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

因为事件 A 所含简单事件数 m 满足不等式 $0\leqslant m\leqslant n$，所以有 $0\leqslant\frac{m}{n}=P(A)\leqslant 1$。

下面再举二例进一步说明概率的算法。

例，在编号为 1，2，3，4，5，6 的六台发动机中，任取两台，试求它都是偶数编号的概率。

六个数字中任取两个，共有 C_6^2* = 15种不同的取法，它们是：(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，(3,4)，(3,5)，(3,6)，(4,5)，(4,6)，(5,6)。这是基本事件总数。而“任取两数都是偶数”的事件 A，即上面的(2,4)，(2,6)，(4，6)，之一的出现，即事件 A 包含 $C_3^2=3$ 个基本事件。因此，

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

例，有备用零件200个，其中混有18个是次品，今随机任抽 5 个，问：① 取到的 5 个全是正品的概率是多少？② 取到的 5 个恰有 2 个是次品的概率是多少？

从200个中取 5 个，其总的取法有 C_{200}^5 种，正品有182个，从中取 5 个的取法有 C_{182}^5 种，次品有18个，从中取零个取法有 C_{18}^0 种，所以取到 5 个全是正品的概率为

$$P=\frac{C_{182}^5 C_{18}^0}{C_{200}^5}=\frac{1574397000}{2535650000}\approx 0.621$$

在第 2 问中，取到 5 个恰有 2 个是次品，必须从 18 个次品中取 2 个和从182个正品中取 3 个这样两步得，所以，取到 5 个恰有 2 个次品的概率为

$$P=\frac{C_{18}^2 C_{182}^3}{C_{200}^5}\approx 0.06$$

（2）概率的统计定义

古典概型的前提是，基本事件为有限个，它们出现可能性相同。但在许多实际问题中，并非如此简单，就拿英文书籍中的 26 个英文字母来说，在文字中出现的可能性就不相等，虽然基本事件总数是有限的（26种）。如字母 E 出现的可能性比字母 Z 出现的可能性大得多。此外，基本事件总数在客观上也存在无限的情形，这就需要用统计的观点来描述概率。

① 频率

* C_m^n——组合公式，不考虑先后顺序，其计算式为 $C_m^n=\frac{A_m^n}{n!}=\frac{C_m^{m-n}}{n!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$，$A_m^n$——排列公式，考虑先后顺序，$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$。

在相同的条件下进行 n 次重复试验，事件 A 出现的次数 K 称为频数，其比值

$$P_n^*(A)=\frac{K}{n}$$

称为事件 A 发生的频率。但用频率度量事件发生的可能性大小有缺点，因频率会有波动。在概率论的发展史上，有人曾对随机投掷硬币做了大量的重复试验，"出现正面"为 K 时，其结果见表1-1。

表1-1　随机投掷硬币试验

试验者	n	K	$P_n^*(A)$
蒲　丰	4 040	2 048	0.508 0
K　皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K　皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由表看出，当试验次数逐渐增多时，$P_n^*(A)$ 逐渐稳定于0.5。假如用这个稳定值 0.5 去度量"出现正面"这一事件发生的可能性，那么它既保留了频率的特性（能反映事件 A 发生的可能性的大小），又消除了频率波动这个缺点（这个固定值只有一个）。这个 0.5 是客观存在的，是下面用作事件概率统计定义的基础。

② 概率的统计定义

在相同条件下进行大量重复试验，随着试验次数的无限增大，事件 A 的频率 $P_n^*(A)$ 就逐渐稳定于某个实数 p，在 p 的附近作一些微小波动。我们称此稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$。

综上所述，事件的频率是个试验值，会有波动，只能近似反映事件发生可能性的大小，事件的概率是个理论值，它是由事件本质属性决定的，是唯一确定的，能精确反映事件发生可能性的大小。所以从理论上讲，概率更便于推理和计算。但从实用上看，可以用频率去估计概率，并且试验次数越多就越准确。

6. 概率的加法公式

（1）概率的加法定理

二互不相容事件的和的概率，等于这二事件概率的和，即当 $A\cap B=V$ 时，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-2}$$

例，书架上有 5 本是机械工程类的书，有 3 本是文学方面的书，有 2 本是历史类的书，试求从中任取一本是文史方面的书的概率。

用"取到一本是文学类书"作为事件 A，它包含 3 个基本事件，用"取得一本是历史类书"作为事件 B，它包含 2 个基本事件，用古典概型定义，其概率分别为

$$P(A)=\frac{3}{10},\qquad P(B)=\frac{2}{10}$$

用"取得一本是文史类书"作为事件 C，即 $C=A+B$。由于 A 和 B 是互不相容的，即 $A\cap B=V$，所以 C 包含 5 个基本事件，因此，

$$P(C)=P(A+B)=\frac{5}{10}$$

即
$$P(C)=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=P(A)+P(B)$$

推论 1：有限个互不相容事件的和的概率，等于这些事件的概率的和，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1-3}$$

推论 2：如果事件 A_1，A_2，…，A_n 构成互不相容的完备群，则这些事件的概率的和等于 1，即

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1 \tag{1-4}$$

因为事件 A_1，A_2，…，A_n 构成完备群，所以它们之中至少有一事件发生，故事件和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 是必然事件，所以

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

特别是仅由两个互不相容事件构成的完备群，即这两个事件是对立事件或者说是互逆事件，则

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

亦即

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{1-5}$$

例，一批产品共有50个，其中45个是合格品，5 个是次品，从中任取 3 个，求其中有次品的概率。

把"取出 3 个产品中有次品"这一事件 A，可以看作是三个互不相容事件之和，即

$$A=A_1+A_2+A_3$$

其中 $A_i(i=1,2,3,)$ 是取出 3 个产品中恰有 i 个次品。于是可求得

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2525$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}=0.0230$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3C_{45}^0}{C_{50}^3}=0.0005$$

根据概率加法定理，有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.2760$$

在上例中若要问抽取的全是合格品的概率，则有

$$P(\bar{A})=1-P(A)=0.7240$$

我们强调指出，上述概率加法定理仅适用于互不相容事件。对任意的两个事件 A 和 B 则得下

述公式。

（2）概率广加法定理（一般概率加法定理）

任意二事件的和的概率，等于这二事件的概率的和减去这二事件的积的概率，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-6}$$

可以用图1-6来说明，若基本事件共有 n 个，其中事件"A发生，B不发生"包含有 n_1 个基本事件，事件"B发生，A不发生"包含有n_2个基本事件，事件"A、B都发生"包含有n_3个事件。因此，A包含的基本事件为n_1+n_3，B包含的基本事件为n_2+n_3，$A+B$包含的基本事件为$n_1+n_2+n_3$。所以，

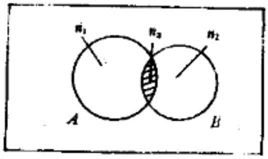

图1-6　A，B发生情况

$$P(A+B)=\frac{n_1+n_2+n_3}{n}$$

$$=\frac{n_1+n_3}{n}+\frac{n_2+n_3}{n}-\frac{n_3}{n}$$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

例，某厂组织A和B两个科研小组，科室的41名工作人员中，有20人参加A组，16人参加B组，而其中有8人同时参加两个小组。在该厂科室人员中任选一人，问这人参加科研小组活动的概率是多少？

用"参加A组"为事件A。"参加B组"为事件B。"参加科研小组"是事件A和事件B的和，即$A+B$。但因事件A和B不是互斥的，所以

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{41}+\frac{16}{41}-\frac{8}{41}$$

$$=\frac{28}{41}=0.683$$

推论：对于任意两个事件A和B，有

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$$

对于任意 k 个事件A_1，A_2，…，A_k，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_k)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$$

二、条件概率与随机事件的独立性

1. 条件概率定义

在事件B已经发生的条件下，事件A发生的概率，叫做事件A对于事件B的条件概率，记作$P(A|B)$。

相应地$P(A)$叫无条件概率。条件概率$P(A|B)$就是在原有条件下增加了"事件 B 已

经发生”这个附加条件以后发生事件A的概率。

例如，两台车床加工同一种零件，其产品状况见表1-2。

表1-2 合格品数和次品数

	合格品数	次品数	总计
甲车床加工零件	35	5	40
乙车床加工零件	50	10	60
总计	85	15	100

若“从100个零件中任取一个为合格品”记为事件A，求得A的概率为

$$P(A)=\frac{85}{100}=0.85$$

如果“已知取出的零件是甲车床加工的”记为事件B，则有条件概率为

$$P(A|B)=\frac{35}{40}=0.875$$

由此可见，$P(A|B)$与$P(A)$是不一样的。

2. 条件概率的计算公式

计算条件概率可根据定义直接计算，但有的问题需寻求计算条件概率的公式。

若事件B的概率是$P(B)$，则对任何事件A有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-7}$$

这里总是认为$P(B)>0$的。该式是从社会实践中总结出来的普遍规律；对古典概型且可以证明。

例，某洗衣机使用寿命20年的概率为0.8，而使用寿命为25年的概率为0.4，问已用过20年的这种洗衣机再用5年的概率是多少？

设B为“用到20年”，A为“用到25年”，已知$P(A)=0.4$，$P(B)=0.8>0$，因A发生，B一定发生，所以$A\subset B$，因此，$AB=A$，于是

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{40/100}{80/100}=0.5$$

3. 与条件概率有关的三个公式

（1）概率乘法公式

式（1-7）揭示了$P(B)$，$P(AB)$和条件概率$P(A|B)$之间的关系。利用这个关系，如已知$P(B)$和$P(AB)$，可求得$P(A|B)$；如已知$P(B)$和$P(A|B)$，也可求得$P(AB)$。在式（1-7）中，两边同乘以$P(B)$，即得

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1-8}$$

上式就是概率乘法公式。其意义是，两事件积的概率等于其中某一事件的概率乘另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率。

推论：有限个事件的积的概率等于这些事件的概率的乘积，其中每一事件的概率是在它前面的一切事件都已发生的条件下的条件概率，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-9}$$

例，某厂生产的产品，其合格率为0.98，而在合格品的产品中，一级品的概率为0.9。求该厂生产一级品的概率。

设事件A为"产品是合格品"，事件B为"产品是一级品"。由于一级品同时又必须是合格品，因此，$P(AB)$就是生产一级品的概率。

因$P(A)=0.98$，$P(B|A)=0.9$，所以，

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.98\times0.9=0.882$$

例，口袋内装有5只白球，3只黑球。在口袋内连取三次，每次任取一只，取后不放回，问取到的3只都是黑球的概率是多少？

设A_1为"第一次取到黑球"，A_2为"第二次取到黑球"，A_3为"第三次取到黑球"。由题意，所求概率是$P(A_1A_2A_3)$。

因为$P(A_1A_2)=\frac{C_3^2}{C_8^2}>0$，可用式(1-9)，显然有$P(A)=\frac{3}{8}$，如已知第一次取得黑球，这时口袋内剩有2只黑球5只白球，可见$P(A_1|A_2)=\frac{2}{7}$，若连取二次都是黑球，这时口袋内剩下1只黑球和5只白球，即可得$P(A_3|A_1A_2)=\frac{1}{(5+1)}=\frac{1}{6}$，由式(1-9)得

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$$

（2）全概率公式

当计算比较复杂事件的概率时，往往必须同时利用概率加法定理和概率乘法定理。二者结合起来就得到全概率公式。

我们首先引入完备事件群概念，如果n个事件彼此两两互斥，即A_i，A_j互斥$(i\neq j)$，且它们的和为必然事件，即A_1，A_2，…、A_n中至少有一个发生。这就构成了事件的完备群。

下面从一个例子引出全概率公式。

例如，有两只相同的箱子，第一只装有三个鸡蛋和两个鸭蛋。第二只装有一个鸡蛋4个鸭蛋。今任取一只箱子从中任取一蛋，问取得鸡蛋的概率是多少？

设A事件为"取得的是鸡蛋"，B_1事件为"取得的是第一只箱子"，B_2事件为"取得的是第二只箱子"。显然，B_1与B_2不相容，且$B_1+B_2=U$。故B_1，B_2构成完备群。因为取鸡蛋必取自两箱中的某一箱，故事件A一定是AB_1和AB_2中的一个，即$A=AB_1+$

AB_2，也就是至少AB_1和AB_2有一个发生，才能取得鸡蛋。因B_1，B_2互不相容，故AB_1与AB_2也互不相容。因此，由概率加法和乘法定理得

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)+P(A|B_2)$$
$$=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)$$

因为$P(B_1)=P(B_2)$，假设取到箱子的概率相同，都为$\frac{1}{2}$，$P(A|B_1)=\frac{3}{5}$，$P(A|B_2)=\frac{1}{5}$，代入后得

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=0.4$$

由此引出一般的全概率公式叙述为：设B_1，B_2，…，B_n是一个完备的事件群，且有$P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任一事件A，有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i) \tag{1-10}$$

全概率公式很有用，它把复杂事物的计算，分解为简单事件的运算，其关键需寻找完备群。

例，设，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个车间生产同一规格的产品，每个车间的产量分别占总产量的25%，35%，40%。各车间的废品率分别为5%，4%，2%。试求从成品库中抽出一件产品是废品的概率。

设A为“抽出一件产品是废品”，B_1为“抽到的产品是Ⅰ车间的”，B_2为“抽到的产品是Ⅱ车间的”，B_3为“抽到的产品是Ⅲ车间的。”据已知条件，有$P(B_1)=25\%$，$P(B_2)=35\%$，$P(B_3)=40\%$。$P(A|B_1)=5\%$，$P(A|B_2)=4\%$，$P(A|B_3=2\%$。显然，B_1，B_2，B_3是完备群。由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%$$
$$=3.45\%$$

假如要问抽到的这件废品是哪一车间生产的可能性最大，那么这个问题要用贝叶斯公式来解。

（3）贝叶斯公式（Bayes）

贝叶斯公式是十八世纪英国牧师Reverend Thomas Bayes首先提出来的，称Bayes定理，也称假设概率公式或逆概率公式。它在可靠性分析中是很有用的。

设B_1，B_2，…，B_n是一个完备的事件群，而且$P(A)>0$，则对任一事件A，有

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \tag{1-11}$$

上式可由概率乘法公式及全概率公式得到证明。贝叶斯公式主要用于已知某事件 A 发生的条件下反回来判断"A"是在 B_1，B_2，…，B_n哪一个事件发生的情况下发生的，即要知道事件 A 发生的条件下某原因 B_i 发生的概率，亦即条件概率 $P(B_i|A)$。故也将其称为原因概率公式，事后概率公式或逆概率公式。如上例已知抽到的是废品，回过头来找哪个车间生产的可能性。

接上例，如果要问抽出的一件是废品，它是哪个车间生产的可能性最大呢？

回答这个问题，实质上是要求出这件废品恰好是某车间生产的概率。

抽出的这件废品恰好是第Ⅰ车间的概率是

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$=\frac{25\%\times5\%}{25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%}=0.362$$

恰好是第Ⅱ车间的概率是

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$=\frac{35\%\times4\%}{25\%\times5\%+35\%\times4\%+40\%\times2\%}=0.406$$

恰好是第Ⅲ车间生产的概率是

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=0.232$$

由此可见，这件废品是第Ⅱ车间生产的可能性大。

又例，两台机床加工同样的零件，第一台的废品率是0.03，第二台的废品率是0.02。加工出的零件放在一起，且知第一台加工出的零件比第二台多一倍。求任取一零件是合格品的概率。如果取出的一件是废品，求它是第二台加工的概率。

由于无法知道取出的零件到底是哪台车床加工的，故直接求其为合格品的概率有困难。因取出的零件总是其中之一所加工的，因此，可把"取出零件由第一台所加工"和"取出零件由第二台所加工"看成两个事件 A_1 和 A_2。于是 A_1 和 A_2 成为完备群。便可用全概率公式了。设 B 事件为"取出零件是合格品"。因为

$$P(A_1)=\frac{2}{3};\qquad P(B|A_1)=1-0.03=0.97$$

$$P(A_2)=\frac{1}{3};\qquad P(B|A_2)=1-0.02=0.98$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.98=0.973$$