

# 高等数学教程

第二册

施学瑜

清华大学出版社

## 内 容 提 要

本书第一、二册是参照教育部高等学校工科数学教材编审委员会审订的高等数学(基础部分)教学大纲编写的教材。含有少量超过大纲的内容,冠以星号。第二册内容为多元微积分、级数、常微分方程、场论,共七章。每章每节均配有习题,每章末尾配有复习题。最后附有杂题。绝大部分习题与杂题附有答案或提示。

本书可作为高等工科院校基础数学教材或参考书,也适于工程技术工作者和广大自学者的参考。

## 高 等 数 学 教 程

(第二册)

施学瑜 编著

☆

清华大学出版社出版

北 京 清 华 园

北京市通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

☆

开本:  $787 \times 1092$  1/32 印张:  $21\frac{3}{4}$  字数: 526千字

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数: 000001~17500

统一书号: 15235·208

平装定价: ~~3.15~~元

精装定价: 4.60元

791237/13

## 目 录

<b>第 9 章 多元函数的微分学</b> .....	1
§1. 多元函数.....	1
§2. 偏导数与全微分, 全微分在近似计算与误差理论中的应用.....	16
§3. 多元函数的求导法, *链导法在坐标变换中的应用.....	39
§4. 微分学的若干应用: 空间曲线的切线, 曲面的切平面, 全微分的几何意义, *多元泰勒公式, *曲线族的包络.....	64
§5. 方向导数与梯度.....	83
§6. 多元函数的极值, 拉格朗日乘数法, 最小二乘法.....	91
复习题 .....	105
附录. 有关多元函数连续、存在偏导数、可微之间关系的几个例子.....	108
<b>第 10 章 重积分, 第一型曲线积分与曲面积分</b> .....	111
§1. 二重积分的概念与性质.....	111
§2. 二重积分的计算法.....	120
§3. 二重积分的应用.....	141
§4. 三重积分.....	153
§5. 第一型曲线积分与曲面积分.....	173
§6. 各种积分的统一概念.....	182

复习题 .....	183
<b>第11章 第二型曲线积分与曲面积分</b> .....	186
§1. 第二型曲线积分, 格林公式 .....	186
§2. 平面曲线积分与路径无关问题, 二元全微分式的 条件, 牛顿-莱布尼兹公式 .....	199
§3. 第二型曲面积分, 高斯公式与斯托克斯公式 .....	217
§4. 空间曲线积分与路径无关问题 .....	232
复习题 .....	239
附录. 斯托克斯定理的证明 .....	240
<b>第12章 级数</b> .....	243
§1. 数项级数的概念与性质, 调和级数, 几何级数 .....	244
§2. 正项级数及其判别法, $p$ 级数 .....	254
§3. 交错级数与任意项级数 .....	274
§4. 函数项级数与幂级数 .....	285
§5. 函数展开为幂级数, 幂级数的应用, *椭圆积分 简介 .....	291
§6. 函数项级数的一致收敛性 .....	319
*§7. 含参变数积分的解析性质 .....	345
<b>第13章 付里叶级数</b> .....	356
§1. 周期函数的付里叶级数 .....	356
§2. 仅在 $[0, l]$ 上有定义的函数展开为付里叶级数 .....	373
*§3. 距离空间与内积空间的初步概念, 广义付里叶 级数 .....	377
第 12, 13 章复习题 .....	391

**第14章 常微分方程** .....394

§1. 一阶微分方程, 单参数曲线族的微分方程.....396

§2. 高阶微分方程, 可降阶的高阶微分方程.....431

§3. 高阶线性微分方程.....440

§4. 高阶常系数线性微分方程, 欧拉方程.....454

§5. 二阶常系数线性微分方程应用举例.....475

§6. 解的存在唯一性定理, 方向场与近似解法, \*朗斯基行列式 .....487

§7. 微分方程的级数解.....502

§8. 微分方程组.....508

\*§9. 拉普拉斯变换.....527

复习题 .....541

附录. 柯西-皮卡定理的证明 .....543

**\*第15章 场论**.....551

§1. 数量场与向量场, 数量场的方向导数与梯度.....551

§2. 向量场的通量与散度.....565

§3. 向量场的循环量与旋度.....580

§4. 无源场、有势场与调和场.....590

§5. 哈密顿算子的运算公式与若干积分公式.....599

§6. 梯度、散度、旋度、调和量在正交曲线坐标系中的表示式 .....607

复习题 .....620

附录1. 旋转刚体的角速度向量与线速度向量 .....621

附录2. 场论公式在传热学理论与电磁场理论中的应用举例 .....623

各章的杂题 .....	630
习题答案与提示 .....	648
本书第一册、第二册重要公式一览表 .....	684

## 第9章 多元函数的微分学

多元函数是一元函数的自然推广.本章着重讨论二元函数,三元和更多元的函数类似.

### §1. 多元函数

#### 1. 平面区域及其表示法

一个变量的变化范围通常是区间,两个变量的变化范围通常是所谓区域.

简单说,在 $x, y$ 平面内由一条或几条曲线(包括直线)所界的平面图形,称为平面区域.

以上是用“图形”来解释“区域”.但是,如果要问你,什么是“平面图形”?这就未必能作出明确的回答.“图形”这个概念是比较含糊的,并且不好推广到 $n$ 维的情形.因此,我们需要给区域下一个比较精确的定义.

我们首先引入以下几个概念.

#### (1) 邻域:

以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心,以某个正数 $\delta$ 为半径的圆内(不算圆周)全体点所成的点集,称为点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域. $\delta$ 称为邻域的半径.图9.1.1.点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域常记成 $N(P_0, \delta)$ .其中 $N$ 是Neighborhood(邻域)的字头.

另外,有时也可将以 $P_0$ 为中心的某个矩形内(不算周界)全体点所成的点集称为点 $P_0$ 的邻域.

将邻域去掉中心，称为**空心邻域**。

(2) **内点**：

设 $D$ 为一平面点集， $P$ 为 $D$ 中一点： $P \in D$ ，如果存在点 $P$ 的某个邻域 $N(P, \delta)$ ，使得这个邻域整个包含在 $D$ 内。

$$N(P, \delta) \subset D,$$

则称点 $P$ 为点集 $D$ 的一个**内点**。图 9.1.2。

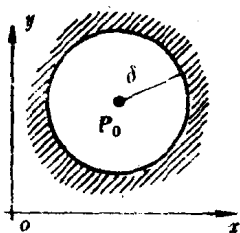


图 9.1.1

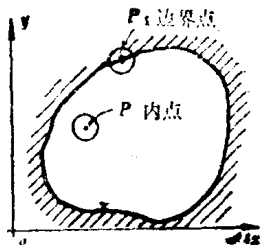


图 9.1.2

(3) **边界点**：

设 $D$ 为一平面点集， $P_1$ 为一点，不论 $P_1$ 是否属于 $D$ ，如果在 $P_1$ 的任何邻域内，都既含有属于 $D$ 的点又含有不属于 $D$ 的点，则称点 $P_1$ 为点集 $D$ 的**边界点**。图9.1.2。

点集 $D$ 的全体边界点所成的点集，称为点集 $D$ 的**边界**。

下面说明平面区域的概念。

设 $D$ 为一平面点集，如果 $D$ 的每一个点都是 $D$ 自己的内点，并且对 $D$ 内任何两个点，都可以用一包含在 $D$ 内的折线连接，则将 $D$ 称为一个**开区域**。

开区域连同其边界称为**闭区域**。开区域连同其部分边界称为**半开半闭区域**。

例如，图 9.1.3 中分别由圆环、抛物线所界定的内部全体点(不算边界)所成的点集都是开区域。如果包括边界，都是闭



区域.

区域类似于直线上的区间,区域的特征是成为“块”,一块是一个区域,两块就是两个区域.

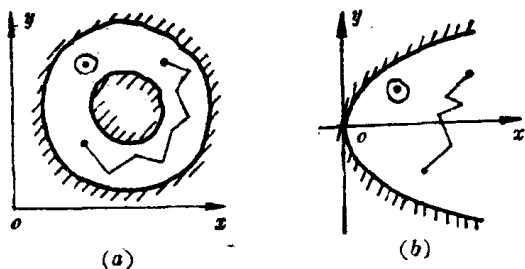


图 9.1.3

下面说明有界区域的概念.

对于一个区域 $D$ , 如果 $\exists M > 0$ , 使得 $D$ 内任何点到原点的距离都小于 $M$ , 即:  $\forall (x, y) \in D$ , 都在一个大圆内:

$$x^2 + y^2 < M^2,$$

则称这个区域为**有界区域**. 否则称为**无界区域**.

区域常用不等式表示.

例. 考虑图9.1.4的长方形闭域, 显然可以表示成:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$$

例. 考虑图9.1.5的开圆环域, 因为: 域内任何点 $(x, y)$ 到原点的距离都大于 $r$ 且小于 $R$ , 反之, 到原点的距离大于 $r$ 且小于 $R$ 的任何点 $(x, y)$ 都在域内, 因而这个圆环域可表示成:

$$r < \sqrt{x^2 + y^2} < R, \text{ 或 } r^2 < x^2 + y^2 < R^2.$$

## 2. 二元函数的概念

在许多问题里, 常遇到一个变量依赖于几个变量的情形, 这样就抽象出多元函数的概念.

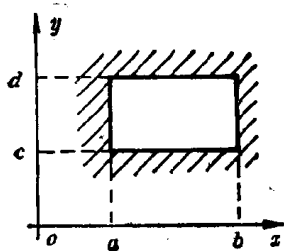


图 9.1.4

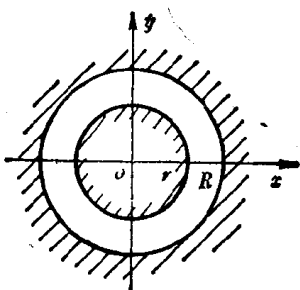


图 9.1.5

例. 理想气体的状态方程是

$$pV = RT, (R \text{ 为常数})$$

其中  $p$  为压强,  $V$  为体积,  $T$  为温度. 如果温度  $T$ 、体积  $V$  都在变化, 则压强  $p$  依赖于  $T, V$  的关系是

$$p = R \frac{T}{V},$$

称  $p$  为两个变量  $T, V$  的函数.

这里,  $T, V$  的变化范围是

$$\begin{cases} 0 < T < +\infty \\ 0 < V < +\infty \end{cases}$$

这是  $T, V$  平面上第一象限形成平面点集, 记成  $D$ ,

图 9.1.6. 这里有一个点  $(T, V)$  取值的集合  $D$ , 有一个对应规则:

“ $T$  除以  $V$ , 再乘常数  $R$ ”,

$\forall (T, V) \in D$ , 由这个对应规则对应一个确定的实数  $p$ .

二元函数的古典概念如下:

设有三个变量  $x, y, z$ , 如果对于  $x, y$  的每一对所能取到的数值,

有  $z$  的一个数值对应, 则称  $z$  是  $x,$

$y$  的函数, 记成

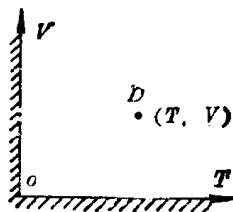


图 9.1.6

$$z = f(x, y).$$

在现代数学分析中，将 $D$ 上的对应规则称为函数，采用下面的定义。

**定义.** 设在 $x, y$ 平面上有一个非空平面点集 $D$ ，如果有一个对应规则 $f$ ，使得对每一个点 $P \in D$ ，都能够对应一个实数 $z$ ，则将 $D$ 上的对应规则 $f$ 称为定义在 $D$ 上的一个函数。

$D$ 称为函数的定义域，又记成 $D_f$ 。

点 $P(x, y)$ 所对应的 $z$ 称为点 $p(x, y)$ 所对应的函数值，记成 $z = f(P)$ 或 $z = f(x, y)$ 。 $x, y$ 称为**自变量**， $z$ 又称为**因变量**。

因为我们常通过函数值来研究函数，所以为简单起见，常简称 $f(p)$ 为点 $p$ 的函数，或 $f(x, y)$ 为 $x, y$ 的函数，或 $z = f(x, y)$ 为 $x, y$ 的函数。这里有两个自变量，所以 $f(x, y)$ 又称为二元函数。

如果 $f(x, y)$ 是用一个抽象的数学公式表示，我们补充规定：其定义域是指有对应函数值的全体自变量的集合。

**二元函数的图形**是指 $x, y, z$ 空间的点集：

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

它一般是 $x, y, z$ 空间的一块或几块曲面(包括平面)。图9.1.7。

下面举几个求定义域的例子。

**例.** 求 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的定义域

**解.** 定义域是

$$R^2 - x^2 - y^2 \geq 0,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

这是 $x, y$ 平面上以原点为圆心，以 $R$ 为半径的闭圆域。

**例.** 求 $z = \sqrt{x - y^2}$ 的定义域，并作出定义域的图形。

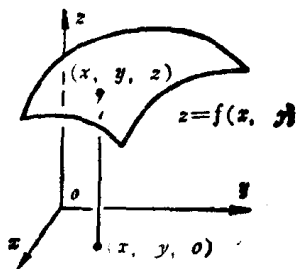


图 9.1.7

解. 定义域是

$$x - y^2 \geq 0, \text{ 即 } x \geq y^2.$$

怎样作出这个定义域的图形? 可以先作出边界线  $x = y^2$ , 这是图 9.1.8 的抛物线, 它将  $x, y$  平面分成抛物线内部、外部两个区域, 内部区域满足  $x > y^2$ , 外部区域满足  $x < y^2$ . 因而这个定义域是图 9.1.8 的抛物线所界定的内部区域并包含其边界. 解毕.

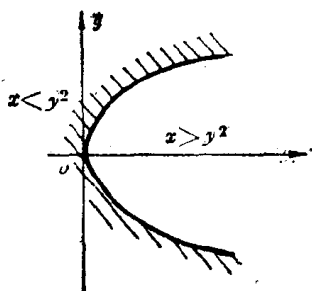


图 9.1.8

和一元函数类似, 我们也可以引入二元多值函数、单值函数的概念. 如  $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  是多值函数, 我们约定两个单值支是  $y = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ,  $y = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的图形是中心为原点的上半球面,  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的图形是中心为原点的下半球面.

今后如无特别声明, 凡说到函数这一名称都指单值函数.

另外, 如果函数只依赖于一个变量, 我们也可以将它看成二元函数, 不过这时它的几何意义一般是母线平行于坐标轴的柱面.

例.  $z = x^2$  当成二元函数, 是图 9.1.9 的抛物柱面.

二元函数的等值线:

为了直观想象二元函数的几何意义, 我们引入等值线的概念.

设有二元函数  $z = f(x, y)$ , 考虑在  $x, y$  平面上使得函数值恒为某常数  $c$  的点集:

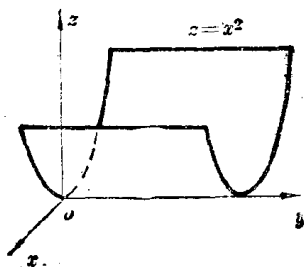


图 9.1.9

$$f(x, y) = c.$$

如果它是  $x, y$  平面上的曲线, 则将它称为二元函数  $z = f(x, y)$  的等值线. 图 9.1.10.

等值线类似于地形图上的等高线.

当  $c$  取所有可能的数值, 得许多条等值线, 称为等值线族.

由一些等值线的形状可以想象曲面的形状.

例.  $z = x^2 y^2$ , 等值线是

$$x^2 y^2 = c,$$

取  $c = 0, 1, 2, \dots$ , 作出等值线如图 9.1.11(a), (箭头表示  $c$  增大方向), 于是可想象曲面形状如图 9.1.11(b).

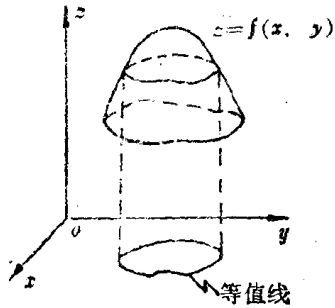


图 9.1.10

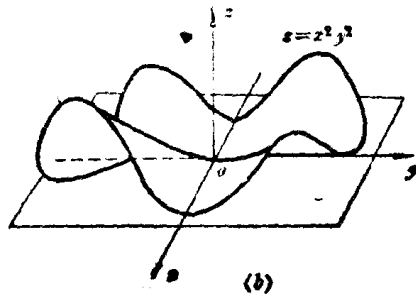
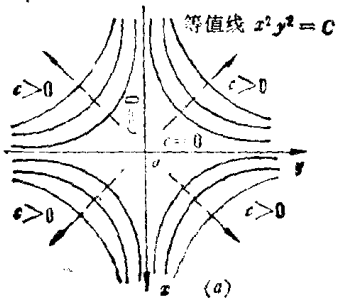


图 9.1.11

### 3. 二元函数的极限与连续性

首先说明, 对什么样的点  $(x_0, y_0)$ , 才可以研究  $f(x, y)$  当  $(x, y)$  趋向  $(x_0, y_0)$  时的极限?

显然, 不论  $(x_0, y_0)$  是否属于定义域, 只有当函数  $f(x, y)$

的定义域内的点 $(x, y)$ 可以无限逼近 $(x_0, y_0)$ 时, 如图 9.1.12, 才可以研究 $f(x, y)$ 当 $(x, y)$ 趋向 $(x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限.

这种点的特征是: 不论 $(x_0, y_0)$ 是否属于定义域, 在 $(x_0, y_0)$ 的任何邻域内都含有定义域的异于 $(x_0, y_0)$ 的点. 这种点称为函数定义域的聚点或极限点. 以下只考虑这种点.

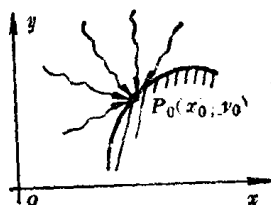


图 9.1.12

直观说, 如果当函数定义域内的点 $(x, y)$ 无限逼近 $(x_0, y_0)$ 但不变成 $(x_0, y_0)$ 时,  $f(x, y)$ 无限逼近一个常数 $A$ , 则称: 当 $(x, y)$ 趋向 $(x_0, y_0)$ 时,  $f(x, y)$ 的极限为 $A$ , 记成

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

补充规定: 常数的极限等于它本身:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} C = C.$

仿照一元函数极限的精确定义, 可以写出二元函数极限的精确定义如下:

**定义.** 设有函数 $f(x, y)$ 及其定义域 $D_f$ 的一个聚点 $(x_0, y_0)$ , 如果:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对属于点 $(x_0, y_0)$ 的 $\delta$ 空心邻域且属于定义域 $D_f$ 内的任一点 $(x, y)$ , 即当

$$(x, y) \in D_f \cap N((x_0, y_0), \delta) \text{ 且 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

时, 成立

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称: 当 $(x, y)$ 趋向 $(x_0, y_0)$ 时,  $f(x, y)$ 的极限为 $A$ , 记成

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

$(x, y)$ 趋向无穷远时 $f(x, y)$ 的极限可以类似定义

二元函数极限的四则运算法则、夹逼定理等均与一元函数类似。

求二元函数的极限比求一元函数的极限复杂得多,不过,有些二元函数的极限,可通过变量置换化为一元函数的极限,或利用夹逼定理求出。

例. 证明  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{y} \sin xy = 0$ .

证.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{y} \sin xy &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( x \frac{\sin xy}{xy} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

其中上式的第二个极限,为1,是因为令 $t=xy$ ,即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad \text{解毕.}$$

例. 证明  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$ .

证. 定义域是除 $(0,0)$ 外的全体点. 我们应当证明当 $(x,y)$ 趋向无穷远时 $f(x,y) \rightarrow 0$ . 我们利用夹逼定理:

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{|y|}{x^2+y^2}.$$

因为  $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ , 所以

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0, \quad (x^2+y^2 \rightarrow \infty)$$

因而

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

证毕.

如果当 $(x, y)$ 至少沿两条路径趋向 $(x_0, y_0)$ 时,  $f(x, y)$ 趋向不同的数值, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

例. 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ 不存在.

证. 函数的定义域是除去直线 $y = x, y = -x$ 外的全体点. 如果取 $(x, y)$ 沿直线 $y = kx$ 趋向 $(0, 0)$ , 其中 $k \neq \pm 1$ , 则

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (kx)^2}{x^2 - (kx)^2} = \frac{1 + k^2}{1 - k^2}.$$

结果依赖于 $k$ 的数值, 因此原极限不存在.

证毕.

下面说明二次极限的概念.

如图 9.1.13, 先让 $(x, y) \rightarrow (x, y_0)$ , 再让 $(x, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$ , 所得的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 称为先

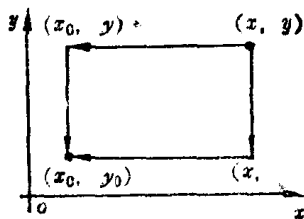


图 9.1.13

对 $y$ 后对 $x$ 的二次极限. 如果先让 $(x, y) \rightarrow (x_0, y)$ , 再让 $(x_0, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ,

所得的极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 称为先对 $x$ 后对 $y$ 的

二次极限.

显然, 如果两个二次极限都存在, 未必能得出极限存在. 但反之, 如果极限存在, 是否两个二次极限都存在? 乍一看, 这个问题的回答似乎是肯定的, 其实未必. 如

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \sin \frac{1}{y} = 0,$$

(因为 $|x \sin \frac{1}{y}| \leq |x| \rightarrow 0$ ), 即极限存在, 但当 $x \neq 0$ 时,  $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$

不存在, 因此二次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$ 也不存在.



我们可以证明：如果  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$  存在，且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ ,

$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  存在，则两个二次极限都存在，且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

和一元函数类似，我们可以引入二元函数连续的概念。

**定义.** 设函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续。

和一元函数在区间上连续的概念类似，我们可以引入二元函数在区域上连续的概念。

如果二元函数  $f(x, y)$  在某个开区域有定义，且在开区域的每一点都连续，则称函数  $f(x, y)$  在该开区域上连续。

如果二元函数  $f(x, y)$  在某个闭区域上有定义，且满足条件：

- (1) 函数在该闭区域去掉边界后形成的开区域上连续；
- (2) 当动点由闭区域趋向边界点时，函数的极限等于该边界点的函数值，则称函数  $f(x, y)$  在该闭区域上连续。

类似定义二元函数在半开半闭区域上连续的概念。

考虑一个变量  $x$  或  $y$  的基本初等函数，将它们当成二元函数，如

$$c, x^a, y^a, \sin x, \sin y, \dots,$$

称为二元基本初等函数。

将二元基本初等函数经有限次四则运算与复合组成的函数，称为二元初等函数。如