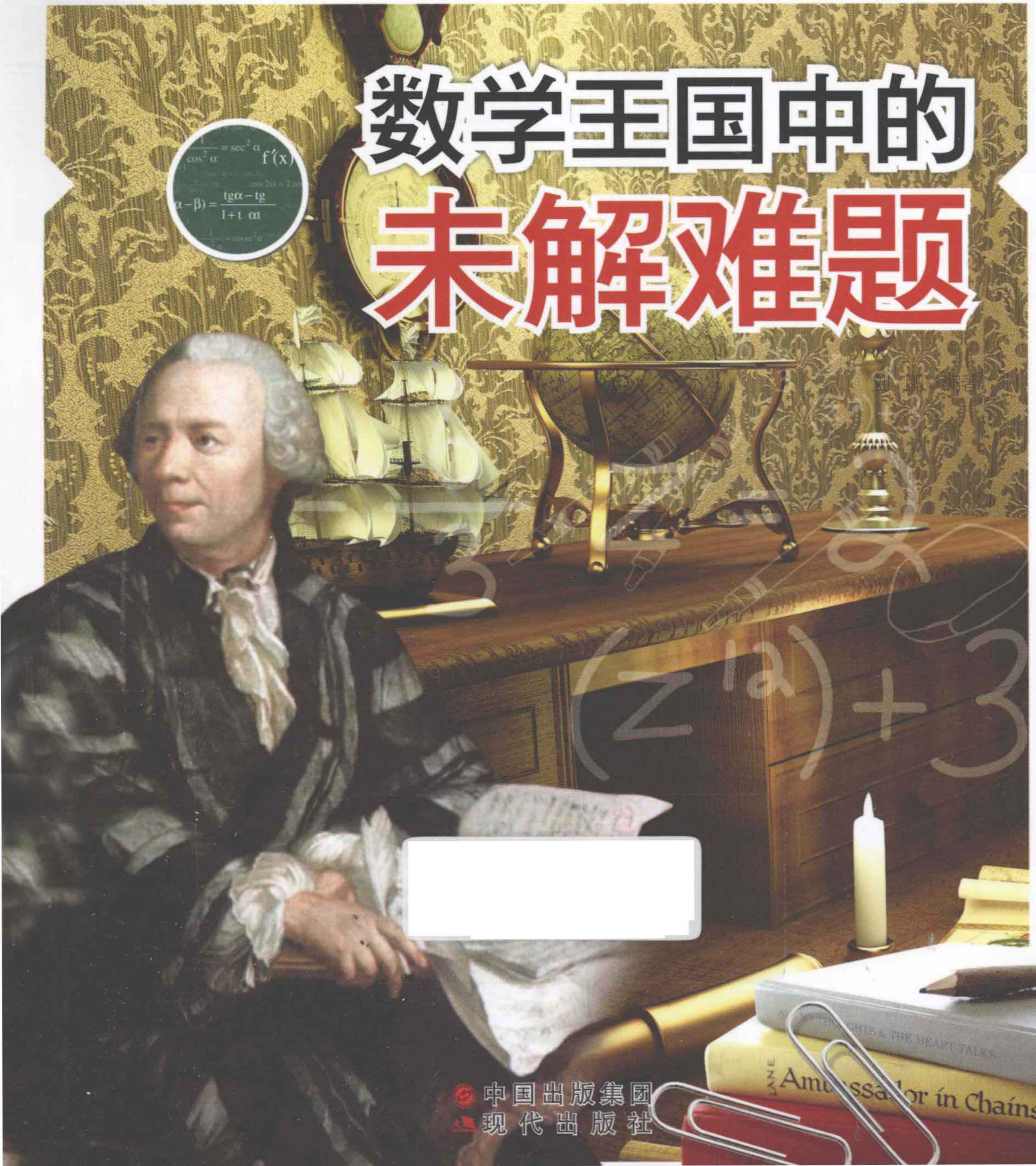
SCIENCE

SHUXUE WANGGUO ZHONG DE WEIJIE NANTI

随着科技的进步，人们探索未知的工具日新月异，相信在不久的将来，这些困扰人们的诸多数学上的谜团终究会水落石出。

数学王国中的未解难题



刘鹏 编著

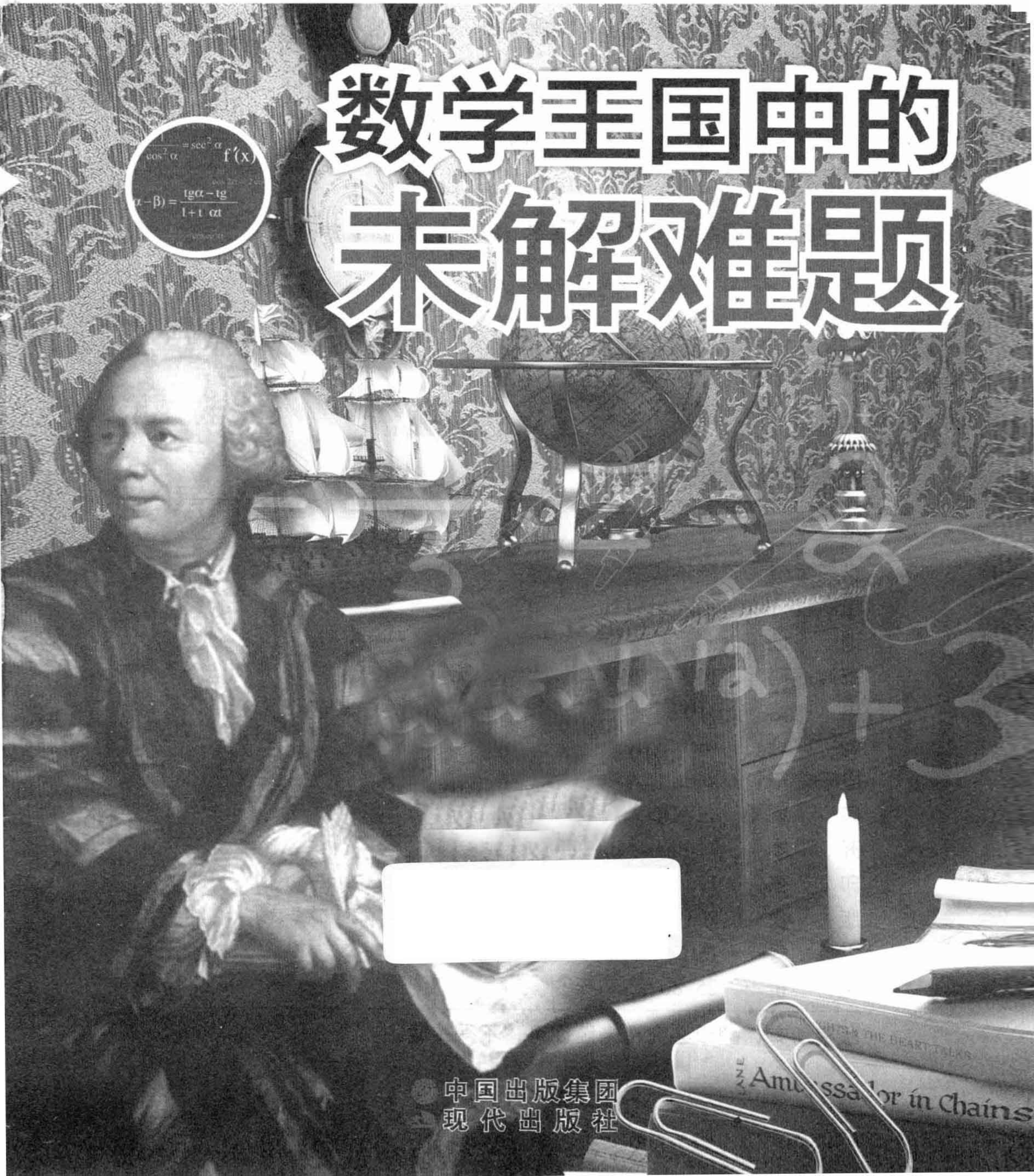
中国出版集团
现代出版社

SCIENCE

SHUXUE WANGGUO ZHONG DE WEIJIE NANTI

随着科技的进步，人们探索未知的工具日新月异，相信在不久的将来，这些困扰人们的诸多数学上的谜团终究会水落石出。

数学王国中的未解难题



中国出版集团
现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学王国中的未解难题／刘鹏编著．—北京：现代出版社，2012.6

ISBN 978-7-5143-0618-7

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①数学-普及读物
Ⅳ．①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 115824 号

数学王国中的未解难题

编　　著	刘　鹏
责任编辑	杨学庆
出版发行	现代出版社
地　　址	北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码	100011
电　　话	010-64267325　010-64245264（兼传真）
网　　址	www.xdcbs.com
电子信箱	xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷	三河市人民印务有限公司
开　　本	710mm×1000mm　1/16
印　　张	13
版　　次	2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5143-0618-7
定　　价	25.80 元

前　言

数学是一门领域非常广阔、内容极为丰富、系统十分庞大的学科，是人类认识客观世界的一个重要工具，是各门科学所不可缺少的一件强有力的武器。

在数学中有不少难题，由于构思巧妙，内容精彩有趣，千百年来磨炼着无数数学爱好者的毅力和才华，被记载到各种数学书籍中，承前启后，世代相传。这些难题，千奇百巧，琳琅满目，当人们真正进入这座数学迷宫时，就会发现才智的蓓蕾一朵朵烂漫地开放，就会使人们产生巨大的毅力和信心，就会感到充满了幸福和浓厚的乐趣，就会感到数学是时刻离不开的良师益友。因为这门科学不仅有巨大而广泛的实用价值，而且正如一些诗人和数学家说的："在数学里面，甚至还有像诗画那样美丽的境界。"加里宁曾经也说过："数学可以使人们的思想纪律化，能教会人们合理的思维着，无怪乎人们说数学是思想的体操。"

数学是一门十分需要想象力和创造力的科学，对人们的知识发展、推理论证能力的培养、探求真理习惯的养成，作用极大。

在探索数学的道路上，人们发现了一个又一个的难题，然后又一个一个地将这些难题解决，而这些难题，千奇百巧，琳琅满目，如同一朵朵绚

丽无比的花朵，给人们挑战的勇气，激发着人类的智慧。

因此，每一个中学生，每一个青少年，都应该立志学好数学，增强克服困难的勇气，培养独立思考的习惯，提高自己分析问题和解决问题的能力。但是，要学好这门重要课程，必须适当阅读一些课外读物，借以扩大数学的知识领域，了解数学理论的来龙去脉，对于牢固地掌握课内所学的基础知识是颇有益处的。本书集知识性、思想性为一体，说理直观浅显，通俗易懂，充分展示数学之美。读者也会从其中得到不同的乐趣和益处，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。

目　录

Contents

数学的历史

什么是数学

数学就像空气一样，无时不有，无处不在，谁都离不开它，但谁也不能直接看清它的面貌、它的影子。

我们观看精彩的体育比赛，比分牌记录着赛场风云的是数字，显示球员们位置的是他们背上的数字；我们乘车旅行，对号入座靠的是数字；考试卷上记载成绩的也是数字；每个人的年龄、身高、体重等等都要用到数字；市场里的商品，股市上的股票，更是离不开数字……总之，我们每天都要与数字打交道。

我们看到的日月星辰、高山大河、花草树木、鱼虫鸟兽；从庄严的天安门和雄伟的长城，一直到小小的文具盒、铅笔、橡皮等等，世界上的一切事物，都有它们各自不同的形状。所以，科学家们发现，数量和形状是事物最基本的性质。恩格斯在谈到数学的时候，曾经指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。"那么，什么是数学呢？可以说，数学是一门研究客观物质世界的数量关系和空间形式的科学。当然，数学所研究的数量和形状，它的含义比日常生活中所讲的含义要深广得多。它既是一门科学，也是人类活动的重要工具。

数的形成

数是“数（shǔ）”出来的。这句话确切地反映了数的概念产生的缘由。早期的人类大约也没有数（shǔ）的必要。从现在尚存的原始部落的语言中可以发现，他们甚至不具备表示“3”以上的数。美国人类学家柯尔对澳洲原始部落研究后发现，很少有人会辨别4个东西，无须数（shǔ）数的原因之一，大约是占有物的贫乏。另外，没有物的集合体的概念也是产生不出数（shǔ）活动的原因。例如，一些原始部落能区分出成百种不同的树木，并赋予它们各种不同的名称，却不存在“木”这一概括性概念。数是集合的一种性质，没有集合的概念，自然也就难以产生揭示其性质的活动。

大约在距今1万年之前，随着地球上冰水消融、气候变化，人类中的一部分开始结束散居的游牧生活，在大河流域定居起来，于是农业社会出现了。农民既靠地又靠天，因此他们十分关心日月的运行和季节的变化。此外，种植和贮藏、土地划分和食粮分配，以及随之而出现的贸易和赋税等等，都潜在而又强烈地促使了数（shǔ）数的必要，为数的概念和记数方法的产生提供了坚实的物质基础。

数觉与等数性

正整数的产生是在有史以前。人类起先并没有数的概念，对于物质世界中的数量关系的认识，只有一些模糊的感觉，这种感觉，有人称之为“数觉”。已经证实，有些动物，如许多鸟类也具有“数觉”。由于人类能认识世界，改造世界，在长期实践过程中，形成了数的概念。

在远古时代，原始人为了谋生，最关心的问题是——有或没有野兽、鱼或果实，有则可以饱餐一顿，无则只好饿肚子。因此，人类就有了“有”与“无”的认识。进一步认识“有”的结果，引出了“多”与“少”的概念。这就使人类对数量关系从孤立的认识提高到比较阶段。

在多与少的分辨中，认识“1”与多的区别又是必然而关键的一步。从

孩提认识“1”的过程可以推测，人们最初对“1”的认识是由于人通常是用一只手拿一件物品产生的。也就是说，它是由一只手与一件物品之间的反复对应，在人的头脑中形成的一种认识。

建立物体集合之间的一一对应关系是数（shǔ）“数”活动的第一步。在这一活动中，不仅可以比较两个集合的元素之间的多或少，更主要的是可以发现相等关系，即所谓的等数性。

尽管集合与映射的概念直到19世纪才出现，但人们对集合间等数性的认识与一一对应思想却早已有之。因而，人们用所熟悉的东西来表示一个集合的数量特征。例如，数“2”与人体的两只手、两只脚、两只耳朵、两只眼睛等联系在一起。汉语中的“二”与“耳”同音，也即某一个集合中元素的个数与耳朵一样多，这就是利用了等数性。据说，古代印度人常用眼睛代表“2”。

在数的概念形成过程中，对等数性的认识是具有决定意义的一件事。它促使人们使用某种特定的方式利用等数性来反映集合元素的多少。

根据考古资料，远古时代，人们用来表示等数性的方法很多，例如，利用小石子、贝壳、果核、树枝等或者用打绳结或在兽骨和泥板上刻痕的方法。这种计算方法的痕迹至今仍在一些民族中保留着。有时候，为了不丢失这些计算工具，而把贝壳、果核等串在细绳或小棒上，这样记下来的并不是真正的、抽象的数，只是集合的一类性质——数量特征的形式转移。

除了实物计数，人们还利用自己的身体来计数，利用屈指来计数：表示一个物体伸一个指头，表示两个物体伸两个指头，如此下去。直到现在，南美洲的印第安人还是用手指与脚趾合在一起表示数“20”。屈指计数为五进制、十进制等记数制的产生提供可能，当这种可能变成事实时，数的概念连同有效的计数技术也就产生了。

等数性刻画了集合的基数。当人们利用屈指计数时，不自觉地从基数转入了序数。例如，要表示某一集合包含三件事物时，人们可以同时伸出三个手指，这时的手指表示基数。如果要计数，他们就依次屈回或伸出这些手指，这时手指起了序数的作用。

无论是实物计数还是屈指计数都不是最理想的计数方法。实物计数演

变为算筹、算盘。指计数沿着两个方向发展。

一个方向是探求指计数的更理想的发展。例如，新几内亚的锡比勒部族人，利用手指和身体的其他部位，可以一直计数到27。中国有一种手指记数法，最高可算到10万。即使在现代，除了小孩初学计数时仍用手指外，在证券交易所也有用手指计数的。然而随着数的语言、符号的产生，教育的普及，屈指计数的技术最终还是被淘汰了。

屈指计数发展的另一个方向是指计数和实物计数相结合，这个方向上创造出了进位制记数法和完整的数的概念。

甲骨文上的十进制与八卦中的二进制

八 卦

中国是十进制和二进制的故乡。中国数学在人类文化发展的初期，远远领先于巴比伦和埃及。

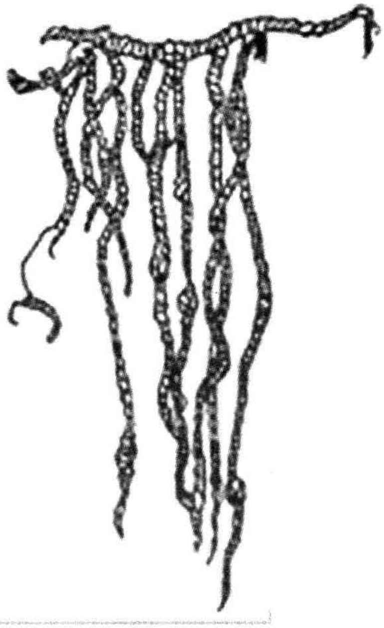
中国早在五六千年前，就有了数字符号。到三千多年前的商朝，刻在甲骨或陶器上的数字已十分常见。1899年从河南安阳发掘出来的龟甲和兽骨上所刻的象形文字（甲骨文）中载有许多数字记录，比如“八日辛亥允戈伐二于六百五十六人”。这说明当时已采用十进制的记数法，而且有从一到百、千等的十三个计数单位。当时在运算过程中用的算筹，算筹纵横布置，就可以表示任何一个自然数。据考证，至少在公元前8世纪到前5世纪，我国算筹已经完备，而印度是在公元876年才正式使用“0”这一符号。所以我国是名副其实的十进制的故乡。

中国的二进制源于八卦，记载于《易经》一书中。计算机的创始人莱

布尼茨通过对《易经》的研究，认为《易经》图形表示从零开始到前64个数，所记录的就是二进制。这就是我国常说的太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦……

结绳记事

数学最初是从结绳记事开始的。从大约300万年前的原始时代起，人们通过劳动逐渐产生了数量的概念。他们学会了在捕获一头野兽后，用一块石子、一根木条来代表，或用绳打结的方法来记事、计数。这样在原始人眼里，一个绳结就代表一头野兽，两个结代表两头……或者一个大结代表一头大兽，一个小结代表一头小兽……数量的观念就是在这些过程中逐渐发展起来的。



结绳记事

在距今天约五六千年前，非洲的尼罗河流域的文明古国埃及较早地学会了农业生产。一方面，他们通过天文观测进行农业生产，其中就包含了一些数学知识的应用；另一方面，古埃及的农业制度是把同样大小的正方形土地分配给每一个人。这种对于土地的测量，导致了几何学的产生。数学正是从打结计数和土地测量开始的。

与埃及同时，亚洲西部的巴比伦、南部的印度和东部的中国等几个同样伟大的文明社会也产生了各自的记数法和最初的数学知识。在距今约2000年前的希腊人，继承了这些数学知识，并将数学发展成为一门系统的理论科学。古希腊文明毁灭后，阿拉伯人继承了他们的文化，使数学重新发展起来，并最终导致了近代数学的创立。

“九九歌”从“九九八十一”开始

我国古代对于整数的四则运算和应用的认识，已经是很早的事了。我们都知道“九九歌”是个正整数的乘法歌诀。在古时候，这个歌诀是从“九九八十一”开始而不是从“一一得一”开始的，所以叫做“九九歌”。“九九歌”在古书《荀子》《管子》中有记载，在出土文物的汉竹简上也有记录。相传春秋时期齐桓公专设一个招贤馆征求各方人才，等了很久没有人应召。一年以后来了一个人，把“九九歌”当作见面礼献给齐桓公。齐桓公笑道：“‘九九歌’能当见面礼吗?”这人答道：“‘九九歌’确实不够资格拿来作为见面礼，但是您对我这个仅懂得‘九九歌’的人都能重视的话，还愁比我高明的人不接连而来吗?”齐桓公认为很对，就批示把他请进招贤馆好好招待，果然不出一个月，许多有才能的人都四面八方前来应召了。这个故事告诉我们，在春秋时期，“九九歌”已经被人们广泛掌握了。

佛掌上的明珠

古印度人对古代数学的贡献，犹如印度佛掌上的明珠那样耀眼，令人瞩目。在公元前3世纪，印度出现了数的记号。在公元200年到1200年之间，古印度人就知道了数字符号和0符号的应用，这些符号在某些情况下与现在的数字很相似。此后，印度数学引进十进制的数学和确立数字的位值制，大大简化了数的运算，并使记数法更加明确。如古巴比伦的小记号“▼”既可以表示“1”，也可以表示“1/60”，而在印度人那里符号“1”只能表示1个单位，若表示十、百等，须在“1”的后面写上相应个数的“0”，现代人就是这样计数的。印度人很早就会用负数表示欠债和反方向运动。他们还接受了无理数概念，并把适用于有理数的运算步骤用到无理数中去。他们还解出了一次方程和二次方程。

印度数学在几何方面没有取得多大进展，但对三角学贡献很多。如在他们的计算中已经用了三种量—— 一种相当于现在的正弦，一种相当于余

弦，另一种是正矢，等于 $1-\cos\alpha$，现在已不采用。他们已经知道三角量的某些关系式。如 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ 等，还利用半角表达式计算某些特殊角的三角值。

阿拉伯数学——数学之桥

阿拉伯人对古代数学的贡献，是现在人们最熟悉的 1、2、3…9、0 这十个数字，称为阿拉伯数字。但是，阿拉伯也吸收、保存了希腊印度的数字，并将它传到欧洲，架起了一座“数学之桥”。进位记数法，也采用印度的无理数运算，但放弃了负数的运算。代数这门学科的名称就是由阿拉伯人发明的。阿拉伯人还解出一些一次方程、二次方程，甚至三次方程，并且用几何图形来解释它们的解法。

阿拉伯人还获得了较精确的圆周率，得到 $2\pi=6.2831853071795865$，已计算到 17 位。此外，他们在三角形上引进了正切和余切，给出了平面三角形的正弦定律的证明。平面三角和球面三角的比较完善的理论也是他们提出的。阿拉伯数学作为“数学之桥”，还在于翻译并著述了大量的数学文献，这些著作传到欧洲后，数学从此进入了新的发展时期。

古希腊数学——数学的摇篮

古希腊人从阿拉伯人那里学到了许多数学经验，并对其进行了精细的思考和严密的推理，才逐渐产生了现代意义上的数学科学。

第一个对数学诞生作出巨大贡献的是泰勒斯。他曾利用太阳影子计算了金字塔的高度，实际上是利用了相似三角形的性质，这在当时是非常了不起的。

在泰勒斯之后，以毕达哥拉斯为首的一批学者对数学作出了贡献。他们最出色的成就是发现了“勾股定理”，在西方称为“毕达哥拉斯定理”。正是因为这一定理，才导致了无理数的发现，引起了第一次数学危机。稍晚于毕达哥拉斯的芝诺，提出四条著名的悖论，对以后数学概念的发展产