高等数学教程

第二册

施学瑜

清华大学出版社

内 容 提 要

本书第一、二册是参照教育部高等学校工科数学教材编审委员会审订的高等数学(基础部分)教学大纲编写的教材．含有少量超过大纲的内容，冠以星号．第二册内容为多元微积分、级数、常微分方程、场论，共七章．每章每节均配有习题，每章末尾配有复习题．最后附有杂题．绝大部分习题与杂题附有答案或提示．

本书可作为高等工科院校基础数学教材或参考书，也适于工程技术工作者和广大自学者的参考．

高 等 数 学 教 程

(第二册)

施学瑜　编著

☆

清华大学出版社出版

北　京　　清华园

北京市通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

☆

开本：787×1092　1/32　印张：$21\frac{3}{4}$　字数：526千字

1986 年 4 月第 1 版　　1986 年 4 月第 1 次印刷

印数：000001～17500

统一书号：15235・208　　平装定价：2.15 ~~2.60~~元

精装定价：4.60元

目　　录

第9章　多元函数的微分学

多元函数是一元函数的自然推广．本章着重讨论二元函数，三元和更多元的函数类似．

§1．　多元函数

1．　平面区域及其表示法

一个变量的变化范围通常是区间，两个变量的变化范围通常是所谓区域．

简单说，在x，y平面内由一条或几条曲线(包括直线)所界的平面图形，称为平面区域．

以上是用"图形"来解释"区域"．但是，如果要问你，什么是"平面图形"？这就未必能作出明确的回答．"图形"这个概念是比较含糊的，并且不好推广到 n 维的情形．因此，我们需要给区域下一个比较精确的定义．

我们首先引入以下几个概念．

(1) 邻域：

以点$P_0(x_0,y_0)$为圆心，以某个正数δ为半径的圆内(不算圆周)全体点所成的点集，称为**点P_0的 δ 邻域**．δ 称为邻域的**半径**．图 9.1.1．点 P_0 的 δ 邻域常记成 $N(P_0.\delta)$．其中 N是 Neighborhood (邻域)的字头．

另外，有时也可将以P_0为中心的某个矩形内(不算周界)全体点所成的点集称为点P_0的邻域．

将邻域去掉中心，称为**空心 邻域**．

（2） **内点**：

设D为一平面点集，P为D中一点：$P\in D$，如果存在点P的某个邻域$N(P,\delta)$，使得这个邻域整个包含在D内：

$$N(P,\ \delta)\subset D,$$

则称点P为点集D的一个**内点**．图 9.1.2．

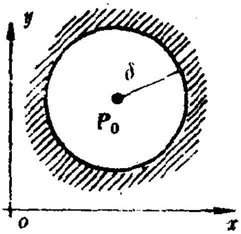


图 9.1.1

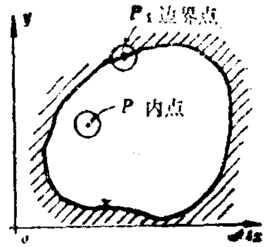


图 9.1.2

（3） **边界点**：

设D为一平面点集，P_1为一点，不论P_1是否属于D，如果在P_1的**任何**邻域内，都既含有属于D的点又含有不属于D的点，则称点P_1为点集D的**边界点**．图9.1.2．

点集D的全体边界点所成的点集，称为点集D的**边界**．

下面说明平面区域的概念．

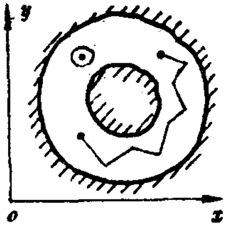
设D为一平面点集，如果D的每一个点都是D自己的内点，并且对D内任何两个点，都可以用一包含在D内的折線连接，则将D称为一个开区域．

开区域连同其边界称为**闭区域**．开区域连同其部分边界称为**半开半闭区域**．

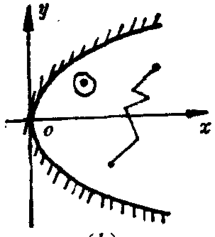
例如，图 9.1.3 中分别由圆环、抛物线所界定的内部全体点(不算边界)所成的点集都是开区域．如果包括边界，都是闭

区域.

区域类似于直线上的区间.区域的特征是成为"块","一"块"是一个区域，两"块"就是两个区域.



(a)



(b)

图 9.1.3

下面说明有界区域的概念.

对于一个区域D，如果$\exists\ M>0$，使得D内任何点到原点的距离都小于M，即：$\forall(x,\ y)\in D$，都在一个大圆内：

$$x^2+y^2<M^2,$$

则称这个区域为**有界区域**.否则称为**无界区域**.

区域常用不等式表示.

例. 考虑图9.1.4的长方形闭域，显然可以表示成：

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ c\leqslant y\leqslant d. \end{cases}$$

例. 考虑图9.1.5的开圆环域，因为：域内任何点$(x,\ y)$到原点的距离都大于r且小于R，反之，到原点的距离大于r且小于R的任何点(x,y)都在域内，因而这个圆环域可表示成：

$$r<\sqrt{x^2+y^2}<R,\ \text{或}\ r^2<x^2+y^2<R^2.$$

2. 二元函数的概念

在许多问题里，常遇到一个变量依赖于几个变量的情形，这样就抽象出多元函数的概念.

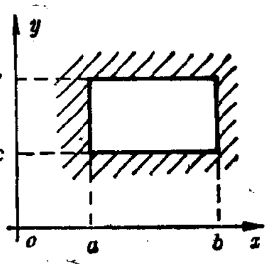


图 9.1.4

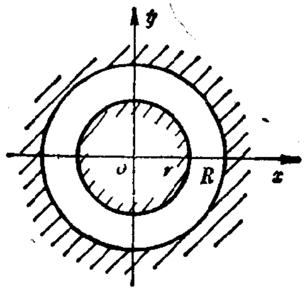


图 9.1.5

例. 理想气体的状态方程是

$$pV=RT,(R\ \text{为常数})$$

其中p为压强，V为体积，T为温度.如果温度T、体积V都在变化，则压强p依赖于T，V的关系是

$$p=R\frac{T}{V},$$

称p为两个变量T，V的函数.

这里，T，V的变化范围是

$$\begin{cases} 0<T<+\infty \\ 0<V<+\infty \end{cases},$$

这是T，V平面上第一象限形成平面点集，记成D，图 9.1.6.这里有一个点$(T，V)$取值的集合D，有一个对应规则："T除以V，再乘常数R"，$\forall(T, V)\in D$，由这个对应规则对应一个确定的实数p.

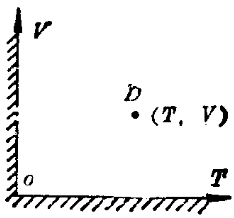


图 9.1.6

二元函数的古典概念如下：

设有三个变量x，y，z，如果对于x，y的每一对所能取到的数值，有z的一个数值对应，则称z是x，y的函数，记成

$$z=f(x,\ y).$$

在现代数学分析中，将D上的对应规则称为函数，采用下面的定义.

定义. 设在x，y平面上有一个非空平面点集D，如果有一个对应规则f，使得对每一个点$P\in D$，都能够对应一个实数z，则将D上的对应规则f称为定义在D上的一个函数.

D称为函数的定义域，又记成D_f.

点$P(x,\ y)$所对应的z称为点$p(x,\ y)$所对应的函数值，记成$z=f(P)$或$z=f(x,\ y)$. x，y称为**自变量**，z又称为**因变量**.

因为我们常通过函数值来研究函数，所以为简单起见，常简称$f(p)$为点p的函数，或$f(x,\ y)$为x,y的函数，或$z=f(x,y)$为x，y的函数. 这里有两个自变量，所以$f(x,\ y)$又称为二元函数.

如果$f(x,y)$是用一个抽象的数学公式表示，我们补充规定其定义域是指有对应函数值的全体自变量的集合.

二元函数的图形是指x,y,z空间的点集：

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

它一般是x,y,z空间的一块或几块曲面(包括平面). 图9.1.7.

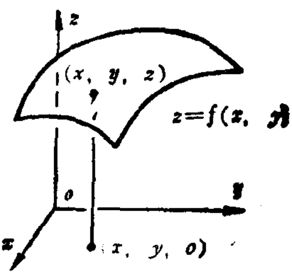


图 9.1.7

下面举几个求定义域的例子.

例. 求$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的定义域.

解. 定义域是

$$R^2-x^2-y^2\geqslant 0,$$

即 $x^2+y^2\leqslant R^2$,

这是x,y平面上以原点为圆心，以R为半径的闭圆域.

例. 求$z=\sqrt{x-y^2}$的定义域，并作出定义域的图形.

解. 定义域是

$$x-y^2\geqslant 0, \quad 即 x\geqslant y^2.$$

怎样作出这个定义域的图形？可以先作出边界线$x=y^2$，这是图9.1.8的抛物线，它将x,y平面分成抛物线内部、外部两个区域，内部区域满足$x>y^2$，外部区域满足$x<y^2$. 因而这个定义域是图9.1.8的抛物线所界定的内部区域并包含其边界. 解毕.

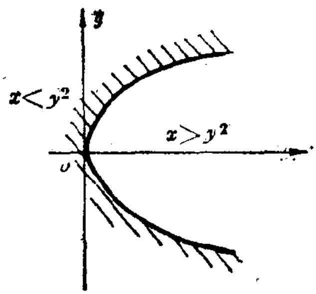


图 9.1.8

和一元函数类似，我们也可以引入二元多值函数、单值函数的概念. 如$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是多值函数，我们约定两个单值支是$y=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$y=-\sqrt{R^2-x^2-$
$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的图形是中心为原点的上半球
$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的图形是中心为原点的下半球面.

今后如无特别声明，凡说到函数这一名称都指单值函数.

另外，如果函数只依赖于一个变量，我们也可以将它看成二元函数，不过这时它的几何意义一般是**母线平行于坐标轴的柱面**.

例. $z=x^2$当成二元函数，是图9.1.9的抛物柱面.

二元函数的等值线:

为了直观想象二元函数的几何意义，我们引入等值线的概念.

设有二元函数$z=f(x,y)$，考虑在x，y平面上使得函数值恒为某常数c的点集:

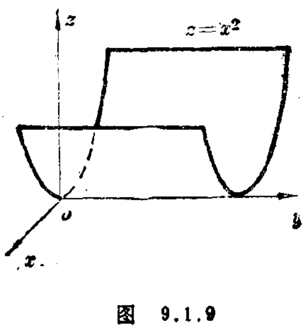


图 9.1.9

$$f(x,y)=c,$$

如果它是x，y**平面上的曲线，则将它称为二元函数**$z=f(x,y)$**的等值线**.图9.1.10.

等值线类似于地形图上的等高线.

当c取所有可能的数值，得许多条等值线，称为**等值线族**.

由一些等值线的形状可以想象曲面的形状.

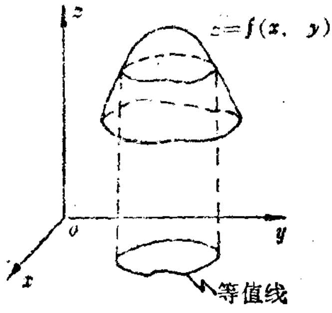


图 9.1.10

例. $z=x^2y^2$，等值线是

$$x^2y^2=c,$$

取 $c=0,1,2,\cdots$,作出等值线如图9.1.11(a)，(箭头表示c增大方向)，于是可想象曲面形状如图9.1.11(b).

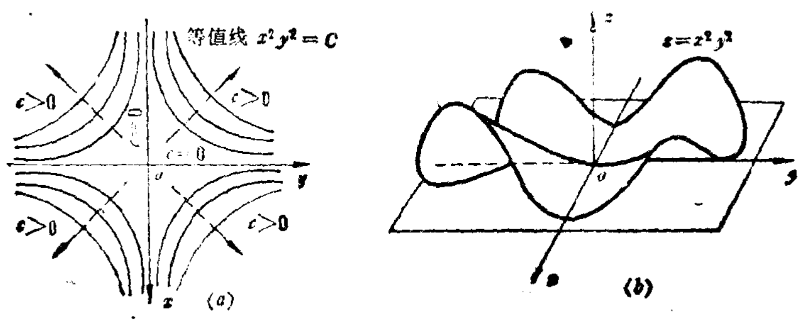


图 9.1.11

3. 二元函数的极限与连续性

首先说明，对什么样的点(x_0,y_0)，才可以研究$f(x,y)$当(x,y)趋向(x_0,y_0)时的极限？

显然，**不论**(x_0,y_0)**是否属于定义域**，只有当函数$f(x,y)$

的定义域内的点(x,y)可以无限逼近(x_0,y_0)时，如图 9.1.12，才可以研究$f(x,y)$当(x,y)趋向(x_0,y_0)时$f(x,y)$的极限.

这种点的特征是：**不论(x_0, y_0)是否属于定义域，在(x_0,y_0)的任何邻域内都含有定义域的异于(x_0,y_0)的点**. 这种点称为函数定义域的**聚点**或**极限点**. 以下只考虑这种点.

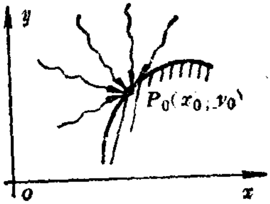


图 9.1.12

直观说，如果当函数定义域内的点(x,y)无限逼近(x_0,y_0)但不变成(x_0,y_0)时，$f(x,y)$无限逼近一个常数A，则称：当(x,y)趋向(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限为A，记成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A, \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

补充规定：常数的极限等于它本身：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C=C$.

仿照一元函数极限的精确定义，可以写出二元函数极限的精确定义如下：

定义. 设有函数$f(x,y)$及其定义域D_f的一个聚点(x_0,y_0)，如果：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，**使得对属于点(x_0,y_0)的δ空心邻域且属于定义域D_f内的任一点(x,y)，即当**

$$(x,y)\in D_f\cap N((x_0,y_0),\delta) \text{ 且 } (x,y)\neq(x_0,y_0)$$

时，成立

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称：当(x,y)趋向(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限为A，记成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

(x,y)趋向无穷远时$f(x,y)$的极限可以类似定义

二元函数极限的四则运算法则、夹逼定理等均与一元函数类似.

求二元函数的极限比求一元函数的极限复杂得多.不过,有些二元函数的极限,可通过变量置换化为一元函数的极限,或利用夹逼定理求出.

例. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{y}\sin xy=0$.

证.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{y}\sin xy=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\frac{\sin xy}{xy}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}=0\cdot 1=0.$$

其中上式的第二个极限,为 1 ,是因为令$t=xy$,即得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$ 解毕.

例. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0$.

证. 定义域是除$(0,0)$外的全体点.我们应当证明当(x,y)趋向无穷远时$f(x,y)\to 0$.我们利用夹逼定理:

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\frac{|x|}{x^2+y^2}+\frac{|y|}{x^2+y^2}.$$

因为$|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$,$|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$,所以

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0,$$

$$(x^2+y^2\to\infty)$$

因而 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$ 证毕.

如果当(x,y)至少沿两条路径趋向(x_0,y_0)时，$f(x,y)$趋向不同的数值，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在.

例. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$不存在.

证. 函数的定义域是除去直线$y=x$，$y=-x$外的全体点. 如果取(x,y)沿直线$y=kx$趋向$(0,0)$，其中$k\neq\pm1$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (y=kx)}}\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(kx)^2}{x^2-(kx)^2}=\frac{1+k^2}{1-k^2}.$$

结果依赖于k的数值，因此原极限不存在. 证毕.

下面说明**二次极限**的概念.

如图 9.1.13，先让$(x,y)\to(x,y_0)$，再让$(x,y_0)\to(x_0,y_0)$，所得的极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$称为**先对$y$后对$x$的二次极限**. 如果先让$(x,y)\to(x_0,y)$，再让$(x_0,y)\to(x_0,y_0)$，所得的极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$称为**先对$x$后对$y$的二次极限**.

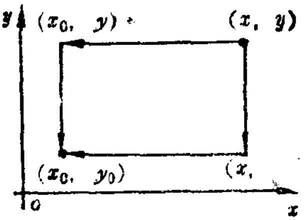


图 9.1.13

显然，如果两个二次极限都存在，未必能得出极限存在. 但反之，如果极限存在，是否两个二次极限都存在？乍一看，这个问题的回答似乎是肯定的，其实未必.如

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\frac{1}{y}=0,$$

(因为$\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right|\leqslant|x|\to0$)，即极限存在，但当$x\neq0$时，$\lim\limits_{y\to0}x\sin\dfrac{1}{y}$不存在，因此二次极限$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}x\sin\dfrac{1}{y}$也不存在.

我们可以证明：**如果** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ **存在，且** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ **存在，则两个二次极限都存在，且**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

和一元函数类似，我们可以引入二元函数连续的概念.

定义.设函数 $f(x,y)$ **在** (x_0,y_0) **的某邻域内有定义，且**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **连续.**

和一元函数在区间上连续的概念类似，我们可以引入二元函数在区域上连续的概念.

如果二元函数 $f(x,y)$ 在某个开区域有定义，且在开区域的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ **在该开区域上连续.**

如果二元函数 $f(x,y)$ 在某个闭区域上有定义，且满足条件：

(1) 函数在该闭区域去掉边界后形成的开区域上连续；

(2) 当动点由闭区域趋向边界点时，函数的极限等于该边界点的函数值，则称函数 $f(x,y)$ **在该闭区域上连续.**

类似定义二元函数在半开半闭区域上连续的概念.

考虑一个变量 x 或 y 的基本初等函数，将它们当成二元函数，如

$$c,x^a,y^a,\ \sin x,\ \sin y,\cdots,$$

称为**二元基本初等函数.**

将二元基本初等函数经有限次四则运算与复合组成的函数，称为**二元初等函数.**如