# 有限元法資料选輯

南京航空学院

1975.12.

# 目 录

# 一 轴对称热应力问题的标法和程序

## §1 引 言

内燃机设计中要碰到受热机件的热应力问题，获得热应力的数据，对设计内燃机是很重要的。这些受热机件，其中有许多种在几何形状上是轴对称的，或近似轴对称的，它们的温度分布和所受的载荷也是轴对称的，或近似轴对称的，例如，气阀，活塞、汽缸套等々。这种机件的热应力问题，就可按轴对称热应力问题来解。

轴对称热应力问题，在物体所占的区域上，要求知道如下的一些函数：

一、位移函数，$u_r$，$u_z$，$u_\theta$，这里 $r$ 一轴是径向轴，$z$ 一轴是旋转轴，$\theta$ 是旋转角，在轴对称的情况下 $u_\theta \equiv 0$，所以只要定出二个位移函数 $u_r$，$u_z$。

由位移函数可以定出应变向量 $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{rz})^*$ 其中

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r};$$

利用虎克定律，由应变向量可以定出应力向量。

$\vec{\sigma} = (\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_{rz})^*$，其中

$\vec{\sigma} = C(\vec{\varepsilon} - T\vec{\alpha})$，C 是矩阵

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu, & \nu, & \nu, & 0 \\ \nu, & 1-\nu, & \nu, & 0 \\ \nu, & \nu, & 1-\nu, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & (1-2\nu)/2 \end{pmatrix}$$

$\vec{\alpha}$ 是向量 $(\alpha, \alpha, \alpha, 0)^*$，$\alpha$ 是线膨胀系数，E 是弹性模数，$\nu$ 是泊松比，T 是实际温度与初温之差。

- 八 -

二、温度函数 $T$。上面已经提到这是实际温度与初温之差。函数 $u_r$，$u_z$，和 $T$ 都是物体所占区域上每点的函数，知道了这基本三个函数后，就可以知道应变向量和应力向量，获得应力分布的数据。

要获得温度函数 $T$，需要解一个温度场问题，本文假定温度函数已经获得，关于稳定温度场的求解可以参看资料[1]，本文只讨论位移函数 $u_r$，$u_z$ 的求法和程序。

为了要弄清 $u_r$，$u_z$，还需要从物体物理状态中获得一些可以测量到的已知信息。这就是外载荷和边界条件外载荷有两项：物体上作用轴对称的体积力 $(F_r, F_z)^*$，和轴对称的边界力 $(P_r, P_z)$。

在我们考虑的问题中，体积力只是物体的重力，与边界力相比，比较微小，所以在本文的程序中没有考虑，如果体积力不能忽略的情况，只要在程序中作一些小的补充就行了。

边界条件，最基本的也有二类，

第一类：位移边界条件，即在边界上某些点固定，在这些点上位移 $u_r=0$，$u_z=0$。

第二类：平衡的外载荷条件，即作用力满足

$$\int_V F_r\,dv+\int_\Gamma P_r\,ds=0$$

$$\int_V F_z\,dv+\int_\Gamma P_z\,ds=0$$

这里 $V$ 是物体所占的区域，$\Gamma$ 是它的边界。

其中 $\int_V F_r\,dv=0$ $\quad \int_\Gamma P_r\,ds=0$ 是轴对称问题必然具备的，

故这类边界条件实际上是要求

$$\int_V F_z\,dv+\int_\Gamma P_z\,ds=0$$

有了外载荷和边界条件的资料，从理论上来说 $u_r$，$u_z$ 是可以求出来了。从数学上来说可以归结为复杂的四阶偏微分方程求解，也可以归结为变分问题求解，我们是从变分问题来解的。下

再叙述一下这个变分问题：

对于任何一组函数 $u_r$，$u_z$ 称下面泛函

$$w=\frac{1}{2}\int_V(\vec{\varepsilon}-T\vec{\alpha})^{*}\vec{\sigma}\,dv-\int_V(F_r,F_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}dv$$

$$-\int_\Gamma(P_r,P_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}ds$$

是势能，有下述的势能极小原理：

对于第一类边界条件，记在区域 V 上满足边界条件的，连续分片连续可导的函数 $u_r$，$u_z$ 的全体为 H，则这个轴对称热应力问题的真实位移函数 $u_r^*$，$u_z^*$ 满足

$$w(u_r^*,u_z^*)=\inf_H w(u_r,u_z) \tag{1}$$

对于第二类边界条件记在区域 V 上连续分片连续可导的函数 $u_r$，$u_z$ 的全体为 G 则

这个轴对称热应力问题的真实位移函数 $u_r^*$，$u_z^*$ 满足

$$w(u_r^*,u_z^*)=\inf_G w(u_r,u_z) \tag{2}$$

我们将势能 $w$ 中的 $\vec{\sigma}$ 用 $c(\vec{\varepsilon}-T\vec{\alpha})$ 代替得到

$$w=\frac{1}{2}\int_V\vec{\varepsilon}^{*}c\vec{\varepsilon}\,dv-\int_V\frac{\alpha TE}{1-2\nu}(\varepsilon_r+\varepsilon_z+\varepsilon_\theta)dv$$

$$+\frac{3}{2}\int_V\frac{\alpha^2T^2E}{1-2\nu}dv-\int_V(F_r,F_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}dv$$

$$-\int_V(P_r,P_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}ds。$$

因为 $\frac{3}{2}\int_V\frac{\alpha^2T^2E}{1-2\nu}dv$ 与 $u_r$，$u_z$ 无关

所以 $w$ 的极小问题，等价于

$$\tilde{w}=\frac{1}{2}\int_V\vec{\varepsilon}^{*}c\vec{\varepsilon}\,dv-\int_V\frac{\alpha TE}{1-2\nu}(\varepsilon_r+\varepsilon_z+\varepsilon_\theta)dv$$

$$-\int_V(P_r,P_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}dv-\int(P_r,P_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}ds$$

的极小问题，于是(1)(2)可以化成

对于第一类边界条件

$$\tilde{\omega}(u_r^*, u_z^*) = \inf_{H} \tilde{\omega}(u_r, u_z) \tag{3}$$

对于第二类边界条件

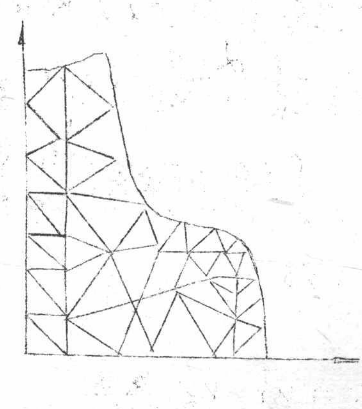
$$\tilde{\omega}(u_r^*, u_z^*) = \inf_{G} \tilde{\omega}(u_r, u_z) \tag{4}$$

本文通过(3).(4)介绍由有限元素法离散化得到一个线性代数方程组，再由共轭斜量法求这个线性代数方程组的解的数值过程，和X－2的算法语言程序，最后附有使用这个程序的几个数值计算的结果。

§2　有限元素法离散化轴对称热应力问题

2.1　离散化的方法

物体所占的区域V，在旋转平面——r－z平面上截出区域是$\Omega$，在$\Omega$上按通常的办法，如图划分成许多三角形小元素，详细作法可参看[1]，应力变化较快的地方，三角形要密一些，所有三角形的顶点称为节点，节点都给以编号。离散化后，就是求$u_r^*, u_z^*$在节点上的近似值，边界上的三角形，可能有一条边界是曲线，通常内燃机的机件边界都是由直线或圆弧构成的。因此我们所考虑的曲线，假定是圆弧。有许多介绍有限元素法文章，常常将这种曲线边界，用直线段代替。我们之所以保留曲线段，是因为这种边界上常常作用着法向的表面压力，将这段曲线边界上压力，转换为直线段上作用压力，物理状态就有些差别，会带来误差。



先来讨论第二类边界条件下的离散化，对于上面所述的函数类G中取一个特殊的子集，即在每一个三角形元素内是线性函数，

$$u_r=b_1+b_2 r+b_3 z \qquad u_z=b_4+b_5 r+b_6 z$$

这里 $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$, $b_6$ 在这个三角形元素内是常数换一个三角形元素可能有不同的值。记这种函数的全体是 $\widetilde{G}$。我们把找 $u_r^*$, $u_z^*$ 的问题(4) 化成找函数

$$\widetilde{u_r}^* \in \widetilde{G}, \quad \widetilde{u_z}^* \in \widetilde{G} \quad 使$$

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{u}_r^*, \widetilde{u}_z^*)=\inf_{\substack{u_r\in\widetilde{G}\\ u_z\in\widetilde{G}}} \widetilde{\omega}(u_r, u_z)$$

那么 $\widetilde{u_r}^*$, $\widetilde{u_z}^*$ 就是我们问题的位移的近似解，相应的可以求得应力的近似解，在2.3中我们要证明 $\widetilde{u}_r^*$, $\widetilde{u}_z^*$ 是存在的。因为 $\widetilde{G}$ 中的 $u_r$, $u_z$ 在三角形元素内是线性的，因此 $b_1$, $b_2$ …… $b_6$ 完全被三角形三个顶点上的值所决定，于是这种 $u_r$, $u_z$ 在整个区域 $\Omega$ 中被它们在节点上的值所决定。这样 $\widetilde{\omega}(u_r, u_z)$ 当 $u_r\in\widetilde{G}$, $u_z\in\widetilde{G}$ 时，可以表示成节点上的值的函数，如果共有 $n$ 个节点。

于是

$$\widetilde{\omega}(u_r, u_z)=F(u_{r1}, u_{z1}, u_{r2}, u_{z2}, \cdots\cdots u_{rn}, u_{zn})$$

其中 $u_{ri}$, $u_{zi}$ 分别表示第 $i$ 个节点上的 $u_r$, $u_z$ 的值。

求 $\widetilde{\omega}(u_r, u_z)$ 的极小，就是 F 对 $2n$ 个变量求极小值。这里要指出一点，就是如果一个节点在旋转轴上，那么这个节点上的 $u_r=0$，就是固定的，F 中这个变量就是常量·

上面就是有限元素法离散化的思想。

对于这一类边界条件的情况，所考虑的函数集是上述 $\widetilde{G}$ 中的子集，如果三角形元素的顶点是边界条件中位移固定的点，那么在这点的 $u_r=0$, $u_z=0$ $\widetilde{G}$ 中的这样函数全体记为 $\widetilde{H}$、同样我们把求 $u_r^*$、$u_z^*$ 的问题，化成求 $\widetilde{u}_r^*$、$\widetilde{u}_z^*$ 的问题

这里 $\widetilde{u_r}^*$, $\widetilde{u_z}^*$ 满足

$$\tilde{\omega}(\tilde{u}_r^*, \tilde{u}_z^*) = \inf_{\substack{u_r \in \tilde{H} \\ u_z \in \tilde{H}}} \tilde{\omega}(u_r, u_z)$$

同样在 $\tilde{H}$ 上，$\tilde{\omega}(u_r, u_z)$ 可以化成节点值的函数

$$\tilde{\omega}(u_r, u_z) = F(u_{r1}, u_{r2}, \cdots\cdots u_{rn}, u_{zn})$$

其中节点在轴上的有 $u_r=0$，是边界条件中固定的节点上有 $u_r=0$，$u_z=0$，这些 $u_r$ 或 $u_z$ 是常量。

下面我们把 $F(u_{r1}, u_{z1}, \cdots\cdots u_{rn}\ u_{zn})$ 表示式列出来，最后导出达到极小值的 $\tilde{u}_r^*$，$\tilde{u}_z^*$ 所满足的方程。

任意取一个三角形元素，它的三个顶点的编号 $i$，$j$，$k$，第 $i$ 个节点的坐标为 $r_i$，$z_i$；第 $j$ 个，第 $k$ 个节点的类同。

于是

$$u_{ri} = b_1 + b_2 r_i + b_3 z_i \quad u_{zi} = b_4 + b_5 r_i + b_6 z_i$$

$$u_{rj} = b_1 + b_2 r_j + b_3 z_j, \quad u_{zj} = b_4 + b_5 r_j + b_6 z_j$$

$$u_{rk} = b_1 + b_2 r_k + b_3 z_k \quad u_{zk} = b_4 + b_5 r_k + b_6 z_k$$

从而

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{ri} \\ u_{rj} \\ u_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{zi} \\ u_{zj} \\ u_{zk} \end{pmatrix}$$

将三角形元素也给以某种编号，记上述考虑的三角形元素的编号为 $e$，记向量 $\overrightarrow{b_e}$ 是这个三角形上对应的 $(b_1, b_2, b_3, b_4\ b_5\ b_6)^t$，向量 $\overrightarrow{V_e}$ 是这个三角形顶点的位移 $(u_{ri}, u_{zi}, u_{rj}, u_{zj}\ u_{rk}, u_{zk})^t$ 于是 $\overrightarrow{b_e} = H_e \overrightarrow{V_e}$，

$H_e$ 是如下的矩阵：

$$H_e=\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & 0 & h_{15} & 0 \\ h_{21} & 0 & h_{23} & 0 & h_{25} & 0 \\ h_{31} & 0 & h_{33} & 0 & h_{35} & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & h_{44} & 0 & h_{46} \\ 0 & h_{52} & 0 & h_{54} & 0 & h_{56} \\ 0 & h_{62} & 0 & h_{64} & 0 & h_{66} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{13} & h_{15} \\ h_{21} & h_{23} & h_{25} \\ h_{31} & h_{33} & h_{35} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_{42} & h_{44} & h_{46} \\ h_{52} & h_{54} & h_{56} \\ h_{62} & h_{64} & h_{66} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{pmatrix}^{-1}$$

现在讨论这个三角形元素e上应变向量$\overrightarrow{\varepsilon_e}$和应力向量$\overrightarrow{\sigma_e}$与$\overrightarrow{r_e}$的关系，按定义

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}=b_2, \qquad \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z}=b_6$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}=\frac{b_1+b_2 r+b_3 z}{r} \qquad \varepsilon_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{Z}=b_3+b_5$$

于是

$$\overrightarrow{\varepsilon_e}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\overline{b_e}$$

记矩阵

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\overrightarrow{\varepsilon_e} = G\,\overrightarrow{b_e} = GH_e\,\overrightarrow{V_e} \qquad (5)$$

当元素e有顶点在旋转轴上时，元素中的点的坐标：$r$就可以为$0$，这$G$就有奇性，但因为相应的 $u_r = b_1 + b_2 r + b_3 z$ 也为$0$，所以$\varepsilon_e$是没有奇性的，在这种情况，为了使 $\overrightarrow{\varepsilon_e}$ 表示式(5)中 $\overrightarrow{V_e}$ 的系数阵消去奇性，我们利用如下的关系：

如果在轴上的顶点是第$j$个节点，因为 $u_{rj}=0$，故

$$\overrightarrow{V_e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_e}$$

如果有二个节点在轴上，记为第$i$个节和第$k$个节点

此时：

$$\overrightarrow{V_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{V_e}$$

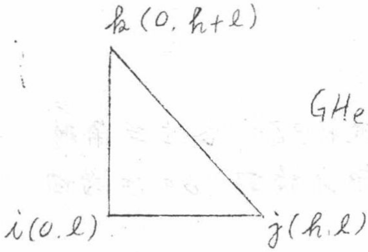
一般情况下如果元素 $\Omega_e$ 有顶点在旋转轴上，那么 $\overrightarrow{V_e} = D_e\,\overrightarrow{V_e}$

其中 $D_e$ 就是上述类型的矩阵

在这种情况(5)式就变成 $\overrightarrow{\varepsilon_e} = GH_eD_e\overrightarrow{V_e}$ (6)

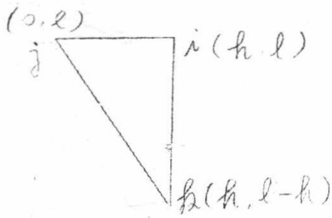
$GH_eD_e$ 的奇性就可直接消去或通过积分消去

例如：三角形元素三个顶点坐标为 $(0,l)$，$(h,l)$，$(0,h+l)$




$$GH_eD_e=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&1&0&0\end{pmatrix}\quad(7)$$

有一个顶点在轴上的三角形元素，三个顶点的坐标为$(h,l)$，$(0,l)$，$(h,l-h)$




$$GH_eD_e=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1\\1+\frac{z-l}{r}&0&0&0&-\frac{z-l}{r}&0\\1&1&0&-1&-1&0\end{pmatrix}\quad(8)$$

这里$\frac{z-l}{r}$的奇性通过积分是会消去的

为了表达统一起见，当三角形元素$e$没有顶点在轴上时记$D_e=I$（单位阵）于是都有

$$\overrightarrow{\varepsilon_e}=GH_eD_e\overrightarrow{V_e}\quad(9)$$

另一方面

$$\tilde{\omega}=\frac{1}{2}\int_V\vec{\varepsilon}^{\,t}\,C\,\vec{\varepsilon}\,dV-\int_V\frac{\alpha TE}{1-2\nu}(1,1,1,0)\,\vec{\varepsilon}\,dV$$

$$-\int_V(F_r,F_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}dV-\int_\Gamma(P_r,P_z)\begin{pmatrix}u_r\\u_z\end{pmatrix}ds$$

$$=\sum_e\Big\{\frac{1}{2}\int_{V_e}\overrightarrow{\varepsilon_e}^{\,t}\,C\,\overrightarrow{\varepsilon_e}\,dV-\int_{V_e}\frac{\alpha TE}{1-2\nu}(1,1,1,0)\,\overrightarrow{\varepsilon_e}\,dV$$

$$-\int_{V_e}(F_r,F_z)\begin{pmatrix}1,&r,&z,&0,&0,&0\\0&0&0&1,&r,&z\end{pmatrix}\overrightarrow{b_e}\,dV\Big\}$$

$$-\sum_{\lambda}\int_{\Gamma_\lambda}(P_r,P_z)\begin{pmatrix}1,r,z,0,0,0\\0,0,0,1,r,z\end{pmatrix}\overrightarrow{b_\lambda}\,ds$$

这里$V_e$是$\Omega$上三角形元素$\Omega_e$绕旋转轴旋转$360°$后的三角形环，$\Gamma_\lambda$是$\Omega$上有边界段的三角形元素的边界部分旋转$360°$后的曲面，$\lambda$是这种三角形元素的编号。

把(9)代入上述$\tilde{\omega}$中，就得到

$$\tilde{\omega}=\sum_e\frac{1}{2}\overrightarrow{V_e}^t\int_{V_e}D_eH_e^tG^tCGH_eD_e\,dv\,\overrightarrow{V_e}$$

$$-\sum_e\int_{V_e}\frac{2TE}{1-2\nu}(1,1,1,0)GH_eD_e\,dv\,\overrightarrow{V_e}$$

$$-\sum_e\int_{V_e}(F_r,F_z)\begin{pmatrix}1,r,z,0,0,0\\0,0,0,1,r,z\end{pmatrix}H_e\,dv\,\overrightarrow{V_e}$$

$$-\sum_\lambda\int_{\Gamma_\lambda}(P_r,P_z)\begin{pmatrix}1,&r,&z,&0,&0,&0\\0&0&0,&1,&r,&z\end{pmatrix}H_\lambda\,ds\,\overrightarrow{V_\lambda}\qquad(10)$$

上述表示式中，在积分号下的部分都与$u_{ri}$，$u_{zi}$无关，经过积分后是常数，因此可知，$F$是$u_{r1}$，$u_{z1}$……$u_{rn}$，$u_{zn}$的二次函数。

记

$$A_e=\int_{V_e}D_eH_e^tG^tCGH_eD_e\,dv\qquad(11)$$

它是$6\times6$的矩阵，并且是对称的。

$$\overrightarrow{T_e}^t=\int_{V_e}\frac{2TE}{1-2\nu}(1,1,1,0)GH_eD_e\,dv\qquad(12)$$

它是$1\times6$的行向量

$$\overrightarrow{F_e}^t=\int_{V_e}(F_r,F_z)\begin{pmatrix}1,r,z,0,0,0\\0,0,0,1,r,z\end{pmatrix}H_e\,dv\qquad(13)$$

它是$1\times6$的行向量

$$\overrightarrow{P_\lambda}^{t}=\int_{\Gamma\lambda}(P_r, P_z)\begin{pmatrix}1, r, z, 0, 0, 0\\ 0, 0, 0, 1, r, z\end{pmatrix}H_\lambda ds \qquad (14)$$

它也是 $1\times 6$ 的行向量。这样

$$F(u_{r1}, u_{z1}\cdots\cdots u_{rn}, u_{zn})$$

$$=\sum_e\frac{1}{2}\overrightarrow{V_e}^{t}A_e\overrightarrow{V_e}-\sum_e\overrightarrow{T_e}^{t}\overrightarrow{V_e}-\sum_e\overrightarrow{F_e}^{t}\overrightarrow{V_e}-\sum_\lambda\overrightarrow{P_\lambda}^{t}\overrightarrow{V_\lambda} \qquad (15)$$

求位移函数 $\widetilde{u}_r^*$，$\widetilde{u}_z^*$ 的问题，就化成了，对(15)式求极小的问题。将 $u_{r1}, u_{z1}\cdots\cdots u_{rn}\ u_{zn}$ 依次记成 $V_1, V_2, \cdots\cdots V_{2n-1}, V_{2n}$。达到极小的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial V_i}=0 \quad i=1, 2\cdots\cdots 2n \ \text{除去那些}\ V_i\ \text{固定为 0 的}\ i \qquad (16)$$

这就是 $\widetilde{u}_{ri}^*$ $\widetilde{u}_{zi}^*$ 所要满足的线性方程组。

任取一个元素 e，它的三个顶点编号为 $i, j, k$，将这个元素 e 对应的矩阵 $A_e$ 扩充成 $2n\times 2n$ 阶矩阵 $\widetilde{A_e}$，将 $A_e$ 的元素记为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots & a_{26}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{61} & a_{62} & a_{63}\cdots\cdots & a_{66}\end{pmatrix}$$

$\widetilde{A_e}$ 的元素记为

$$\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{11}\cdots\cdots\cdots & \widetilde{a}_{1\,2n}\\ \cdots & \cdots\\ \widetilde{a}_{2n\,1}\cdots\cdots & \widetilde{a}_{2n\,2n}\end{pmatrix}$$

规定

$\widetilde{a}_{2i-1\ 2i-1}=a_{11}$，$\widetilde{a}_{2i-1\ 2i}=a_{12}$

$\widetilde{a}_{2i-1\ 2j-1}=a_{13}$，$\widetilde{a}_{2i-1,\ 2j}=a_{14}$

$\widetilde{a}_{2i-1\ 2k-1}=a_{15}$，$\widetilde{a}_{2i-1\ 2k}=a_{16}$

$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$

$\widetilde{a}_{2k-1\ 2i-1}=a_{51} \cdots\cdots \widetilde{a}_{2k-1\ 2k}=a_{56}$

$\widetilde{a}_{2k\ 2i-1}=a_{61}, \cdots\cdots \widetilde{a}_{2k\ 2k}=a_{66}$

$\widetilde{A}_e$ 的其余元素全为 0.

同样将 $\overrightarrow{T_e}$, $\overrightarrow{F_e}$, $\overrightarrow{P_\lambda}$ 扩充成 2n 维的向量，$\overrightarrow{\widetilde{T}_e}$, $\overrightarrow{\widetilde{F}_e}$, $\overrightarrow{\widetilde{P}_\lambda}$, 其中 $\overrightarrow{\widetilde{T}_e}$ 的第 $2i-1$ 个元素就是 $\overrightarrow{T_e}$ 的第一个元素，$\overrightarrow{\widetilde{T}_e}$ 的第 $2i$ 个元素就是 $\overrightarrow{T_e}$ 的第二个元素，……$\overrightarrow{\widetilde{T}_e}$ 的第 $2k$ 个元素就是 $\overrightarrow{T_e}$ 的第 6 个元素，$\overrightarrow{\widetilde{T}_e}$ 的其余元素全为 0，$\overrightarrow{\widetilde{F}_e}$, $\overrightarrow{\widetilde{P}_\lambda}$ 也是同样的定义。记 $\overrightarrow{U}=(u_{r1}, u_{z1} \cdots\cdots u_{rn}\ u_{zn})$

于是

$$F(u_{r1}, u_{z1} \cdots\cdots u_{rn}\ u_{zn})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{U}^{t}\left(\sum_e \widetilde{A}_e\right)\overrightarrow{U}-\left(\sum_e \overrightarrow{\widetilde{T}_e}\right)^{t}\overrightarrow{U}$$

$$-\left(\sum_e \overrightarrow{\widetilde{F}_e}\right)^{t}\overrightarrow{U}-\left(\sum_\lambda \overrightarrow{\widetilde{P}_\lambda}\right)^{t}\overrightarrow{U}$$

达到极小的必要条件方程(16)就是线性方程组

$$A\overrightarrow{U}=\overrightarrow{b} \qquad (17)$$

其中

$$A=D\left(\sum_e \widetilde{A}_e\right)D \qquad (18)$$

$$\overrightarrow{b}=D\left(\sum_e \overrightarrow{\widetilde{T}_e}+\sum_e \overrightarrow{\widetilde{F}_e}+\sum_\lambda \overrightarrow{\widetilde{P}_\lambda}\right) \qquad (19)$$

这里 D 是将 2n 阶的单位阵中第 i 行对角线元素，如果对应的位移分量 $V_i$ 是固定为 0 的，那么这个对角线元素改为 0，否则仍保留为 1，而得的矩阵。

$D\left(\sum_e \widetilde{A}_e\right)D$ 就是将矩阵 $\sum_e \widetilde{A}_e$ 中 $V_i$ 为 0 的那些行和列的全

部元素都改为0，$D\left(\sum_e \widetilde{\overrightarrow{T_e}}+\sum_e \widetilde{\overrightarrow{F_e}}+\sum_\lambda \widetilde{\overrightarrow{P_\lambda}}\right)$就是将向量$\sum_e \widetilde{\overrightarrow{T_e}}+\sum_e \widetilde{\overrightarrow{F_e}}+\sum_\lambda \widetilde{\overrightarrow{P_\lambda}}$中$V_i$为0的那些行的元素改为0，这就是因为对于这样的$V_i$没有方程$\frac{\partial F}{\partial V_i}=0$。

矩阵A称为刚性矩阵，$\overrightarrow{b}$称为自由项，在2.3中将要证明矩阵A正定或非负的，因而由二次型的性质可知方程组(16)也即方程组(17)是$\overrightarrow{U}$达到极小值的充分条件。

2.2　怎样由自动计算机实现计算刚性矩阵A和自由项$\overrightarrow{b}$

用有限元素法解问题，首先要碰到的是怎样由计算机计算A和$\overrightarrow{b}$，这一段我们讨论这个问题。

关于A，$\overrightarrow{b}$的计算公式，上一段我们已经导出来了，即

$$A_e=\int_{V_e} D_e H_e^* G^* C G H_e D_e \, dV \tag{11}$$

$$\overrightarrow{T_e}^*=\int_{V_e}\frac{2TE}{1-2\nu}(1,1,1,0)\,G H_e D_e \, dV \tag{12}$$

$$\overrightarrow{F_e}^*=\int_{V_e}(F_r,F_z)\begin{pmatrix}1, & r, & z, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1, & r, & z\end{pmatrix}H_e \, dV \tag{13}$$

$$\overrightarrow{P_\lambda}^*=\int_{\Gamma_\lambda}(P_r,P_z)\begin{pmatrix}1, & r, & z, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1, & r, & z\end{pmatrix}H_\lambda \, ds \tag{14}$$

$$A=D\left(\sum_e \widetilde{A_e}\right)D \tag{18}$$

$$\overrightarrow{b}=D\left(\sum_e \widetilde{\overrightarrow{T_e}}+\sum_e \widetilde{\overrightarrow{F_e}}+\sum_\lambda \widetilde{\overrightarrow{P_\lambda}}\right) \tag{19}$$

这里$\sum_e$表示对所有三角形元素求和，$\sum_\lambda$表示对所有边界上作用表面力的三角形元素求和。算得$A_e$，$\overrightarrow{T_e}$，$\overrightarrow{F_e}$，$\overrightarrow{P_\lambda}$就可以扩充成$\widetilde{A_e}$，$\widetilde{\overrightarrow{T_e}}$，$\widetilde{\overrightarrow{F_e}}$，$\widetilde{\overrightarrow{P_\lambda}}$。如果矩阵A的元素$a_{ij}$，在计算机中是存放在单元$\langle a_{ij}\rangle$，将这些单元先读为0。然后对每个元素作累加。

$$\langle a_{2p-1,\,2p-1}\rangle := \langle a_{2p-1,\,2p-1}\rangle+\tilde{a}_{2p-1,\,2p-1}$$

$$\langle a_{2p-1,\ 2p}\rangle := \langle a_{2p-1,\ 2p}\rangle + \widetilde{a}_{2p-1,\ 2p}$$

$$\langle a_{2p-1,\ 2q-1}\rangle := \langle a_{2p-1,\ 2q-1}\rangle + \widetilde{a}_{2p-1,\ 2q-1}$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

$$\langle a_{2r,\ 2r}\rangle := \langle a_{2r,\ 2r}\rangle + \widetilde{a}_{2r,\ 2r}$$

这里 $p$. $q$. $r$ 是 $e$ 的三个顶点的编号，$\widetilde{a}_{st}$ 是 $\widetilde{A}_e$ 的元素。当然利用对称性我们只要存放和累加，对角线以上部分或对角线以下部分；对于那些 $V_i=0$ 的行和列就不必累加，甚至不必存放。

类似的对于自由 $\vec{b}$，对每个元素 $e$ 和 $\lambda$ 作累加

$$\langle b_{2p-1}\rangle := \langle b_{2p-1}\rangle + \widetilde{\tau}_{2p-1} + \widetilde{f}_{2p-1}$$

$$\langle b_{2p}\rangle := \langle b_{2p}\rangle + \widetilde{\tau}_{2p} + \widetilde{f}_{2p}$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$\langle b_{2r}\rangle := \langle b_{2r}\rangle + \widetilde{\tau}_{2r} + \widetilde{f}_{2r}$$

和

$$\langle b_{2k-1}\rangle := \langle b_{2k-1}\rangle + \widetilde{p}_{2k-1}$$

$$\langle b_{2l}\rangle := \langle b_{2l}\rangle + \widetilde{p}_{2l}$$

$$\langle b_{2m}\rangle := \langle b_{2m}\rangle + \widetilde{p}_{2m}$$

这里 $b_s$，$\widetilde{\tau}_s$，$\widetilde{f}_s$，$\widetilde{p}_s$ 分别表示 $\vec{b}$，$\vec{\widetilde{T}}_e$，$\vec{\widetilde{F}}_e$，$\vec{\widetilde{p}}_\lambda$ 的第 $s$ 个分量。$k$，$l$，$m$ 是元素 $\lambda$ 的三个顶点的编号。

按这个办法对所有元素作一次累加，最后就得到 $A$ 和 $\vec{b}$，并存放在计算机预定的单元中。

在本文要介绍的程序中，因为考虑到 X—2 机内存单元只有 819 个，太少，因此刚性矩阵 $A$ 不存放，我们使用共轭斜量法解方程组(17)，每次要计算 $AZ$，这里 $Z$ 是共轭斜量，计算只要对每个元素 $e$ 作累加。

$$\langle AZ_{2p-1}\rangle := \langle AZ_{2p-1}\rangle + \widetilde{a}_{2p-1,\ 2p-1}Z_{2p-1} + \widetilde{a}_{2p-1,\ 2p}Z_{2p} + \cdots + \widetilde{a}_{2p-1,\ 2r}Z_{2r}$$

$$\langle AZ_{2p}\rangle := \langle AZ_{2p}\rangle + \widetilde{a}_{2p,\ 2p-1}Z_{2p-1} + \widetilde{a}_{2p,\ 2p}Z_{2p} + \widetilde{a}_{2p,\ 2q-1}Z_{2q-1} + \cdots + \widetilde{a}_{2p,\ 2r}Z_{2r}$$

$$\langle AZ_{2r}\rangle := \langle AZ_{2r}\rangle + \tilde{a}_{2r\,2p-1} Z_{2p-1} + \tilde{a}_{2r\,2p} Z_{2p} + \cdots + \tilde{a}_{2r\,2r} Z_{2r}$$

这里$AZ_s$，$Z_s$表示$AZ$和$Z$的第s个分量下面我们来介绍$A^e$，$\vec{T}_c$，$\vec{F}_e$，$\vec{P}_\lambda$的计算

一、$A_e$的计算

$A^e$的计算要分三种情况

1、元素没有顶点在轴上

此時，$D_e = I$

$$A_e = \int_{V_e} H_e^T G^T C G H_e \, dV$$

$$= 2\pi \int_{\Omega_e} H_e^T G^T C G H_e \, r \, dr \, dz$$

这里$\Omega_e$是$V_e$所对应的在$r-z$平面上的三角形区域。$H_e$是$\Omega_e$中的常数。因此可以拿到积分号外，为了使积分方便我们将$G^T C G$表示出来

$$G^T C G = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{r^2} & \frac{1}{r} & \frac{1-\nu}{r^2} z & 0 & 0 & \frac{\nu}{r} \\ \frac{1}{r} & 2 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 2\nu \\ \frac{1-\nu}{r^2} z & \frac{z}{r} & \frac{1-\nu}{r^2} z^2 + \frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{z}{r}\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \frac{\nu}{r} & 2\nu & \frac{\nu}{r} z & 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}$$

因此被积函数是由$r$，$z$，$\frac{1}{r}$，$\frac{z}{r}$，$\frac{z^2}{r}$构成，在计算机上可由近似积分公式实现。最简单的近似积分公式有

$$\int f(r,z)\,dr\,dz = \frac{\Delta e}{3}\left(f(r_i, z_i) + f(r_j, z_j) + f(r_k, z_k)\right)$$