历届高考数学试题分析与解法研究

李开成　潘福田　编著

黑龙江教育出版社

历届高考数学试题分析与解法研究

李开成　潘福田　编著

黑龙江教育出版社

1987年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：陈力石

历届高考数学试题分析与解法研究

lijie Gaokao Shuxue shiti Fnexi yu Jiefa yanjiu

李开成　潘福田　编著

黑龙江教育出版社　出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
佳木斯书刊印刷厂　印刷
黑龙江省新华书店　发行

开本787×1092毫米1/32·印张 12.75．插页1
字数264,000
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
印数1—8,470

统一书号：7357·236　定价：2.20元

前　言

自从1978年恢复高等学校招生全国统一考试以来，试题的质量逐年提高。在历届试题中，都出现了一些优秀的命题，这些试题的特点是：紧靠大纲，面向中学教学实际，既考查了学生掌握基础知识的牢固程度，又检查了学生灵活运用知识和分析解决问题的能力。此外，试题还具有源于教材，基础性强，灵活多变，深浅适度，题型多样，以及知识覆盖面大等优点。

各地中学数学教师都十分重视对于高考数学试题的分析和各种解题方法的研究，经常从中选择一些题目作为双基训练或培养技能技巧的范例。广大高中学生，也把历届高考试题做为复习备考的重要参考资料。为了满足广大中学数学教师和高中学生的需要，我们特编写了《历届高考数学试题分析与解法研究》一书。

本书将1978——1985年的高考数学试题（理工医农类），按年度逐题做了分析，研究了各种解题方法，指出了常见的错误解法，并分析了错解原因。编写时，我们参阅了很多数学报刊上的文章，在此向这些文章的作者深表谢意。

由于水平所限，书中不妥与谬误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

1986年6月

目录

1 9 7 8 届

一、（下列各题每题满分 4 分，五个题共20分）

（1） **分解因式：$x^2-4xy+4y^2-4z^2$。**

〔试题分析〕 **本题考查考生是否掌握基本公式：①$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；②$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$以及简单的分解因式的基本技能。**

〔解法研究〕

思路 1：易见多项式的前三项是一完全平方式，故可立即想到用公式法分解之。

解1 原式 $=(x^2-4xy+4y)-4z^2$ 1 分

$=(x-2y)^2-(2z)^2$ 3 分

$=(x-2y+2z)(x-2y-2z)$ 4 分

思路 2：原式可视为x的二次三项式，可用十字相乘法分解之。

解2 原式 $=x^2-4y\cdot x+4(y^2-z^2)$

$=(x-2y-2z)(x-2y+2z)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -2(y+z) \\ 1 & & -2(y-z) \\ \hline -2y-2z & & -2y+2z \end{array}$$

思路3：令多项式的值等零。把它看做x的二次方程，设其二根为x_1，x_2再使用公式：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$分解之。

解3 令 $x^2-4yx+4(y^2-z^2)=0$，就x解之得$x_1=2y+2z$，$x_2=2y-2z$则

原式$=[x-(2y+2z)][x-(2y-2z)]$

$=(x-2y-2z)(x-2y+2z)$

（2）已知正方形边长为a，求侧面积等于此正方形面积，高等于此正方形边长的直圆柱体积。

解 设圆柱底面半径为r，则其底面周长为$2\pi r$，由题设 $2\pi r=a$，$r=\dfrac{a}{2\pi}$ 2分

$\therefore\ V_{柱}=\pi r^2 a=\pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 a=\dfrac{a^3}{4\pi}$ 4分

（3）求函数$y=\sqrt{\lg(2+x)}$的定义域。

解 $\because\ \lg(x+2)\geqslant 0$ 2分

$\therefore\ x+2\geqslant 1$ 即 $x\geqslant -1$ 3分

〔答〕 定义域是$x\geqslant -1$的所有实数。 4分

〔错解分析〕

（1）有的考生列下记不等式组来解。

$$\begin{cases}\lg(x+2)\geqslant 0 & ①\\ x+2\geqslant 0 & ②\end{cases}$$

实际上①的解集已经包含了②的解集，故②是多余的了。

（2）不少考生将$\lg(x+2)\geqslant 0$误为$\lg(x+2)>0$，这表明对数性质不清。

（4） 不查表求$\cos 80°\cdot\cos 35°+\cos 10°\cdot\cos 55°$的值。

〔试题分析〕 本题考查三角的基本公式以及运用公式进行化简的技能。

〔解法研究〕

思路1：从减少角的个数入手化简。

解： 原式$=\cos 80°\cdot\cos 35°+\sin 80°\cdot\sin 35°$ 2分

$=\cos(80°-35°)=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 4分

或 原式$=\sin 10°\cdot\cos 35°+\cos 10°\cdot\sin 35°$ 2分

$=\sin(10°+35°)=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 4分

思路2：从减少函数的个数入手。

解2 原式$=\dfrac{1}{2}\left[\cos 115°+\cos 45°+\cos 65°+\cos 45°\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[-\cos 65°+\cos 45°+\cos 65°+\cos 45°\right]$

$=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

研究：此类化简求值问题的解题规律是：利用有关的三角公式，减少与式中角和函数的个数，最后化为特殊角的函数或直接由公式而得解。

〔错解分析〕

（1） 许多考生将两角和差的正弦、余弦公式式中的符号搞错。

（2） 少数考生试卷中出现如下错解：

$$原式 = 2\left[\cos\frac{115°}{2} + \cos\frac{45°}{2} + \cos\frac{65°}{2} + \cos\frac{45°}{2}\right]$$

$$= \cdots$$

其原因是误将和差化积公式中的系数和角当做了积化和差公式中的系数和角。为了防止这种相互干扰的现象，教师在讲述积化和差公式时，一定要与和差化积公式进行对比，并着重揭示两者在系数和角上的差异。

(5)化简：

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^2(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$$

〔试题分析〕 本题是由$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \div (0.1)^2$与$(\sqrt{4ab^{-1}})^3 \div (a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}$两个基本题捏合而成的一个较复杂的计算问题。它主要考查学生是否准确地掌握了各种有理指数幂的概念，以及是否具有正确使用幂的概念和运算法则进行变形和化简的技能和技巧。

〔解法研究〕

解：原式 $=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}\cdot(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$ 1分

$=\dfrac{2\cdot 2^3}{10^2}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$ 2分

$=\dfrac{4}{25}\cdot a^0\cdot b^{\frac{1}{2}}$ 3分

$=\dfrac{4}{25}\sqrt{b}$ 4分

研究：此类问题的计算要领是：小数化分数，分式和根式化成幂，以便使用幂的运算法则计算之。

〔错解分析〕

（1）有些考生未掌握上述计算要领，反而将幂化成根式做根式运算。虽也获得正确结果，但却耗费时间。

（2）有些学生把 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ 误为 $a^{\frac{n}{m}}$，以致出现 $(\sqrt{4ab^{-1}})^3=(4ab^{-1})^{\frac{2}{3}}$ 的错误。

二、（本题满分14分）

已知方程 $kx^2+y^2=4$，其中k为实数，对于不同范围的k值，分别指出方程所代表图形的类型，并画出显示其数量特征的草图。

〔试题分析〕 本题是一关于二次曲线类型的讨论问题。原方程表示了一个二次曲线集，要求考生按 K 的不同取值

范围来确定出所有的子集，从而可以考查学生对椭圆及双曲线基础知识的掌握情况。

〔解法研究〕

思路：由于本题要求按不同范围的K值进行讨论，因此应首先将K划分为几个不同的取值范围。因为K是实数故可首先分为$K>0$、$K=0$、$K<0$三个区间。而在$K>0$的范围内，由于K大于、等于、小于1的不同所对应的二次曲线也不同，故又应分为$K>1$、$K=1$、$K<1$三个区间来讨论。

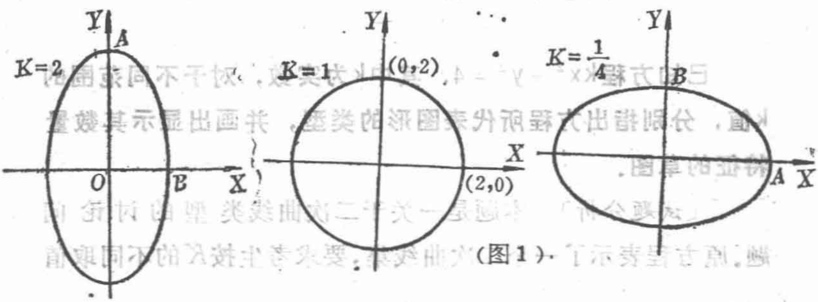
解 原方程可化为$\dfrac{x^2}{\left(\left|\dfrac{2}{\sqrt{K}}\right|\right)^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$。

1. $K>0$时，方程的是中心在原点的椭圆。在此情形下又可分为：

（1）$K>1$时，长轴在y轴上，半长轴$=2$，半短轴$=\dfrac{2}{\sqrt{K}}$；

（2）$K=1$时，为一半径$=2$的圆；

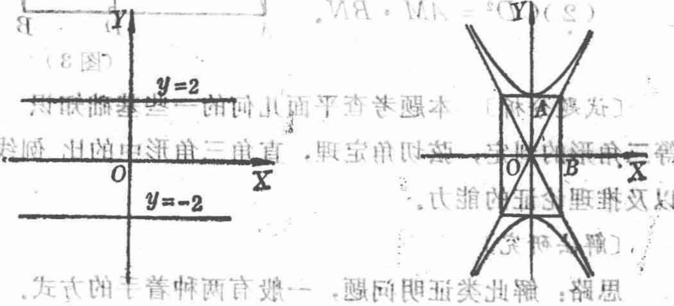
（3）$K<1$时，长轴在x轴上，半长轴$=\dfrac{2}{\sqrt{K}}$，半短轴$=2$（以上均见图1）。 8分



（图1）

2. $K=0$ 时，方程是$y^2=4$，图形是两条平行于x轴的直线$y=\pm 2$（图2左）。 11分

3. $K<0$ 时，方程为$-\dfrac{x^2}{\dfrac{4}{|K|}}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 这时图形是中心在原点，实轴在$y$轴上的双曲线（图2右）。 14分



（图2）

研究：当$K<0$时，$K=-|K|$原方程可化为

$$\frac{y^2}{2^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{|K|}}\right)^2}=1$$

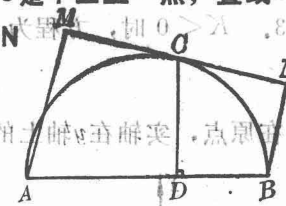
，此为中心在原点，实半轴$=2$，虚半轴$=\frac{2}{\sqrt{|K|}}$，焦点在y轴上的双曲线。

〔错解分析〕

本题绝大多数考生不能做出全面系统的讨论。其中多数未考虑$K=0$的情况。在$K>0$的情况只指出曲线为椭圆但未能就$K>1$，$K=1$，$K<1$三种情况作进一步的讨论。而在$K<0$的情况，仅指出曲线为双曲线而未能说明双曲线的确切位置，甚至有人图中画出的是焦点在x轴的双曲线。

三、（本题满分14分）

（如图3）AB是半圆的直径，C是半圆上一点，直线MN切半圆于C点，AM⊥MN于M点，BN⊥MN于N点，CD⊥AB于D点.



（图3）

求证：（1）$CD=CM=CN$.

（2）$CD^2=AM\cdot BN$.

〔试题分析〕 本题考查平面几何的一些基础知识（全等三角形的判定，弦切角定理，直角三角形中的比例线段）以及推理论证的能力.

〔解法研究〕

思路：解此类证明问题，一般有两种着手的方式.

（1） 从分析已知条件入手(综合法)

根据已知条件联想有关定理、公式，充分分析图形性质，从而找出证题途径.

（2） 从分析结论入手(分析法)

根据结论考虑，要证得这一结论需要哪些条件.其中哪些题中直接给出，哪些未直接给出.那么要得到这些条件又需什么条件.如此追索下去直到与题设条件相遇为止从而找出证明途径.

在多数情况下，往往是分析与综合交错运用.

分析本题条件时请注意以下几点：

（1）C为半圆上一点——联想立于半圆上的圆周角.

（2）MN为圆的切线——联想切线的性质.

（3） $CD\perp AB$——联想半圆中的比例线段。

（4） $AMNB$是一个直角梯形，圆心O是梯形一腰中点——联想梯形中位线。

在做出上述联想之后，将立即发现如下的一些间接条件（隐蔽条件）：

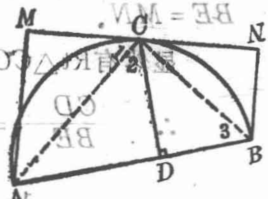
（1）$\triangle ABC$是以AB为斜边的直角三角形。

（2）OC垂直MN且为梯形$AMNB$的中位线。

（3）图中$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=\angle 5=\angle 6$。可见$AC$、$BC$分别是$\angle MCD$和$\angle NCD$的平分角线。

当我们对图形的性质作了上述分析之后，则证明的途径就昭然若揭了。

证1 （1）连AC、BC则$\angle ACB=90°$ ……1分



$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 3\\ \angle 2=\angle 3\end{array}\right\}\Rightarrow \angle 1=\angle 2 \quad 4分$$

$$\Rightarrow \triangle AMC\cong\triangle ADC \quad 6分$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CM=CD\\ 同理\quad CN=CD\end{array}\right\}\Rightarrow CM=CN$$

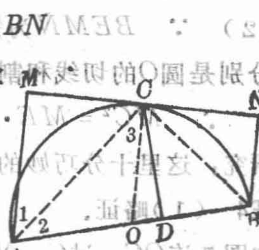
（图4）

（2） 由（1）$AD=AM$　$BD=BN$

在$Rt\triangle ABC$中，$\because$ $CD\perp AB$　$\therefore$ $CD^2=AD\cdot BD$

$\therefore$ $CD^2=AM\cdot BN$

研究：此法是通过三角形全等而推出线段相等。



证2 （1）连OC（如图5）

$$\left.\begin{array}{l}OC\perp MN\\ AM\perp MN\end{array}\right\}\Rightarrow AM//OC$$

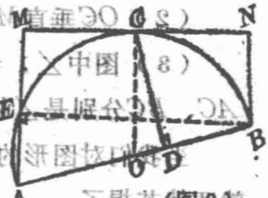
（5）

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle 1=\angle 3\\ \angle 2=\angle 3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ CM\perp AM\\ CD\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow CD=CM$$

同理$CD=CN$ ∴ $CM=CN=CD$

（2） 同证法1．

研究：此法实质是，欲证点到角两边等距，可转证此点在角的平分线上。



（图6）

证3 （1）略证

连OC易证OC是梯形$AMNB$的中位线，故$MC=CN$。

设AM交半圆于E，连BE易见$BEMN$为一矩形，从而$BE=MN$。

显然有Rt△COD∽Rt△BAE

∴ $\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{OC}{AB}=\dfrac{1}{2}$

∴ $CD=\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{1}{2}MN$

∴ $CD=CM=CN$

（2） ∵ $BEMN$为矩形，∴ $BN=EM$ 又MC、MA分别是圆O的切线和割线。

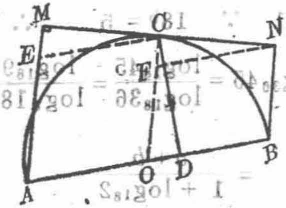
∴ $MC^2=ME\cdot AM$ ∴ $CD^2=BN\cdot AM$

研究：这里十分巧妙的引用了"切割线定理"。

证4 （1）略证。

如图7连OC，过C、N分别引AB的平行线设分别交

AM、OC于E、F。易证



（图7）

$Rt\triangle MCE \cong Rt\triangle DCO$

$\cong Rt\triangle CNF$

$\therefore \quad MC = CD = CN$

（2）略

研究：这里采用了“引辅助线构全等三角形”的方法证得线段相等。

请读者仿此引另一种辅助线，构$Rt\triangle COD$的全等形以证之。

四、（本题满12分）

已知 $\log_{18}9 = a(a \neq 2)$，$18^b = 5$。求$\log_{36}45$。

〔试题分析〕 本题主要考查对数定义，指数与对数的运算法则，换底公式等基础知识，同时还可考查学生能否灵活地运用这些基础知识去解决带有一定难度的计算问题，从中可以看出学生分析综合的思维能力以及运算的技能和技巧。

从题设的两个等式看来，a、b相当于两个已知的常数（$a = \log_{18}9$，$b = \log_{18}5$），因此本题的实质是用a、b来表示$\log_{36}45$。

〔解法研究〕

思路1：因为要用常数a 、b表示$\log_{36}45$，故须先求出b。显然$b = \log_{18}5$ 又$a = \log_{18}9$ 由此立即推出 $\log_{18}9 + \log_{18}5 = \log_{18}45 = a + b$。这表明$\log_{18}45$是已知的了。而所求的则是$\log_{36}45$，它与$\log_{18}45$仅是底数不同了。分析至此便想到“换底公式”。

解1 $\because \quad 18^b = 5 \qquad \therefore \quad b = \log_{18}5$

$$\log_{36}45 = \frac{\log_{18}45}{\log_{18}36} = \frac{\log_{18}9 + \log_{18}5}{\log_{18}18 + \log_{18}2} \qquad \text{4 分}$$

$$= \frac{a+b}{1 + \log_{18}2} \qquad ① \qquad \text{7 分}$$

$\because \quad 18 = 2 \times 9 \quad \therefore \quad \log_{18}18 = \log_{18}2 + \log_{18}9$

$\therefore \quad \log_{18}2 = 1 - \log_{18}9 = 1 - a \qquad ②. \qquad$ 11分

②代入① $\quad \log_{36}45 = \dfrac{a+b}{2-a} \quad (a \neq 2) \qquad$ 12分

研究：上述解法中关键的一步为求$\log_{18}2$。有的考生则用下法求得：

$$\log_{18}2 = \log_{18}\left(\frac{18}{9}\right) = \log_{18}18 - \log_{18}9 = 1 - a$$

思路2：解1中将题设的指数式$18^b = 5$化为对数式并用换底公式而得解，那么若将题设的对数式$\log_{18}9 = a$化为指数式能否得解呢？

解2 $\left.\begin{array}{r}\log_{18}9 = a \Rightarrow 18^a = 9 \\ 18^b = 5\end{array}\right\} \Rightarrow 18^{a+b} = 45 \qquad ①$

设 $\quad x = \log_{36}45 \Rightarrow 36^x = 45 \qquad ②$

$\left.\begin{array}{r}① \\ ②\end{array}\right\} \Rightarrow 18^{a+b} = 36^x \Rightarrow a + b = x\log_{18}36$

$$\Rightarrow x = \frac{a+b}{\log_{18}36} = \frac{a+b}{1 + \log_{18}2}$$

以下同解1。

研究：推出$18^{a+b} = 36^x$之后，亦可作如下的运算而解之。