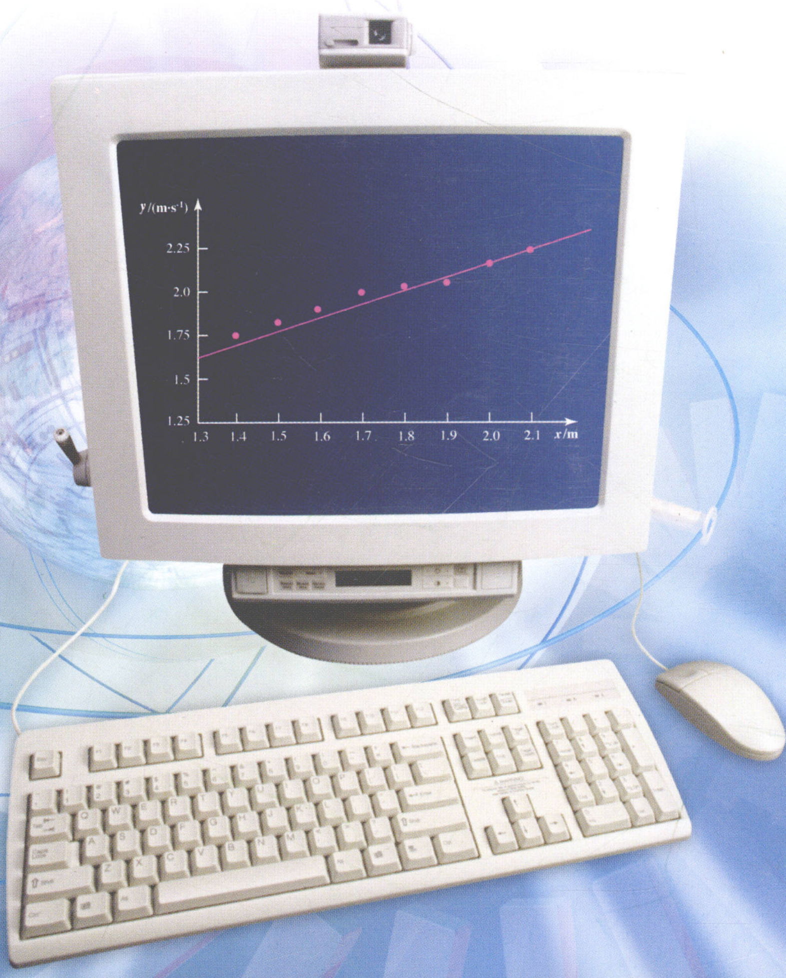
经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–3

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

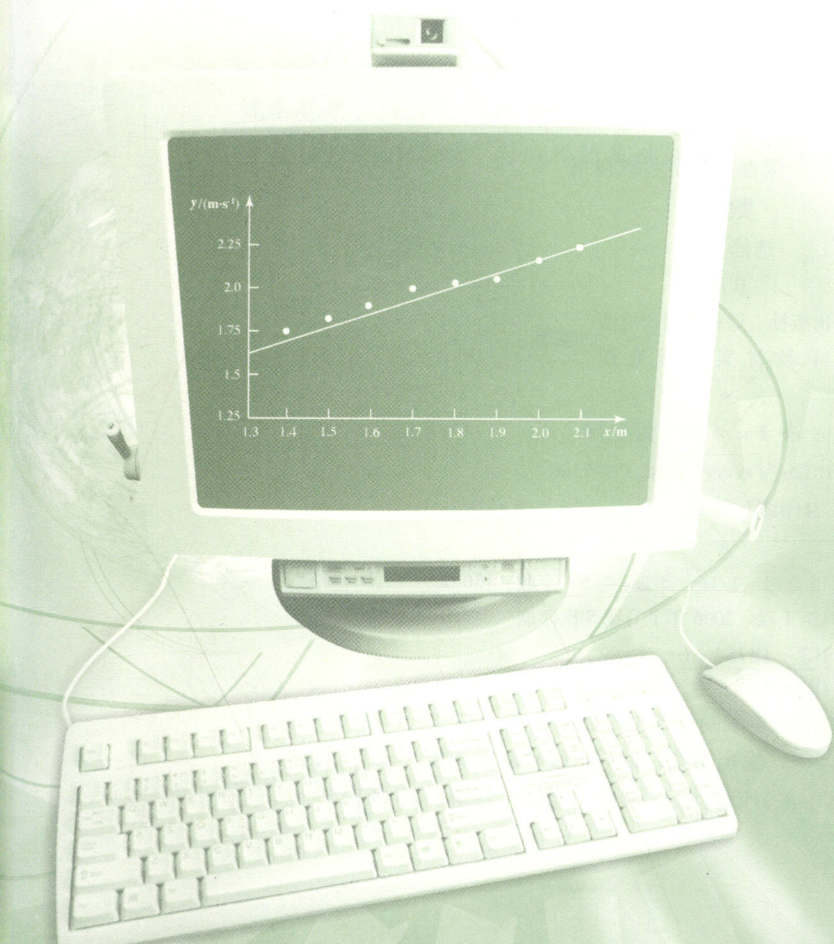
B版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2–3

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　高尚华

编　　者　　高尚华　邵光砚　王旭刚

　　　　　　杨　静

责任编辑　　王旭刚　张唯一

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修2－3

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：7.5　字数：150 000

2005年6月第1版　2006年1月第5次印刷

ISBN 7－107－18754－6
G·11844（课）　定价：8.30元

本册导引

我们在学习必修模块数学3的古典概型时，需要对基本事件空间中的基本事件和某一事件所包含的基本事件进行计数．细心的同学可能已经发现，那里涉及的计数几乎都可以扳着指头数数基本事件的数目来完成．随着概率学习的深入，问题变得越来越复杂，扳着指头数慢慢就行不通了，需要学习计数原理、计数方法(排列与组合)来帮助我们计数．

应用计数原理和组合数公式可以证明二项式定理，同学们在学习二项式定理时，会接触到我国古代数学的光辉成就——杨辉三角．

在本模块，同学们还将在必修模块数学3的概率知识基础上，学习二点分布、超几何分布、二项分布、正态分布及其均值、方差等内容，初步掌握利用离散型随机变量来刻画、分析随机现象的本领，从而能解决一些较简单的实际问题．

在本模块，我们还将和同学们一起进入丰富多彩的统计世界，探究独立性检验、回归分析等统计方法的奥秘．同学们在学习这两个方法时，应该充分体会统计方法的直观合理性和应用广泛性，并且要亲自动手，收集数据，开展一两次统计分析活动．

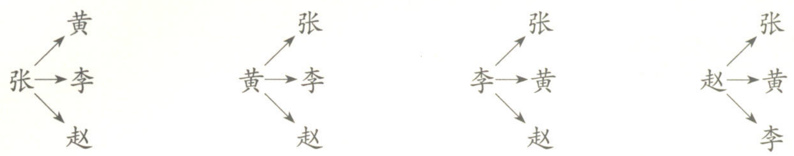
今天，假如我们回顾一下同学们的学习历程，在义务教育阶段数学课程的三个学段，在高中数学课程的必修模块中，都学习过概率与统计的知识．此外，概率思想、统计信息实际上已经渗透到了日常生活的方方面面，不断地被人们所熟知．我们深信，在这样的基础上，同学们是一定能顺利完成本模块的学习任务的．

目　录

第一章　计数原理

张、黄、李、赵四位好朋友约定在寒假中要互寄贺年片一张，他们一共寄了多少张贺年片？

问题跟顺序是有关的．例如，对张、黄两人来说，张要寄给黄一张贺年片，黄要寄给张一张贺年片，这是从 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列问题．如下图所示，一共要寄 12 张贺年片．



如果他们约定在寒假中每两人通话一次，以祝贺新年，那么，他们的通话次数一共有多少呢？

问题跟顺序无关．这句话的意思是，如果对张、黄两人来说，通话一次即可，这是从 4 个不同元素中任取 2 个元素的组合问题．如下图所示，一共通话 6 次．

当然，很多计数问题要比上述问题复杂，这也就是本章要解决的主要问题．本章将要学习两个计数原理，排列、组合的概念，排列数公式、组合数公式以及运用它们来解决一些简单的实际问题．

本章还要讨论二项式定理，同学们要了解其证明和一些简单的应用问题，这里还会涉及我国古代数学的光辉成就——杨辉三角．

1.1 基本计数原理

随着我国人民生活水平的不断提高，“家庭理财”已经成为普通家庭的一个经常关注的问题．某公司史先生选择了人民币定期储蓄和购买国债两种投资形式．其中人民币定期储蓄从一年期和二年期两种中选择一种；购买国债从一年期、二年期和三年期三种中选择一种．

问题 1：史先生工作初期，由于工资收入有限，只有一笔节余可从上述方案中选择一种方法来投资，问：史先生共有多少不同的理财方法？

请举出用分类形式完成工作的一个实例．

显然，史先生有两类不同形式的选择：第一类，从一年期和二年期两种人民币定期储蓄中任意选择一种投资方法；第二类，从一年期、二年期和三年期三种国债中任意选择一种投资方法．以上任选一种方法都能达到理财的目的，因此，史先生符合题意的选择共有

$$2+3=5$$

种不同的方法．

将问题 1 中的计数方法抽象后，得出下面的一个基本计数原理：

分类加法计数原理　做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法．

问题 2：由于史先生工资逐年提高，他决定将节余的钱分成两笔，其中一笔存入人民币定期储蓄，另一笔购买国债，定期储蓄种类与国债种类与问题 1 相同，问：史先生共有多少不同的理财方法？

问题 2 与问题 1 不同，史先生要完成定期储蓄和国债这两项投资，理财目标才算完成，所以：第一步，将一笔钱存入人民币定期储蓄，从一年期和二年期中任意选择一种理财方法；第二步，用另一笔钱购买国债，从一年期、二年期和三年期中选择一种理财方法，请看下面的图示：

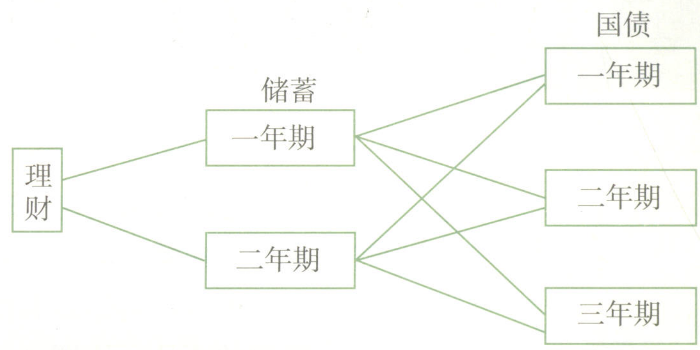


图 1-1

从图 1-1 中可以看出，对于第一步中的两种储蓄方法中的每一种方法，在第二步中都有三种不同的购买国债的选择，当这两步选择都完成后，理财的任务就完成了．因此，史先生符合题意的选择共有

$$2\times3=6$$

种不同的方法．

将问题 2 中的计数方法抽象后，得出下面的另一个基本计数原理：

分步乘法计数原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一个步骤有 m_1 种不同的方法，做第二个步骤有 m_2 种不同的方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法．

以上两个基本计数原理是解决计数问题最基本的理论依据．它们分别给出了用两种不同方式（分类和分步）完成一件事的方法总数的不同计算方法．

在“分类”问题中，各类方法中的任何一种都可以把这件事做完；在“分步”问题中，每一个步骤中的任何一种方法都不能把这件事做完，只有把各个步骤依次全部完成，才能把这件事做完．

请举出用分步形式完成工作的一个实例．

两个基本计数原理有什么不同？

例 1 一个三层书架的上层放有 5 本不同的数学书，中层放有 3 本不同的语文书，下层放有 2 本不同的英语书：

（1）从书架上任取一本书，有多少种不同的取法？

（2）从书架上任取三本书，其中数学书、语文书、英语书各一本，有多少种不同的取法？

解：(1) 从书架上任取一本书，有三类办法：

第一类办法　从书架上层任取一本数学书，有 5 种不同的方法；

第二类办法　从书架中层任取一本语文书，有 3 种不同的方法；

第三类办法　从书架下层任取一本英语书，有 2 种不同的方法.

只要在书架上任意取出一本书，任务即完成，由分类加法计数原理，不同的取法共有

$$N=5+3+2=10\text{（种）}.$$

(2) 从书架上任取三本书，其中数学书、语文书、英语书各一本，可以分成三个步骤完成：

第一步　从书架上层任取一本数学书，有 5 种不同的方法；

第二步　从书架中层任取一本语文书，有 3 种不同的方法；

第三步　从书架下层任取一本英语书，有 2 种不同的方法.

由分步乘法计数原理，不同的取法共有

$$N=5\times3\times2=30\text{（种）}.$$

所以从书架上任取三本书，其中数学书、语文书、英语书各一本，共有 30 种不同的取法.

例 2　用 0，1，2，3，4 这五个数字可以组成多少个无重复数字的：

(1) 银行存折的四位密码？

(2) 四位数？

(3) 四位奇数？

分析　(1) 可以分步选取数字，作四位密码的四个位置上的数字，且所取数字不能重复；

(2) 可以分步选取数字，分别做出千位数字、百位数字、十位数字和个位数字，且所取数字不能重复. 与 (1) 的不同之处是千位数字不能取 0；

(3) 四位奇数的个位只能是 1 或 3，因此符合条件的四位奇数可以分为个位数字是 1 和个位数字是 3 的两类，每一类中再分步. 要注意千位数字不能取 0，且所取数字不能重复.

解：（1）完成“组成无重复数字的四位密码”这件事，可以分四个步骤：

第一步　选取左边第一个位置上的数字，有 5 种选取方法；

第二步　选取左边第二个位置上的数字，有 4 种选取方法；

第三步　选取左边第三个位置上的数字，有 3 种选取方法；

第四步　选取左边第四个位置上的数字，有 2 种选取方法.

由分步乘法计数原理，可组成不同的四位密码共有

$$N=5\times4\times3\times2=120\text{（个）}.$$

（2）完成“组成无重复数字的四位数”这件事，可以分四个步骤：

第一步　从 1，2，3，4 中选取一个数字做千位数字，有 4 种不同的选取方法；

第二步　从 1，2，3，4 中剩余的三个数字和 0 共四个数字中选取一个数字做百位数字，有 4 种不同的选取方法；

第三步　从剩余的三个数字中选取一个数字做十位数字，有 3 种不同的选取方法；

第四步　从剩余的两个数字中选取一个数字做个位数字，有 2 种不同的选取方法.

由分步乘法计数原理，可组成不同的四位数共有

$$N=4\times4\times3\times2=96\text{（个）}.$$

（3）完成“组成无重复数字的四位奇数”这件事，有两类办法：

第一类办法　四位奇数的个位取数字为 1，这件事分三个步骤完成：

第一步　从 2，3，4 中选取一个数字做千位数字，有 3 种不同的选取方法；

第二步　从 2，3，4 中剩余的两个数字与 0 共三个数字中选取一个数字做百位数字，有 3 种不同的选取方法；

第三步　从剩余的两个数字中，选取一个数字做十位数字，有 2 种不同的选取方法.

由分步乘法计数原理，第一类中的四位奇数共有

$$N_1=3\times3\times2=18\text{（个）}.$$

第二类办法　四位奇数的个位取数字为 3，这件事分三个步骤完成：

第一步　从 1，2，4 中选取一个数字做千位数字，有 3 种不同的选取方法；

第二步　从 1，2，4 中剩余的两个数字和 0 共三个数字中选取一个数字做百位数字，有 3 种不同的选取方法；

第三步　从剩余的两个数字中，选取一个数字做十位数字，有 2 种不同的选取方法.

由分步乘法计数原理，第二类中的四位奇数共有

$$N_2=3\times3\times2=18\ (个).$$

最后，由分类加法计数原理，符合条件的四位奇数共有

$$N=N_1+N_2=18+18=36\ (个).$$

例 3　我们把壹元硬币有国徽的一面叫做正面，有币值的一面叫做反面. 现依次抛出 5 枚一元硬币，按照抛出的顺序得到一个由 5 个“正”或“反”组成的序列，如“正，反，反，反，正”. 问：一共可以得到多少个不同的这样的序列？

例 3 与例 1、例 2 有什么不同？

解：分五个步骤完成这件事，每个步骤都有“正”或“反”两种不同的情况，由分步乘法计数原理，得

$$N=2\times2\times2\times2\times2=2^5=32.$$

所以一共可以得到 32 个不同的序列.

练习A

1. 填空：

(1) 一件工作可以用两种方法完成. 有 5 个人会用第一种方法完成，另有 4 个人会用第二种方法完成. 从这 9 个人中选出一个人来完成这件工作，不同的选法共有______种；

(2) 一个科技小组中有 3 名女同学，5 名男同学. 从中任选一名同学参加学科竞赛，共有不同的选派方法______种；若从中任选一名女同学和一名男同学参加学科竞赛，共有不同的选派方法______种.

2. 幼儿园大班的一名小朋友做加法游戏. 在一个红口袋中装着 20 张分别标有数 1，2，…，20 的红卡片，从中任意抽取一张，把卡上的数作为被加数；在另一个黄口袋中装着 10 张分别标有数 1，2，…，10 的黄卡片，从中任意抽取一张，把卡上的数作为加数. 问这名小朋友一共可以列出多少个不同的加法式子？

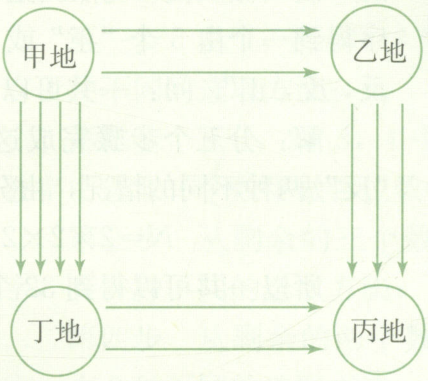
3. 从一个小组的 6 名学生中产生一名组长，一名学生代表，在下列条件下各有多少种不同的选法？

(1) 不允许兼职；

(2) 允许兼职.

练习B

1. 如图，从甲地到乙地有 2 条路可通，从乙地到丙地有 3 条路可通；从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通. 问从甲地到丙地共有多少种不同的走法？



2. 由数字 0，1，2，3 这四个数字，可组成多少个：

(1) 无重复数字的三位数？

(2) 可以有重复数字的三位数？

(3) 无重复数字的三位偶数？

习题 1-1 A

1. 有不同的红球 8 个，不同的白球 7 个.

(1) 从中任意取出一个球，有多少种不同的取法？

(2) 从中任意取出两个不同颜色的球，有多少种不同的取法？

2. 现有高一年级学生代表 3 名，高二年级学生代表 5 名，高三年级学生代表 2 名.

(1) 从中任选一人担任校学生会主席，共有多少种不同的选法？

(2) 从每个年级的代表中任选一人，由选出的三个人组成校学生会主席团，共有多

少种不同的选法?

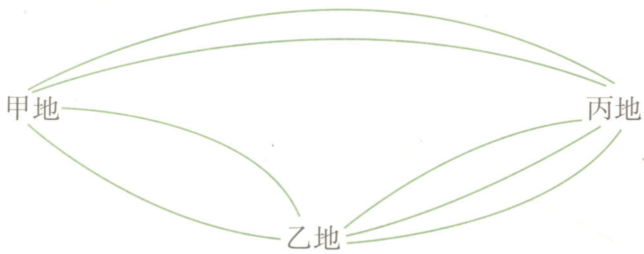
(3) 从高一年级和高二年级的学生代表中各选一人，与高三年级两名学生代表，共四人组成校学生会主席团，共有多少种不同的选法?

3. 一个城市的某电话局管辖范围内的电话号码由八位数字组成，其中前四位数字是统一的，后四位数字都是 0 到 9 这十个数中的一个数字，那么不同的电话号码最多有多少个?

4. 如图，从甲地到乙地有 2 条陆路可走，从乙地到丙地有 3 条陆路可走，又从甲地不经过乙地直接到达丙地有 2 条水路可走.

(1) 从甲地经过乙地到丙地有多少种不同的走法?

(2) 从甲地到丙地共有多少种不同的走法?



(第 4 题)

习题 1-1 B

1. 已知集合 $M=\{1, 2, 3\}$，$N=\{2, 3, 4, 5\}$.

(1) 任取一个奇数 n，$n\in M\cup N$，共有多少种不同的取法?

(2) 设点 $Q(x, y)$，$x\in M$，$y\in N$，问可以表示多少个不同的点?

(3) 在(2)中，有多少个点 $Q(x, y)$ 不在直线 $y=x$ 上?

2. 有三项体育运动项目，每个项目均设冠军和亚军各一名奖项.

(1) 学生甲参加了这三个运动项目，但只获得一个奖项，学生甲获奖的不同情况有多少种?

(2) 有 4 名学生参加了这三个运动项目，若一个学生可以获得多项冠军，那么各项冠军获得者的不同情况有多少种?

3. 用 0，1，…，9 十个数字，可以组成多少个:

(1) 三位数?

(2) 无重复数字的三位数?

(3) 小于 500 的无重复数字的三位数?

(4) 小于 500，且末位数字是 8 或 9 的无重复数字的三位数?

(5) 小于 100 的无重复数字的自然数?

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

我们看下面的问题：

有红球、黄球、白球各一个，现从这三个小球中任取两个，分别放入甲、乙盒子里，有多少种不同的放法?

完成上述这件事，需要分成两个步骤：

第一步　从三个小球中任取一个放入甲盒子中，有 3 种不同的方法；

第二步　从剩下两个小球中任取一个放入乙盒子中，有 2 种不同的方法.

根据分步乘法计数原理，不同的放法共有 $3\times2=6$ 种，如图 1-2 所示：

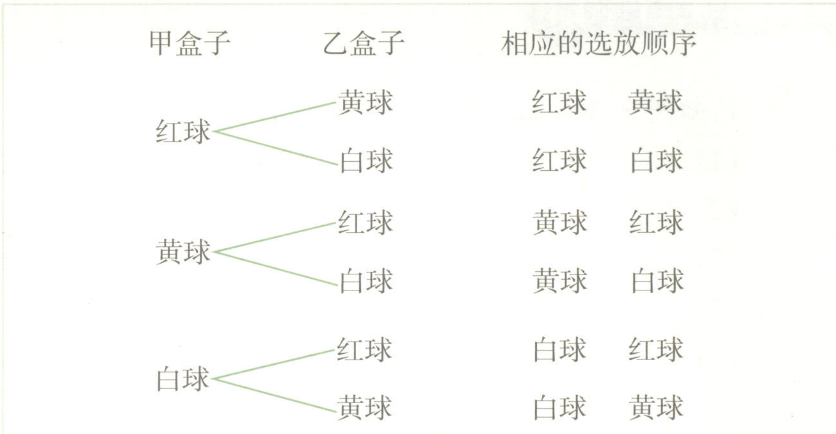


图 1-2

我们称写出所有排列的图示(如图1-2)为“树形图”.

我们把被取的对象(如上面问题中的三个小球中的任何一个)叫做元素. 于是上述问题就抽象为：从 3 个不同元素中，任取 2 个分别占据两个位置中的一个位置，其中，选定的“位置”也可以理解成已知的“顺序”. 取出的元素占据了选定的位置后，就得到了取出元素按已知顺序排成的一列，如“红球、黄球”，我们称它为该问题的一个排列，也就是完成这件事的一种方法. 上述问题共有 6 个排列：“红球、黄球”“红球、白球”“黄球、红球”“黄球、白球”

"白球、红球""白球、黄球"，因此完成选放小球这件事，共有 6 种不同的方法.

> **注**
>
> 一个排列就是完成一件事的一种方法；不同的排列就是完成一件事的不同方法.

一般地，从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**一个排列**.

根据一个排列的定义，两个排列相同的含义为：组成排列的元素相同，并且元素的排列顺序也相同.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，用符号 A_n^m（A 是英文 Arrangement（排列）的第一个字母）表示.

现在我们来研究计算排列数的公式.

一般情况下，求 A_n^m 的值，可以分成 m 个步骤完成：

第一步　从 n 个不同元素中任取一个占据第一个位置，有 n 种不同的方法；

> **注**
>
> 所取元素不允许重复.

第二步　从余下的 $(n-1)$ 个元素中任取一个占据第二个位置，有 $(n-1)$ 种不同的方法；

第三步　从余下的 $(n-2)$ 个元素中任取一个占据第三个位置，有 $(n-2)$ 种不同的方法；

依此类推……

第 m 步是从前一步余下的 $[n-(m-1)]$ 个元素中任取一个占据第 m 个位置，有 $(n-m+1)$ 种不同的方法.

根据分步乘法计数原理，得到公式

$$\boxed{A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).}$$

这里 n，$m\in \mathbf{N}_+$，并且 $m\leqslant n$. 这个公式叫做**排列数公式**. 公式右边是 m 个由大到小排列的连续正整数之积，其中最大的因数是 n，最小因数是 $(n-m+1)$.

例 1　计算从 a，b，c 这 3 个元素中，取出 3 个元素的排列数，并写出所有的排列.

解：从 a，b，c 这 3 个元素中，任取 3 个元素的排列数为

$$A_3^3=3\times2\times1=6\ (个).$$

作树形图(图 1-3).