高中数学解题思想方法

王正林 编著

新时代出版社

高中数学解题思想方法

王正林　编著

新时代出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题思想方法/王正林编著．-北京:新时代出版社,2000.1

ISBN 7-5042-0425-0

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课-高中-数学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17033 号

新时代出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京怀柔新华印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 18½ 486 千字
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1-3000 册 定价:25.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

序

中国名校江苏省常州高级中学的数学学科带头人、高级教师王正林先生编著的《高中数学解题思想方法》正式出版了,这是高中数学界难得的一本好书。这本书好就好在跳出了数学教学的传统观念,提出了把高中数学教学的重点放在培养学生数学思维的能力,帮助学生形成正确的数学意识和观念,并掌握科学的数学思想方法。毫无疑问,以上目的的达到必须以传授数学知识为载体,王正林先生这本书正是把数学教学中这种创新思想,通过高中数学中各类知识的传授,得以体现和落实,把传统的知识传授升华到数学思想方法的培养,并内化为学生思维品质的提高,以达到优化学生素质的目的,这正是数学教学在学校全面实施素质教育中的地位和作用。

当今世界是科学技术大发展,知识经济大崛起,国际人才大竞争的全球化时代,教育的改革,直至学科教学领域的改革刻不容缓,王正林先生这本书为学科教学领域的改革作出了尝试,提供了借鉴,值得全体教育工作者,特别是一线教学工作者的深思,为此我提出三点,供学校师生思考和参考:

一是全日制学校必须以教学为中心,而教学又必须以课堂教学为主,而课堂教学又必须以教材为本,教师既要带着教材走向学生,又要启发、指导、激励学生拿着教材走向教师,真正做到以知识为载体,落实学科思想方法的培养。

二是学科思维能力的培养,学科意识、观念的形成,学科思想方法的掌握,必须在知识的传授上实现一个转变,即从“学会”到“会学”的转变。“学会”就是对知识做到“懂、会、熟、巧”;“会学”就是能“获取知识,处理知识,应用知识,拓展知识”。

三是要实施以培养学生创造能力为主体的创新教育，这是素质教育的核心，这是教育与知识经济时代相适应的主要标志，在学科教学中不仅要培养学生的逻辑思维，形象思维，还要激发学生的顿悟思维，这是教书育人的核心和精华。

丁 浩 生[①]

1998 年于江苏常州

---

① 丁浩生：江苏省常州高级中学校长、特级教师、全国高级中学校长委员会理事。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongboo

前　言

（强化数学意识，提高数学能力）

从数学教育的角度看，数学知识不仅指它所包含的数学内容，如概念、定理、公式等，还包含由这些数学内容所反映出来的数学观念和数学思想、方法。这就是说，数学教育必须突出数学观念和数学思想、方法的确立。这一认识正在导致对“传授知识”这一传统教学观念的变革，赋以“培养能力”这一现代教学任务明确的内函，并将深刻影响到数学教育的改革进程。

剖析数学能力的结构可以看出，数学能力的核心是思维能力，而思维的意识性又是思维能力的重要表征之一。

数学的观念，数学的思想和方法是以一种意识的形态存在于人的头脑中，并以意识的形式活跃于人的思维，作用于人的思维。

所谓意识，就是人脑对客观世界认识的综合反映，是人们的观念、观点、概念的总和。意识使人们在认识事物的思维过程中产生一种自然的心理倾向，这种思维的心理倾向在相应的情境中就会调整、改善思维，形成解决问题的思路和方法，辨别解决问题过程中的操作方向。

数学的观念，数学的思想和方法以数学知识为载体，作用于数学活动的全过程。在教师的教学活动中，在学生的数学知识结构的形成、完善过程中，如果能有意识地以某种数学的观点去观察、分析数学问题，使学生不断地获取、积累、深化这些数学观点，那么这些数学观点就能在学生的头脑中升华为数学意识，这些数学意识在相应的思维情境中将自然地调控、改善学生的思维，引发思维的灵感，获得解决问题的方法。这就是说，数学意识源于数学实践，又反作用于数学实践，因此，数学意识的培养和确立将从根本

上提高学生的数学素质,使学生受益终生,因而也是数学教学的根本目的。

实践告诉我们,有没有数学意识,数学意识强烈不强烈是解题过程中能不能迅速想到合理的解题方法的关键,所以说,数学意识体现着一个人的数学能力,体现着一个人的数学修养,数学素质。在数学教学中有意识地、明确地向学生揭示与数学知识相关的数学思想、方法,逐步渗透,系统训练,不断积累,提炼强化,是使学生形成数学意识的重要途径。必须特别指出的是,数学意识的形成、确立和强化是一个潜移默化的长期过程,必须渗透到学生学习数学的全部过程之中。

本书旨在以高中数学知识为载体,与教学同步、系统地向学生介绍相关的数学观点,数学思想、方法,强化各种数学观念,举例教会学生从各种不同的角度,应用各种不同的数学观点,寻找各种解决问题的方法,进行各种数学实践,使数学观点在学生的思维活动中强化、升华为数学意识(如揭示数学概念的本质、数学符号的数学意义的意识,求值中的函数意识、方程意识,求值、化简中的消元意识,看待等式的方程意识、函数意识、恒等式的意识,等式的消元作用意识、限制变量取值范围作用的意识、数形结合的意识,立体几何中添加辅助线的基本图形意识,作线先作面、线作在面内的意识,解题操作中的可行性意识等等),使学生的解题分析有数学思想的指导,解题操作有明确的目标,形成良好的思维素质,从根本上提高数学能力。

希望这本书能为广大高中学生的数学学习提供有益的帮助,也能为广大高中数学教师的教学提供参考。囿于作者水平,书中缺点、错误在所难免,欢迎广大读者批评指正。

在本书的编写过程中,嵇国平老师给予了大力帮助,在此表示感谢。

作　者

1999 年 10 月

目　录

代　数

立体几何

解析几何

代　数

第一章　函　数

一、认识集合是解集合问题的基础

集合是指一组确定的、不同的对象组成的一个整体。一个给定的集合中的元素具有下列特性：

(1)确定性，即任何一个对象或者是这个集合的元素，或者不是它的元素；

(2)互异性，即集合中的元素是各不相同的；

(3)无序性，即集合中的元素相互交换次序所得的集合与原来的集合是相同的。

集合可以用大写英文字母抽象表示，也可以用列举法、描述法具体表示。

认识集合是解集合问题的基础，认识集合的基本方法是：从不同的角度分析集合中的元素是什么？元素有何特性？较多的是从代数的角度或几何的角度去认识一个集合，这时，集合可以看作方程的解集、不等式的解集、函数的定义域、函数的值域，或看作数轴上的点集、坐标平面内的点集等。

例 1　若集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $B=\{y\mid y=x-1, x\in A\}$，则$\{0\}$与 B 的关系是(　　)。

(a)$\{0\}\in B$　　(b)$\{0\}\subset B$

(c)$\{0\}\not\subset B$　　(d)$\{0\}\supseteq B$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

分析 集合 A 为有限数集,从代数角度看,集合 B 为以 $y=x-1$为解析式,集合 A 为定义域的函数的值域。

解 函数 $y=x-1\quad x\in A$ 的值域为$\{0,1,2,3\}$,

$\therefore\quad B=\{0,1,2,3\}$,

$\therefore\quad 0\in B$,

$\therefore\quad \{0\}\subset B$,故选(b)。

例 2 已知 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$, $B=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $B\subset A$, 求实数 a 的取值。

分析 题设中的集合 A、B 都是方程的解集,集合 A 是一个一元二次方程的解集,其中有且只有两个不同的元素,集合 B 是一个一元一次方程的解集,其可能为空集或其中有且只有一个元素,由 $B\subset A$ 知,方程 $ax-1=0$ 无解或者方程 $ax-1=0$ 的解就是方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个解。

解 $\because\quad A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$,

又$\because\quad B\subset A$,

$\therefore$ 方程 $ax-1=0$ 无解或方程 $ax-1=0$ 的解为 -1 或为 3。

若方程 $ax-1=0$ 无解,

则 $\quad a=0$;

若方程 $ax-1=0$ 的解为 -1,

则 $\quad \dfrac{1}{a}=-1$,

$\therefore\quad a=-1$。

若方程 $ax-1=0$ 的解为 3,

则 $\quad \dfrac{1}{a}=3$,

$\therefore\quad a=\dfrac{1}{3}$。

综上所述,实数 a 的取值为 $0,-1,\dfrac{1}{3}$。

例 3 已知集合 $A=\{x\mid x^2-(a^2+a+1)x+a(a^2+1)>0\}$, $B=\{y\mid y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取

值范围。

分析 从代数角度看,集合 A 是不等式 $x^2-(a^2+a+1)x+a(a^2+1)>0\}$ 解集,集合 B 是函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},(0\leqslant x\leqslant 3)$ 的值域,它们都是数集。

解 不等式 $x^2-(a^2+a+1)x+a(a^2+1)>0$ 可以化为,

$$(x-a)[x-(a^2+1)]>0。$$

$\because\quad a^2+1>a,$

$\therefore\quad$ 不等式的解为 $x<a$ 或 $x>a^2+1$,

$\therefore\quad A=(-\infty,a)\cup(a^2+1,+\infty)$。

函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$ 的图像的对称轴为 $x=1$,

$\because\quad$ 函数的定义域为 $[0,3]$,

$\therefore\quad$ 函数的值域为 $[2,4]$,

$\therefore\quad B=[2,4]$。

$\because\quad A\cap B=\varnothing,$

$\therefore\quad a\leqslant 2$ 且 $a^2+1\geqslant 4$,

$\therefore\quad a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$。

例 4 设 $f(x)=x^2+ax+b$,$A=\{x\mid f(x)=x\}=\{a\}$,求 a 和 b。

分析 从代数角度看 $A=\{x\mid f(x)=x\}=\{a\}$ 可知,集合 A 是方程 $f(x)=x$,即 $x^2+(a-1)x+b=0$ 的解集,且方程的解为重解 a。

解 $\because\quad f(x)=x^2+ax+b,$

$\therefore\quad$ 方程 $f(x)=x$ 可以化为,$x^2+(a-1)x+b=0$

$\because\quad A=\{a\}$

$\therefore\quad$ 方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有重解 a,

$$\therefore\quad\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-4b=0,\\ a^2+(a-1)a+b=0,\end{cases}$$

解得 $\quad a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{1}{9}$。

说明　问题是要求两个未知量的值,解题过程中应用了列未知量的方程(组),求未知量的取值的思想方法。

例 5　已知 $A=\{x\mid \frac{6}{3-x}\in \mathbf{N}, X\in \mathbf{Z}\}$,试用例举法表示集合 A。

分析　从代数角度看,集合 A 中的元素是使$\frac{6}{3-x}$为自然数的整数 x 的取值组成的集合;

若令　$\frac{6}{3-x}=n, n\in \mathbf{N}, x\in \mathbf{Z}$,

则 $x=3-\frac{6}{n}$,即集合 A 为函数 $x=3-\frac{6}{n}(n=1,2,3,6)$的值域。

解法一　$\because \frac{6}{3-x}=n, n\in \mathbf{N}, x\in \mathbf{Z}$,

$\therefore$　$3-x=1$ 或 $3-x=2$ 或 $3-x=3$ 或 $3-x=6$,

$\therefore$　$x=2$ 或 $x=1$ 或 $x=0$ 或 $x=-3$,

$\therefore$　集合 $A=\{2,1,0,-3\}$。

解法二　$\because$令$\frac{6}{3-x}=n, n\in \mathbf{N}$,

则　$x=3-\frac{6}{n}(n=1,2,3,6)$,

$\therefore$　$x=-3$ 或 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=2$,

$\therefore$　集合 $A=\{2,1,0,-3\}$。

例 6　已知集合 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2\}$,若 $A\cup \mathbf{R}^{+}=\mathbf{R}^{+}$,求实数 a 的取值范围。

分析　从代数角度看,集合 A 是数集,从几何角度看,集合 A 是数轴上的点组成的点集,因此,借助于数轴可以求得实数 a 的取值范围。

解　$\because$　$A\cup \mathbf{R}^{+}=\mathbf{R}^{+}$

$\therefore$　$A\subseteq \mathbf{R}^{+}$

由图 1-1 可知,点(a)可以在原点和点(2)间移动,

$\therefore$　$0<a\leqslant 2$。

例 7　已知元素$(1,2)\in A\cap B$,并且 $A=\{(x,y)\mid ax-y^{2}+b$

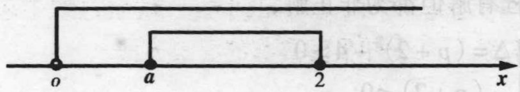

图 1－1

$=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，试求 a,b 的值。

分析 从代数角度看，(x,y) 表示二元方程的解，集合 A、B 分别是方程 $ax-y^2+b=0$、$x^2-ay-b=0$ 的解集，由 $(1,2)\in A\cap B$ 可知，$(1,2)$ 是方程 $ax-y^2+b=0$ 和方程 $x^2-ay-b=0$ 的解，即方程组 $\begin{cases}ax-y^2+b=0\\x^2-ay-b=0\end{cases}$ 的解；从几何角度看，(x,y) 表示坐标平面上的点，集合 A、B 分别为曲线 $ax-y^2+b=0$ 和曲线 $x^2-ay-b=0$ 上的点组成的点集，点 $(1,2)$ 为曲线 $ax-y^2+b=0$ 和曲线 $x^2-ay-b=0$ 的交点。

解 $\because\quad (1,2)\in A\cap B$，

$\therefore\quad (1,2)\in A,(1,2)\in B$，

$\because\quad A=\{(x,y)\mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$

$$\therefore\quad \begin{cases}a-4+b=0\\1-2a-b=0\end{cases}$$

解得　$a=-3$　或　$b=7$。

例 8 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围。

分析 从代数角度看，集合 A 是方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的实数解组成的解集，由 $A\cap R^+=\varnothing$，可知，方程无解或有解但都为非正解。

解法一 $\because\quad A\cap R^+=\varnothing$

$\therefore$　方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无解或有解但都为非正解。

若方程无解，

则　$\Delta=(p+2)^2-4<0$

$\therefore\quad -4<p<0$；

若方程有解但都为非正解，

则 $\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0\\-(p+2)\leqslant 0\end{cases}$

解得， $p\geqslant 0$，

$\therefore\quad p>-4$。

解法二 $\because\quad A\cap R^{+}=\varnothing$，

$\therefore$ 方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无解或有解但都为非正解。

令 $f(x)=x^2+(p+2)x+1$，

则函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴无公共点或与 x 轴有公共点但公共点位于 x 轴的非正半轴。

$\therefore\quad \Delta=(p+2)^2-4<0$，

或 $\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0,\\f(0)\geqslant 0,\\-\dfrac{p+2}{2}\leqslant 0。\end{cases}$

$\therefore\quad -4<p<0$ 或 $p\geqslant 0$，

$\therefore\quad p>-4$。

练习题

1. 若 $A=\{x\mid x=a^2+2a+1, a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=b^2-2b, b\in\mathbf{R}\}$，试确定集合 A、B 之间的关系。

2. 已知 $x\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围。

3. 已知全集 $\mathrm{I}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，$B=\{(x,y)\mid\dfrac{y-4}{x-2}=3\}$，求 $A\cap B$ 及 $\overline{A}\cup B$。

4. 已知集合 $A=\{x\mid y=\lg(x^2-x-2)\}$，$B=\{y\mid y=x^{-\frac{1}{2}}\}$，求 $A\cap B$。

5. 设 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f(x-1)$

$= x+1\}$，若 $A=\{2\}$，求集合 B。

二、函数与反函数

函数是一个重要的数学概念，其实质为建立在非空数集上的映射。函数由三部分组成：定义域、值域、及对应法则，这三部分称作函数的三要素。

在函数的三要素中，核心是对应法则 f，$f(x)$表示元素 x 被 f 作用的方式，作用后的结果。必须注意到，若函数存在反函数，元素 x 被 f 作用后的结果为 y，则 y 被 f^{-1} 作用后的结果为 x。在函数概念的学习中，必须建立这种强烈的“对应”意识。

函数解析式是函数对应法则的表现形式。

函数解析式可以看作建立在函数定义域上的恒等式。

例 1　已知函数 $f(n)$ 定义在整数集上，满足 $f(n)=\begin{cases} f[f(n+19)] & (n<2000), \\ n-16 & (n\geqslant 2000)。\end{cases}$ 求 $f(1997)$。

分析　函数的解析式规定了对定义域中的元素的作用方式。

解　$\because\ 1997<2000$，

$f(1997)=f(f(2016))$

$=f(2000)=1984$

$\therefore\ f(1997)=f[f(1997+19)]$

$=f[f(2016)]$。

$\because\ 2016>2000$，

$\therefore\ f(2016)=2016-16=2000$，

$\therefore\ f(1997)=f(2000)$

$=2000-16$

$=1984$。

例 2　已知 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$，求函数 $f(x)$ 的表达式。

分析　等式 $f(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}-1$，表示元素 $1+\frac{1}{x}$ 被 f 作用后的结果为 $\frac{1}{x^2}-1$，问题的要求是求元素 x 被 f 作用后的结果的表达式。

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com