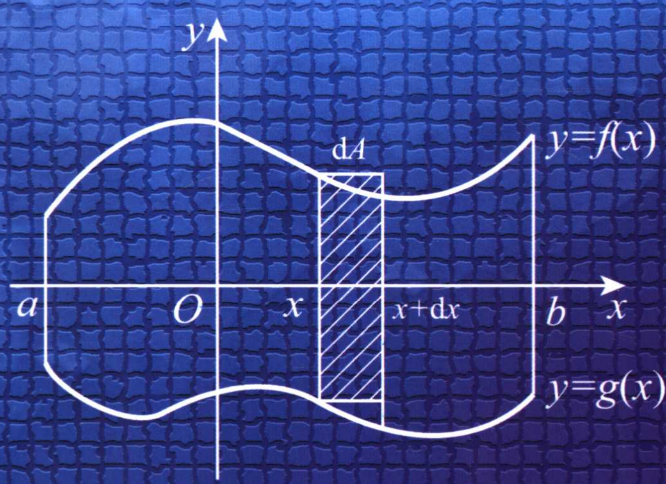
高等职业教育『十一五』规划教材

公共课教材系列

高等数学

敖屹兰◎主编

陈周钦◎主审



$$dA=[f(x)-g(x)]dx$$

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

科学出版社
www.sciencep.com

• 高等职业教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

高 等 数 学

敖屹兰　主编

陈周钦　主审

黄循彪　李雪贲　王东红　参编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书本着“降低理论要求，加强实际应用，注意能力培养”的原则，在结构处理上和内容安排上力争做到理论知识与实际应用相结合.

全书介绍了一元函数的微积分以及极限；导数与导数的应用；不定积分；定积分及定积分的应用；微分方程及微分方程的应用。为方便教师教学和学生自学，本书还配有习题与习题解答.

本书可作为高等职业教育工科学生的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/敖屹兰主编. —北京：科学出版社，2006
（高等职业教育“十一五”规划教材·公共课教材系列）
ISBN 7-03-017784-3

Ⅰ.高… Ⅱ.敖… Ⅲ.高等数学－教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 090058 号

责任编辑：吕建忠 沈力匀/责任校对：赵燕
责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 9 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2006 年 9 月第一次印刷 印张：20 1/2
印数：1—4 000 字数：463 000

定价：28.00 元（共二册）

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8305（VF02）

前　言

为了适应高等职业技术学院培养高等技术应用型人材的需要以及各专业对数学课的要求，我们编写了本书.

本书本着以应用为目的，以必需、够用为度的原则，在保证数学的科学性、逻辑性的基础上，着重讲解基本概念、基本理论及基本方法. 减少理论证明，注意培养学生的分析问题和解决问题的能力. 重视理论联系实际，内容通俗易懂. 尽力体现高职数学课的特色.

本书每节都配有习题，并配有《高等数学习题解答》一书，对于每个习题给出详细解答，提高了学生的学习效率. 同时，也节省了教学时间，缓解了数学课时紧的问题.

本书中标有 * 号的章节可供有关专业选用. 本课程教学时数大约为 96 学时，打 * 号的内容要另加学时.

本书由广东交通职业技术学院的敖屹兰担任主编. 由陈周钦教授担任主审. 黄循彪、李雪贲、王东红也参加了编写工作.

本书在编写过程中得到科学出版社的热情支持，在此表示衷心地感谢.

由于编者的水平和经验有限，书中难免有错误和不妥之处，恳切希望读者指正.

目　录

第 1 章 极限与连续

极限是数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础.极限的概念可以追溯到古代.在中国，公元前 4 世纪的桓团、公孙龙等所提出的"一尺之棰，日取其半，万世不竭"，公元 3 世纪的刘微；公元 5～6 世纪的祖冲之、祖暅对圆周率、面积和体积等的研究都包含着极限的萌芽.

本章主要介绍极限的概念及运算.

1.1 数列的极限

无穷多个数按照某种规律依次排列，就构成一个数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$.

其中第 n 项 x_n 称为该数列的通项.通常把数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 简记为数列 $\{x_n\}$.

例如，数列 $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots$ 其通项为 $\frac{n+1}{n}$.一个数列可以看成是自变量为自然数 n 的函数，

$$x_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

1.1.1 数列极限的定义

现在我们将进一步考察当自变量 n 无限增大时，数列 $x_n=f(n)$ 的变化趋势.先看下面两个数列：

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$.

为清楚起见，我们把这个数列的前几项分别在数轴上表示出来(图 1.1，图 1.2).

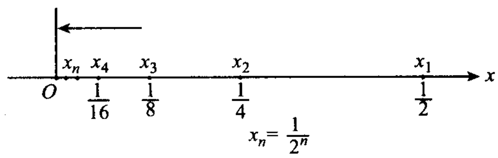


图 1.1

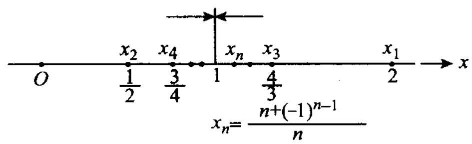


图 1.2

由图 1.1 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 x_n 无限趋近于 0；由图 1.2 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的附近，即数列 x_n 无限趋近于 1.

归纳这两个数列的变化趋势，可知当 n 无限增大时，x_n 都分别无限趋近于一个确定的常数. 一般地，我们给出下面的定义.

定义 1.1 如果当 n 无限增大时，数列 x_n 无限趋近于一个确定的常数 a，那么 a 就叫做数列 x_n 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad \text{或} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时，} x_n\to a.$$

因此，数列(1)的极限是 0，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；数列(2)的极限是 1，可记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$$

例 1.1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{n}$；　(2) $x_n=2-\frac{1}{n^2}$；　(3) $x_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$.

解 (1) $x_n=\frac{1}{n}$. 当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时，x_n 的各项顺次为

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\cdots.$$

因为当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 0，所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\mathop{\mathrm{lin}}_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

(2) $x_n=2-\frac{1}{n^2}$. 当 n 依次取 1,2,3,4,5,…等自然数时，x_n 的各项顺次为

$$2-1,\ 2-\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{9},\ 2-\frac{1}{16},\ 2-\frac{1}{25},\cdots.$$

因为当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 2，所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2.$$

(3) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$. 当 n 依次取 1,2,3,4,5,⋯等自然数时，x_n 的各项顺次为

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ -\frac{1}{243},\cdots.$$

因为当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 0，所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=0.$$

例 1.2 求常数列 $x_n=3$ 的极限.

解 这个数列的各项都是 3，故

$$\lim_{n\to\infty}3=3.$$

根据数列极限的定义 1.1 可以推得下面的结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\quad(\alpha>0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ （C 为常数）.

最后，还需注意，并不是任何数列都是有极限的.

例如，数列 $x_n=2^n$，当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，不能无限趋近于一个确定的常数，所以这个数列没有极限.

又如，数列 $x_n=(-1)^n$，当 n 无限增大时，x_n 在 1 与 -1 两个数上来回跳动，不能无限趋近于一个确定的常数，所以这个数列也没有极限.

1.1.2 数列极限的四则运算

前面我们介绍了数列极限的定义. 对于较复杂的数列的极限很难用定义去求极限，因此还需要研究数列极限的运算. 下面我们给出数列极限的四则运算法则.

定理 1.1 设有数列 x_n 和 y_n，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot x_n)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n=C\cdot a$ （C 是常数）；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq0)$.

（证明从略.）

例 1.3 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2$，求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{5}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3x_n-\dfrac{y_n}{5}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)=3\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3\times3=9$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{5}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{2}{5}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3x_n-\dfrac{y_n}{5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n)-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{5}=9-\dfrac{2}{5}=8\dfrac{3}{5}$.

例 1.4 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{1+n^2}$.

解 (1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}6-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$=6-0+3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=6.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{3-0+0}{0+1}=3.$$

例 1.5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

解 已知 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n}{2}(n-1)$，所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

进一步分析定义 1.1 可给出下面的数列极限的精确定义.

***定义 1.2** 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有
$$|x_n-A|<\varepsilon,$$
则常数 A 叫做数列 x_n 当 n 趋近于无穷大时的极限.或说数列收敛于 A.记作
$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad 当\ n\to\infty 时，x_n\to A.$$

上述定义也可简述为：如果对于任意给定的正数 ε.当 n 变到一定阶段之后，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称数列 x_n 收敛于 A.见图 1.3.

如果数列没有极限，就说数列发散.

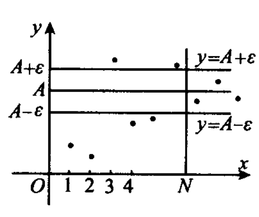


图 1.3

*例 1.6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

证 对于任意给定的正数 ε,要使

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

只要

$$\frac{1}{n}<\sqrt{\varepsilon},$$

即

$$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

由上面的分析,可知取 N 是大于$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$的一个正整数.当 $n>N$ 时,就有

$$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

即

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

所以,对于任意给的正数 ε,总存在正整数 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$(符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数),当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$.

这就证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

习题 1.1

1. 观察下列题中数列有无极限,如有极限请指出其极限值.

(1)数列 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$; (2)数列 $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2}$;

(3)数列 $x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$; (4)数列 $x_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$.

2. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{n}$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}$; (4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+1}{8-n^3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$.

*3. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

1.2 函数的极限

1.1 节我们讨论了当 $n\to\infty$ 时数列 $x_n=f(n)$ 的极限.

数列的极限就是研究自变量 $n\to\infty$ 这样一种变化状态下，函数 $f(n)=x_n$ 的变化趋势. 对于一般的函数 $y=f(x)$ 来说，由于 $x\in\mathbf{R}$，所以研究它的变化趋势时，自变量的变化会出现以下的情况：

(1) 自变量 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)；

(2) 自变量 x 任意趋近于一个确定的常数 x_0(记为 $x\to x_0$).

1.2.1 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子.

考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

由图 1.4 可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限趋近于零. 即当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

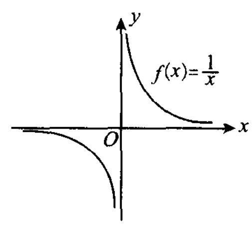


图 1.4

对于这种当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义.

定义 1.3 如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

当然，在这里我们是假定函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时是有定义的. 根据上述定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 的极限是 0，可记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

在以上的函数极限定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大(记为 $x\to+\infty$)，同时也取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$). 但有时 x 的变化趋向只能或只需取这两种变化中的一种情形. 下面给出当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义.

定义 1.4 如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=A \quad 或 \quad 当 x\to+\infty(x\to-\infty)时,f(x)\to A.$$

例如,如图 1.4 所示,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad 及 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

这两个极限值与 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 相等,都是 0.

又如,如图 1.5 所示,有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2} \quad 及 \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

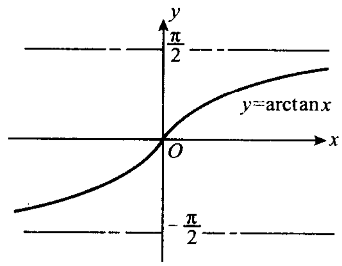


图 1.5

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时,不是无限趋近于同一个确定的常数,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

由上面的例子可以看出,如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在并且相等,那么,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 也存在并且与它们相等. 即使 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在,但不相等,那么 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 就不存在. 于是得下面的定理.

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

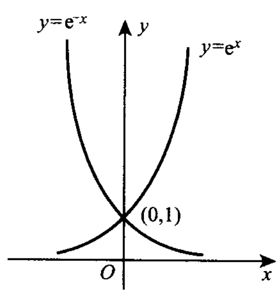


图 1.6

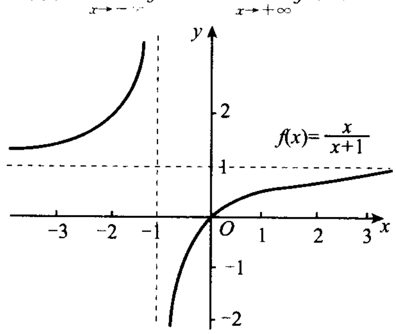


图 1.7

例 1.7 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$.

解 如图 1.6 所示,可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

例 1.8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$.

解 如图 1.7 所示,可知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$.

分析定义 1.7 可给出下面的函数极限的精确定义.

***定义 1.5** 设函数 $f(x)$ 当 $|x|>a(a>0)$ 时有定义. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)总存在一个正数 X,当 $|x|>X$ 时恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x\to\infty 时, f(x)\to A.$$

见图 1.8.

由定义易证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$(证明留给读者).

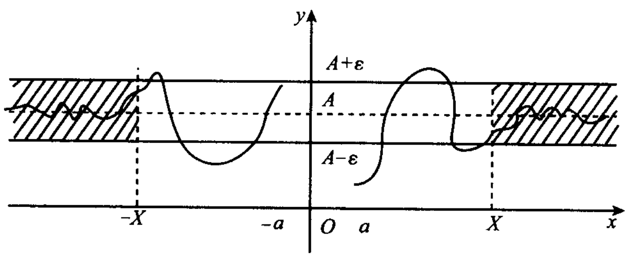


图 1.8

*例 1.9 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3}{2x^2+1}=2$.

证 任意给定正数 ε.(由于考虑 $x\to\infty$,不妨设 $x\neq 0$.)因为 $\left|\dfrac{4x^2-3}{2x^2+1}-2\right|=$ $\dfrac{5}{2x^2+1}<\dfrac{5}{2x^2}$,要使 $\left|\dfrac{4x^2-3}{2x^2+1}-2\right|<\varepsilon$,只要 $\dfrac{5}{2x^2}<\varepsilon$,解得 $|x|>\sqrt{\dfrac{5}{2\varepsilon}}$.

取 $X=\sqrt{\dfrac{5}{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,都有

$$\left|\frac{4x^2-3}{2x^2+1}-2\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3}{2x^2+1}=2.$$

1.2.2 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先看下面的例子.

考察当 $x\to 3$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 的变化趋势.如图 1.9 所示.

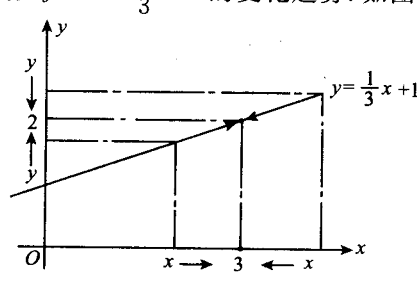


图 1.9

当 x 从 3 的左侧无限趋近于 3,即 x 取

$$2.9,\ 2.99,\ 2.999,\cdots\to 3$$

时,对应的函数 $f(x)$ 从

$$1.97,\ 1.997,\ 1.9997,\cdots\to 2.$$

当 x 从 3 的右侧无限趋近于 3,即 x 取

$$3.1,\ 3.01,\ 3.001,\cdots\to 3$$

时,对应的函数 $f(x)$ 从

$$2.03,\ 2.003,\ 2.0003,\cdots\to 2.$$

由此可知,当 $x\to 3$ 时,$f(x)=\frac{1}{3}x+1$ 的值无限趋近于 2.

对于这种当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势,给出下面的定义:

定义 1.6 如果当 x 无限趋近于定值 x_0,即 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x\to x_0\ 时,f(x)\to A.$$

需要说明的是,在上面的定义中,我们假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右近旁是有定义的;并且我们考虑的是当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的变化趋势,因此 $f(x)$ 在点 x_0 是可以没有定义.

因此,当 $x\to 3$ 时,$f(x)=\frac{x}{3}+1$ 的极限是 2,可记为

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}+1\right)=2.$$

例 1.10 在单位圆上观察 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ 的值.

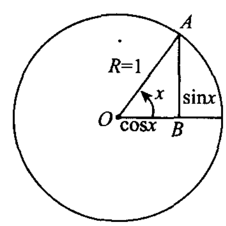


图 1.10

解 作单位圆,并取 $\angle AOB=x$ 弧度(图 1.10),则 $\sin x=BA$,$\cos x=OB$.

当 $x\to 0$ 时,BA 无限趋近于 0,OB 无限趋近于 1,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

例 1.11 考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0}C$ (C 为常数)和 $\lim\limits_{x\to x_0}x$.

解 设 $f(x)=C$,$\varphi(x)=x$.

$\because$ 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的值恒等于 C,

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C.$

$\because$ 当 $x\to x_0$ 时,$\varphi(x)$ 的值无限趋近于 x_0,

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0.$

我们前面讨论的当 $x\to x_0$ 时函数的极限中,x 既从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^-$),也从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^+$).下面再给出当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时函数极限的定义.

定义 1.7 如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A.$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A.$$

由图 1.9 可以看出，函数 $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ 当 $x \to 3$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2;$$

右极限为

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2.$$

即

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 2.$$

一般地，如果当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左极限与右极限各自存在并且相等，即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$，那么函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 也一定存在，并且也等于 A；反之，如果当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在并且等于 A，那么当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限与右极限也各自存在并且都等于 A，即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

因此，即使 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 就不存在. 于是得下面的定理.

定理 1.3 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 1.12 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时的极限.

解 作出这个分段函数的图形(图 1.11). 由图可知，函数 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to -0} (x - 1) = -1;$$

右极限为

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +0} (x + 1) = 1.$$

因为当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限与右极限虽各自存在但不相等，所以极限

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

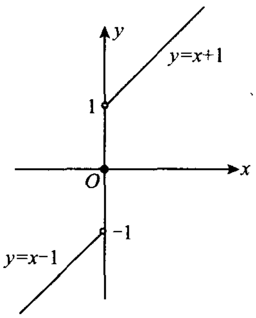


图 1.11

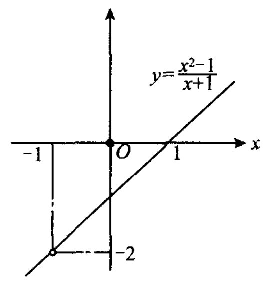


图 1.12

例 1.13 讨论函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$当 $x\to-1$ 时的极限.

解 函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 因为 $x\neq-1$,所以 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$.

作出这个函数的图形(图 1.12). 由图可知,

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}(x-1)=-2;$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1+0}(x-1)=-2.$$

所以

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2.$$

为了叙述上的方便,先介绍邻域的概念. 点 x_0 的一个 $\delta(\delta>0)$邻域是指以 x_0 为中心的一个开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 其中点 x_0 称邻域的中心,δ 称邻域的半径. 点 x_0 的一个去心邻域是指从点 x_0 的一个邻域,中去掉点 x_0.

分析定义 1.6,我们可给出函数极限的"ε-δ"精确定义.

* **定义 1.8** 设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某个去心邻域内有定义,A 是一个常数. 如果任意给定一个(无论多么小的)正数 ε,总存在一个正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 叫做 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,或称 A 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限,并记为

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 或 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$,如图 1.13 所示.

* **例 1.14** 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证 任意给定正数 ε. 由于

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|,$$