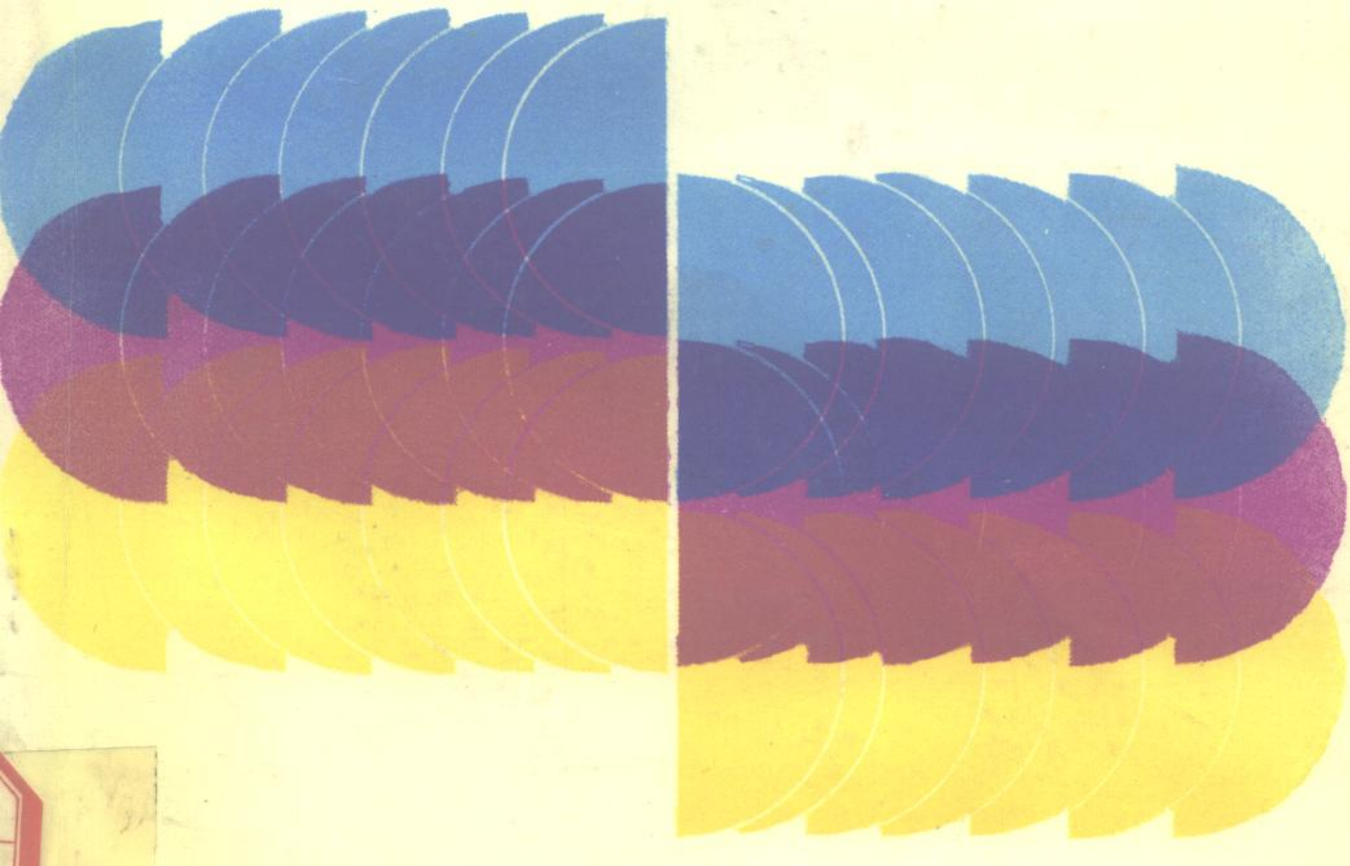
高等学校教材

高等数学

重庆大学高等数学教研室 编

（上 册）



重庆大学出版社

高等学校教材

高等数学

上册

重庆大学高等数学教研室 编

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是由重庆大学高等数学教研室根据国家教委颁布的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》，结合教师们的多年教学经验，在作为讲义使用过多次的基础上修订而成的。

本书分为上、下两册，上册内容为函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，书末附有积分表和习题答案。

本书注重教学方法，深入浅出，叙述详细，有较多例题，利于教学，并且在对某些章节内容的处理上作了一些新的尝试。本书可作为高等工科学校教材，也可供工程技术人员自学或参考。

高等学校教材
高 等 数 学
上 册
重庆大学高等数学教研室 编
责任编辑 刘茂林
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆大学出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/16 印张：16.25 字数：406千
1992年 10 月第1版 1992年 10 月第1次印刷
印数：1—7000
标准书号：ISBN 7—5624—0520—4 / O·72 定价：6.30元

前　言

本书的编写是为了更好地贯彻国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》和我校制定的教学大纲;同时也是为了总结我校广大教师多年的教学经验,促进教材建设工作。

在编写中,为了加强实践性环节,适当增加了一些例题,并在习题中吸收了一些近年来的较新题目。还增设了每一章的总习题。在内容的讲授方面,对传统的讲法,作了某些新的改革。

本书已在我校作为讲义试用过多次,根据实践经验及同行们所提的宝贵意见,曾作过一次修订,现在又作了一次修订。

本书分为上、下两册。上册内容为一元函数微积分学及向量代数与空间解析几何;下册内容为多元函数微积分学以及级数和常微分方程等。书末附有习题答案。

本书由谢树艺教授主编。参加编写工作的还有赵中时教授、刘国诚、吴大裕、刘定忠、曾澄玉、王祯祥、王宜涵等副教授。限于我们的水平,书中难免存在缺点和不当之处,敬希同行及广大读者不吝指正!

在此,谨向关心本书及对本书提出宝贵意见的同志表示深切感谢!

编者

1991年11月

目　录

第一章　函数、极限、连续

本章介绍函数概念、极限定义及其主要性质，最后讨论函数的连续性. 函数是变量与变量之间相互依赖关系的数学抽象，是高等数学研究的主要对象；极限理论贯穿整个高等数学的始终，是研究高等数学的理论基础；连续函数是最常见的一类函数，也是高等数学研究的最主要的对象.

§1　函　　数

一、常量与变量

在研究自然现象或科技领域的过程中，都会遇到很多的量，这些量一般可分为两类：其中一类量，在运动或变化的过程中恒保持一定的数值，称为**常量**；另一类量，则在过程中可以取不同的数值，称为**变量**. 例如，在某一飞行过程中，旅客人数，行李重量不会改变，故为常量；而飞行高度，飞机所带的油量，均不断改变，则是变量. 一般用 a、b、c、… 表示常量，而用 x、y、z、s、t、… 表示变量. 必须指出，所谓常量与变量的区分都是对某一过程而言，同一个量，在某一过程中为常量，而在另一过程中就可能为变量. 如物体的质量在运动学中，一般认为是常量，但当运动速度接近光速时，质量则为变量.

变量在一过程中的变化大都有一定的变化范围，即变量的取值为一数集. 例如自然数集 N，有理数集 Q，实数集 R 等，但最多的乃是区间，其定义如下：

定义 1　设 a、b 为实数且 $a<b$

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

如图 1.1(a)

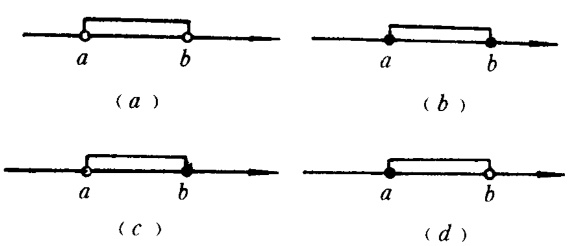


图　1.1

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的**闭区间**，记为 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

如图 1.1(b)

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的**半开区间**. 记为 $(a,b]$(或 $[a,b)$)，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

如图 1.1(c)和图 1.1(d)

(4)开区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示所有实数，开区间 $(a,+\infty)$ 表示大于 a 的一切实数，而 $(-\infty,b]$ 表示不超过 b 的所有实数. 记号"∞"读为无穷大，它并不是一个数，"∞"前面的"+"、"−"号表示方向. 包含"∞"的区间称为无穷区间，有如下 5 类，即

$$(a,+\infty)=\{x|a<x\},\quad [a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$$

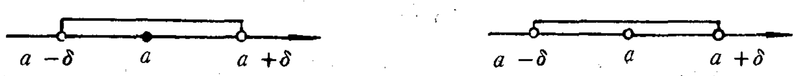
定义 2 开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为以 a 为中心，$\delta(>0)$为半径的**邻域**，简称为点 a 的 δ—邻域，记为 $U(a,\delta)$，如图 1.2(a)，x 属于 a 的 δ—邻域，意指

$$a-\delta<x<a+\delta \text{ 或 } |x-a|<\delta.$$

在微积分学中还常常用到如下集合

$$\{x|0<|x-a|<\delta;\delta>0\}$$

它是在点 a 的 δ 邻域中去掉中点 a 后其余的点组成的集合，简称为点 a 的**去心邻域**，记为 $U(\hat{a},\delta)$，如图 1.2(b).



(a) $U(a,\delta)$　　　　(b) $U(\hat{a},\delta)$

图 1.2

二、函数概念

定义 3 设有两个变量 x,y 和一个数集 D，若对于 D 内的任意 x，变量 y 按照某一确定的法则，总有唯一确定的值与之对应，则称 y 为定义在 D 上的 x 的**函数**，记为

$$y=f(x)\qquad x\in D$$

称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数的**定义域**. 当 x 取遍定义域 D 内所有值时，所对应的函数值所构成的数集 W，叫函数的**值域**.

在很多问题中，常常需要考查函数在自变量的某个已知值 x_0 处是否有对应值. 因此，如果函数 y 在 x_0 处有一确定的对应值，就称函数 y 在 x_0 处**有定义**.

例 1 当一个物体作自由落体运动时，物体经过的路程 s 与时间 t，按伽里略定律有如下关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

假定物体着地的时刻为 T，则上式表示 s 为 t 的函数，其定义域 $D=\{t|t\in[0,T]\}$. 如图 1.3(a).

例 2 在一个汽缸进行工作的过程中，当温度保持不变时，按波义耳—马略特定律，压强 P 与体积 V 成反比，即

$$P=\frac{C}{V}\qquad (C\text{ 为比例常数})$$

该式表示 P 为 V 的函数，如图 1.3(b).

例 3 $y^2=x$ 对任意正数 x 均有两个 y 值($\pm\sqrt{x}$)与之对应，这时可说 y 为 x 的**双值函数**（如果对于 D 中的某些 x 值，对应的 y 不止一个时，称 y 为 x 的多值函数，但在微积分中谈到函数时，如不特别声明，都是指单值函数），也可以认为 $y^2=x$ 确定 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=-\sqrt{x}$ 两个函数，它们构成多值函数的两支，称 $y=\sqrt{x}$ 为主支. 如图 1.3(c).

例 4 称 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$

为 x 的**符号函数**，这是分段表示的函数，简称**分段函数**. 如图 1.3(d).

例 5 $y=1$ 表示无论 x 怎样变化，对应的 y 值都为 1，据此，可认为常量为变量的特殊情况. 如图 1.3(e).

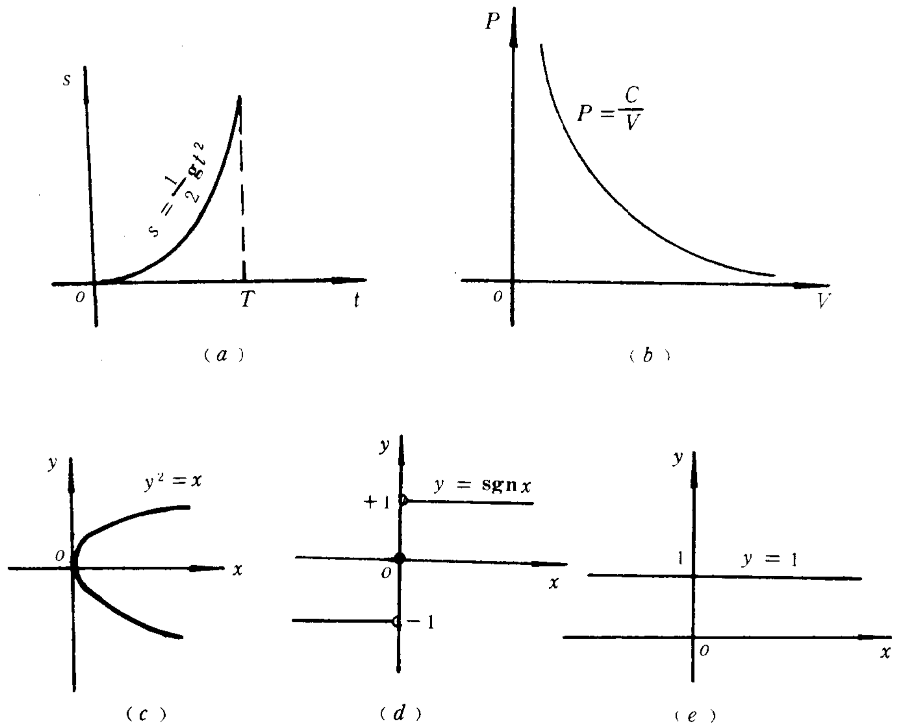


图 1.3

如上所述，一般的函数不仅可用解析式表示，而且还可采用图象表示. 绝大多数函数的图象与图 1.3 相仿，大都为连续或分段连续的曲线. 但是，并非具有解析式的函数均有图象，如狄里赫里(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$$

就没有图象.

函数 $y=f(x)$ 等价于映射 $x\xrightarrow{f(\ )}y$，其中 $f(\ \ )$ 为映射规律或叫函数关系. 如 $f(x)=3x+2$，则 $f(\ \ )=3(\ \ )+2$，从而

$$y|_{x=1}=f(1)=3\cdot1+2=5,\quad y|_{x=a}=f(a)=3a+2,$$
$$y|_{x=a+1}=f(a+1)=3(a+1)+2=3a+5.$$

应当注意，在同一问题中，若除函数 $f(x)$ 外，还需考虑 x 的别的函数时，就宜采用别的记号，如 $g(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 等来表示.

在实际问题中，应根据问题的实际意义确定函数的定义域. 如例 1 中的函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域并非 $(-\infty,+\infty)$，而是 $[0,T]$，(T 为着地时刻). 而对于仅由解析式给出的函数，其定义域

是指使该式有意义的一切实数所成的集合，并称该集合为此函数的**自然定义域**，今后对此种函数如不附加声明，所讨论的定义域均指自然定义域.

例 6 求函数 $y=\dfrac{2x^2-\ln(x+5)}{\sqrt{x-x^2}}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须使 $\ln(x+5)$ 有意义，同时 $\sqrt{x-x^2}$ 有意义且不能为零，因而得到不等式组

$$\begin{cases}x+5>0,\\ x-x^2>0,\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x>-5,\\ 0<x<1.\end{cases}$$

其解为 $0<x<1$，所以定义域 $D=\{x\,|\,0<x<1\}$.

三、复合函数与反函数

在实际问题中遇到许多较为复杂的函数，往往是由一些简单函数（如幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数）和常数经过一些简单的运算所构成，其中，除四则运算外，就是函数的复合.

例 7 质量为 m 的物体以初速 v_0 作上抛运动，则速度 v 与时间 t 的函数关系式为

$$v=v_0-gt$$

又知，动能 $j=\dfrac{1}{2}mv^2$. 由此，动能 j 与时间 t 的函数关系式为

$$j=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$$

可说它是由函数 $j=\dfrac{1}{2}mv^2$ 与函数 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数. 下面给出一般定义.

定义 4 设 y 为 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 R，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其定义域为 D，如 D_1 为 D 的子集，对任意的 $x\in D_1$，函数 $\varphi(x)$ 的值域 R_1 为 R 的子集，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 或者说 y 通过**中间变量** u 而成为 x 的**复合函数**，其定义域为 D_1.

如由函数

$$y=1+u^2,\quad u=\sin x$$

可复合为 $y=1+\sin^2x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 而函数

$$y=u,\quad u=1-x^2$$

可复合为 $y=\sqrt{1-x^2}$，其定义域为 $[-1,1]$.

但应注意，函数

$$y=\arcsin u,\quad u=2+x^2$$

就不能构成复合函数，因为对任意 x，有 $2+x^2>1$，故 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义。

当然，构成复合函数时，中间变量可以不止一个.

例 8 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 可复合为 $y=\sqrt{\sin x^2}$，其定义域由

$$2k\pi\leqslant x^2\leqslant(2k+1)\pi,\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

所确定.

例 9 $y=f(u)=u^3+u^2$，$\quad u=\varphi(x)=\begin{cases}-1, & x\ 为无理数,\\ 1, & x\ 为有理数.\end{cases}$

其复合函数为

$$y = f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ 2, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

在研究两变量之间的依赖关系时，根据问题的需要有时可任意选定其中一个为自变量而另一个为因变量或函数. 如对自由落体运动(例 1)如选 t 为自变量，有

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad t \in [0,T]$$

如果解出 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，则它表示 t 为 s 的函数. 可称 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 为 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数.

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 μ，如果对于 μ 中的任一 y，由函数 $y=f(x)$ 能在 D 中确定唯一的 x 和它对应，记为 $x=f^{-1}(y)$，称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 μ.

由定义容易看出，如果 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数. 就是说 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数. 由于函数与其变量的记号无关，因此，$y=f(x)$ 的反函数既可写成 $x=f^{-1}(y)$，也可按自变量常写为 x 的习惯，写为 $y=f^{-1}(x)$，定义域都是 μ.

例 10 因为关系式 $y=2x-3$ 等价于关系式 $x=\frac{y+3}{2}$，从而函数 $y=2x-3$ 的反函数为 $y=\frac{x+3}{2}$.

又 $y=x^3$ 等价于 $x=\sqrt[3]{y}$，故 $y=x^3$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$.

例 11 函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$；而 $y=x^2, x\in(-\infty,0)$ 有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

同理知

$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 有反函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$；

$y=\cos x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 有反函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$；

$y=\operatorname{tg} x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 有反函数 $y=\operatorname{arctg} x, x\in(-\infty,+\infty)$；

$y=\operatorname{ctg} x\,(0<x<\pi)$ 有反函数 $y=\operatorname{arcctg} x, x\in(-\infty,+\infty)$.

此外把指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的反函数叫做**对数函数**，记作

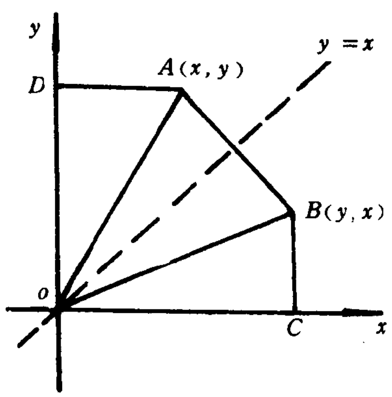


图 1.4

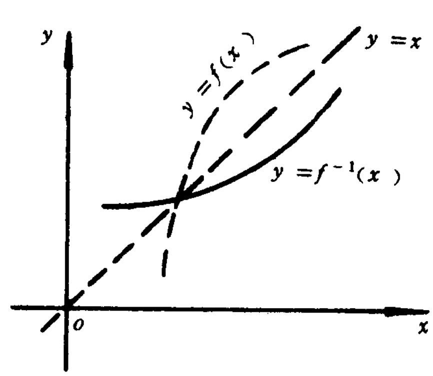


图 1.5

$$y = \log_a x \qquad x \in (0, +\infty).$$

如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，注意到关系式 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是等价的，它们表示同一条曲线. 由 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$ 实质上是在坐标平面上把点 (x,y) 换为点 (y,x).

如图 1.4，设点 $A(x,y)$ 与点 B 关于直线 $y=x$ 对称，易得 $OA=OB$，$\angle BOC=\angle AOD$，故 $\triangle OBC\cong\triangle OAD$，得 $OD=OC$，$AD=BC$，即点 B 的坐标为 (y,x). 由此得出 $y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称，如图 1.5.

最后指出，并非任何函数都可以建立反函数，如 Dirichlet 函数，$\mathrm{sgn}x$ 都没有反函数.

四、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 6 如果存在 $M>0$，使对 D 内任意 x 之值均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在 D 内**有界 M** 或者说 $y=f(x)$ 在 D 内**有界**.

例如，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 同理，$\cos x$，$\mathrm{sgn}x$ 都为有界函数. 显而易见，如 $y=f(x)$ 在 D 内有界 M，则其图象必然分布于由直线 $y=\pm M$ 所夹的条形区域内.

定义 7 函数 $f(x)$ 定义于 D，若存在 $M(m)$ 对 D 内任意 x 之值，均有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant m)$ 成立时，则称函数 $f(x)$ 在 D 内有**上界** M（**下界** m）.

容易判断 $y=2^x$ 有下界 $m=0$，$y=-x^2+1$ 有上界 $M=1$.

有界函数为既有上界又有下界的函数，掌握函数的上（下）界可大致判断图象的分布范围.

2. 函数的单调性

初等数学中已介绍过，指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 当 $a>1$ 时，函数值随自变量的增大而增大；而当 $0<a<1$ 时，函数值随自变量的增大而减小. 这种变化趋势可概括为

定义 8 设 $f(x)$ 定义于 D，如对 D 内任意的 x_1、x_2，只要 $x_1<x_2$ 时，就有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调增加的**，简称**单增**；如果 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调减小的**，简称**单减**. 单调增加和单调减小的函数，统称为**单调函数**.

例 12 判断 $y=x^2$ 的单调性，并确定其单调区间.

解 设 $x_1<x_2$，记 $y=f(x)=x^2$. 因为

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)\begin{cases}>0, & x_1<x_2<0,\\ <0, & 0\leq x_1<x_2.\end{cases}$$

所以，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单减，在 $(0,+\infty)$ 内单增，称 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 分别为函数 $y=x^2$ 的**减区间**和**增区间**.

容易明白，若函数 $y=f(x)$ 在 D 内单调，则必存在与 $y=f(x)$ 有相同单调性的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

3. 函数的奇偶性

定义 9 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 对称于原点，若对 D 内的任意 x 之值，均有 $f(x)=f(-x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

易见 $y=x^2$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均为偶函数，而 $y=x$，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均为

奇函数. 但 $y=3x+1, x\in(-\infty,+\infty)$，$y=x^2, x\in(-1,2)$均系无奇偶性的函数.

注意，点(x,y)与点$(-x,y)$关于 y 轴对称，而点(x,y)与点$(-x,-y)$关于原点对称. 因此，如函数 $y=f(x)$为偶函数，则其图象对称于 y 轴，如函数 $f(x)$为奇函数，则其图象对称于原点. 见图 1.6 和图 1.7.

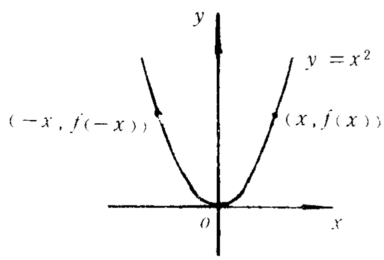


图 1.6 对称于 y 轴

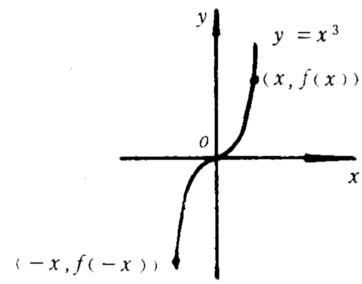


图 1.7 对称于原点

例 13 求证函数 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$在$(-\infty,+\infty)$内为奇函数.

证 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

对任意 x 均成立. 所以，函数 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$在$(-\infty,+\infty)$内为奇函数.

4. 函数的周期性

在转动或振荡等自然现象中，总是出现循环和往复，如行星的运动，简谐振动，电磁波的传播等都有周而复始的现象. 反映在函数关系上就是函数具有周期性.

定义 10 对于函数 $f(x)$，如存在 $T\neq 0$，使对任意 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$，且恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$为**周期函数**. 称 T 为 $f(x)$的**周期**.

显然，如 T 为 $f(x)$的周期，则 T 的整数倍也必为周期. 如函数 $f(x)$存在最小正周期，则称它为**基本周期**. 一般所说函数的周期总是指基本周期(如果存在的话). 例如，$\sin x$，$\cos x$ 以 2π 为周期，$\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$ 以 π 为周期. 注意函数 $y=3$ 以任意非零实数为周期，而 Dirichlet 函数以任意非零的有理数为周期，它们均无基本周期.

例 14 求 $f(x)=A\sin(\omega x+\delta)$的周期. ($A,\omega,\delta$ 为常数，$\omega\neq 0$).

解 设 $f(x)$的周期为 T，按定义，对任意 x，应有

$$f(x+T)-f(x)=A\sin[\omega(x+T)+\delta]-A\sin(\omega x+\delta)$$

$$=2A\cos\left[\omega x+\delta+\frac{\omega T}{2}\right]\sin\frac{\omega T}{2}$$

恒为零. 这只需 $\sin\frac{\omega T}{2}=0$ 即可，由此得$\frac{\omega T}{2}=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，所以周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

五、初等函数

在初等数学中，讨论了五类函数，即

幂函数：$y=x^{\mu}$，μ 为任意实数.

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

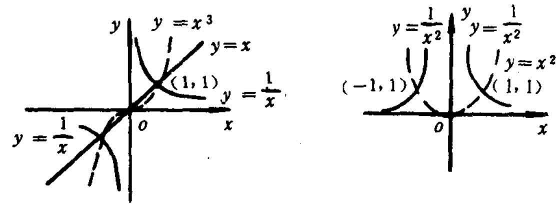
三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arctg}x$，$y=\operatorname{arcctg}x$，$y=\operatorname{arcsec}x$，$y=\operatorname{arccsc}x$.

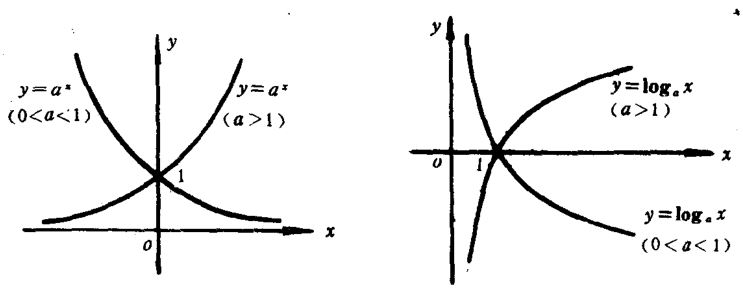
称这五类函数为**基本初等函数**.

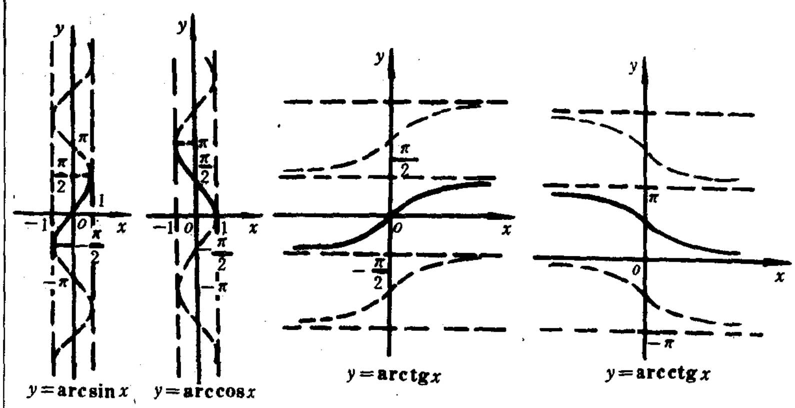
五类基本初等函数的简单性质，可参考初等数学有关部分，这里不再重复，其图象可参见表 1－1. 以下仅对幂函数进行简单讨论.

表 1－1

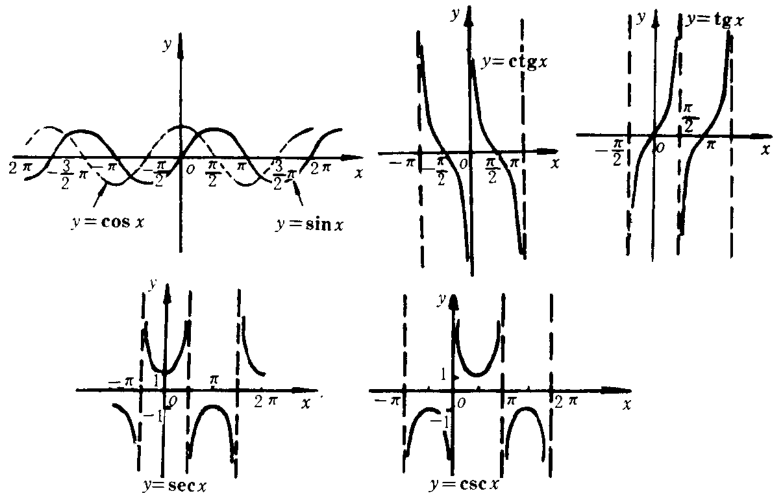
<table>
<tr><th>函数</th><th>关系式</th><th></th></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y=x^{\mu}$
（μ 是实数）</td><td>


</td></tr>
<tr><td>指数函数与对数函数</td><td>$y=a^{x}$

$y=\log_{a}x$</td><td>


</td></tr>
<tr><td>三角函数</td><td>$y=\sin x$
$y=\cos x$
$y=\operatorname{tg}x$
$y=\operatorname{ctg}x$
$y=\sec x$
$y=\csc x$</td><td>


</td></tr>
</table>

函数	关系式	
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y=\arccos x$ $y=\mathrm{arctg}x$ $y=\mathrm{arcctg}x$	

对幂函数　$y=x^\mu$

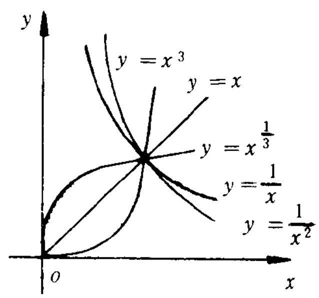


图　1.8

其中 μ 可为任意实数，定义域随 μ 值的不同而不同，但在 $(0,\infty)$ 内，$y=x^\mu$ 总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时，$y=x^\mu$ 的图形都通过点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，而且在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. 当 $\mu<0$ 时，$y=x^\mu$ 的图形都通过点 $(1,1)$，且在 $(0,\infty)$ 内是单调减少的，如图 1.8 所示.

如 μ 为有理数，设 $\mu=p/q$（p,q 为既约整数），当 p 为偶数时，$y=x^\mu$ 为偶函数，p,q 均为奇数时，$y=x^\mu$ 才是奇函数.

称由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算而构成的，并用一个式子表示的函数为初等函数. 如

$$y=\sqrt{1+\ln(3+\sqrt{x})},\quad y=\sin x^2+8a^{-x^2}$$

都是初等函数. 但 Dirichlet 函数，$\mathrm{sgn}x$ 都是非初等函数. 对于分段函数总认为是非初等函数.

六、双曲函数

双曲函数是用指数函数 e^x 所定义，而且是运用颇广的一类函数.

定义 11　称

$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　为双曲正弦函数，

$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　为双曲余弦函数，

$\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　为双曲正切函数，

$\mathrm{cth}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$　为双曲余切函数.

根据定义，容易证明双曲函数有下列和三角函数相似的公式：

$\operatorname{sh}x=\operatorname{th}x\cdot\operatorname{ch}x$，　$\operatorname{ch}x=\operatorname{cth}x\cdot\operatorname{sh}x$，

$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$，　$\operatorname{sh}(x_1\pm x_2)=\operatorname{sh}x_1\cdot\operatorname{ch}x_2\pm\operatorname{ch}x_1\cdot\operatorname{sh}x_2$，

$\operatorname{ch}(x_1\pm x_2)=\operatorname{ch}x_1\cdot\operatorname{ch}x_2\pm\operatorname{sh}x_1\cdot\operatorname{sh}x_2$，　$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$，

$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$，　$\operatorname{th}2x=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$，　$\operatorname{cth}2x=\dfrac{1+\operatorname{cth}^2x}{2\operatorname{cth}x}$.

双曲函数 $\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x,\operatorname{th}x,\operatorname{cth}x$ 的图象如图 1.9 和图 1.10 所示.

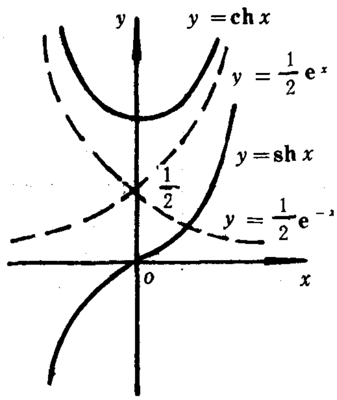


图　1.9

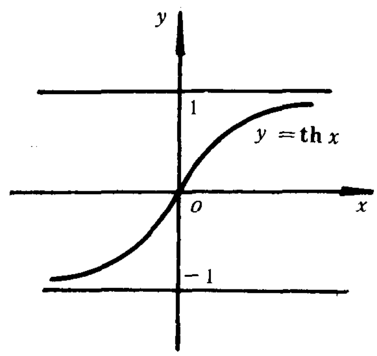


图　1.10

同三角函数相似，双曲函数也有反函数. 例如，由

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0.$$

解出

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}.$$

从而 $y=\operatorname{sh}x$ 的反函数(反双曲正弦)为

$$\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且为单调增加的奇函数，如图 1.11 所示.

由于 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在$(-\infty,+\infty)$内为偶函数，故不单调，但 $\operatorname{ch}x$ 在$[0,+\infty)$内为单调增加的，所以由

$$y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(x\geqslant 0)$$

解出

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}.$$

从而

$$x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})=\pm\ln(y+\sqrt{y^2-1}).$$

但由 $x\geqslant 0$ 的限制，应当舍去负号，故 $y=\operatorname{ch}x(x\geqslant 0)$的反函数(反双曲余弦)为

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

其定义域为$[1,+\infty)$，且单调增加，如图 1.12 所示.

同理可得反双曲正切

$$y=\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$