 电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程

信号与系统

(第3版)

王宝祥 主编



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY <http://www.phei.com.cn>

电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程

信号与系统

(第3版)

王宝祥 主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书全面系统地论述了信号与系统分析基础理论。全书分两篇共12章,第1章到第5章为信号篇,内容包括信号分析的基础知识,信号线性变换(傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换)和快速傅里叶变换等;第6章到第12章为系统篇,主要包括连续系统和离散系统的分析方法(时域法和变换域法)、系统的状态变量分析法及使用MATLAB对信号与系统的分析。每章都有一定数量的习题,书后给出参考答案。

本书可以作为通信工程、电子信息工程、电气工程及自动化、计算机科学与技术等专业本科生的教材或教学参考书,也可供有关专业师生和科技人员自学参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/王宝祥主编.—3版.—北京:电子工业出版社,2010.1

(电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程)

ISBN 978-7-121-09902-1

I. 信… II. 王… III. 信号系统-高等学校-教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第210210号

责任编辑:韩同平 特约编辑:李佩乾

印 刷:北京季蜂印刷有限公司

装 订:三河市鹏成印业有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:21 字数:550千字

印 次:2010年1月第1次印刷

印 数:4000册 定价:35.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

第 3 版前言

“信号与系统”是电子信息学科相关专业的一门主要技术基础课,对通信工程、电子信息工程、电气工程及自动化、计算机科学与技术等理工科大学生的知识、能力和综合素质的培养有着重要和深刻的影响,在跃升高学位的本科生的知识构成中具有不可替代的作用。

“信号与系统”的特点,首先是理论性比较强,这也是本课程地位和重要性的一个佐证。学生必须认识到这一点,在学习中是不能回避的。只有做到对课程中主要物理概念和数学概念的深刻理解,才能进入课程的自由天地。

目前,本课程国内教材的普遍结构是以系统分析为主线,并在各章中插入有关信号部分的内容。为了加强信号分析和系统分析二者的完整性和系统性,本书将此结构做了改变,把有关信号的内容集中放在前 5 章,而将系统分析内容集中在后面。全书分为两篇共 12 章,其中信号篇内容包括信号分析的基础知识、信号的线性变换(傅里叶变换,拉普拉斯变换和 Z 变换)和信号相关分析原理等;系统篇主要内容是连续系统和离散系统的分析方法,包括时域法和变换域法,DFT 在离散系统分析中的应用,以及系统的状态变量分析法。每章都配有一定数量的习题,并在书后给出了参考答案。

现代科学技术的不断发展和进步,也在一定程度上反映到本课程教与学的各个方面。本教材第 1、2 版在哈尔滨工业大学出版社出版,历经 18 年使用和 11 次印刷。本次第 3 版是在前两版教材使用的基础上,听取同行专家和广大读者的意见修订而成的。具体内容做了如下改动。

(1) 将原第 5 章信号相关分析的内容按时域或频域分别作为第 1 章和第 2 章的相应部分。

(2) 将原第 11 章快速傅里叶变换改为第 5 章,并在内容上做了精简。

(3) 对拉普拉斯变换的终值定理,在叙述上做些变动,并增加了例题。

(4) 为提高教学效率,使学生适应计算机环境,增加了运用 MATLAB 分析信号与系统的一章内容。

(5) 关于第 1 章中讨论的复变函数的正交条件,为简化正文篇幅,将其作为附录,放在书后。

本书可作为通信工程、电子工程、信息处理、电子仪器与测量和卫星工程等专业本科生的教科书。对其他需要开设本课的专业(如计算机、自动控制、机电等),根据其不同深度的要求可以选学书中的某些内容。建议做如下两种内容编排:(1)学习第 1、2、3、4、6、7、8、9、10 章;(2)只学习第 1、2、3、6、7、8 章,不涉及离散信号与系统的内容。

本书由王宝祥主编,参加编写的有张晔、胡航、李绍滨、陈静、贾晓光、李玉萍等。书中有关 MATLAB 部分的前期准备和文字编写均由陈静完成。

本教材此次出版得到学校相关部门同仁的支持和帮助,特向他们表示衷心的感谢。

限于作者水平,书中问题和不妥之处难免,恳请读者给予批评指正。请使用如下电子邮件地址联系。

E-mail: wangbx2002@sina.com

编者
2009年9月

目 录

信号篇——信号分析与变换

第1章 信号分析的理论基础	(2)	习题1	(43)
1.1 引言	(2)	第2章 傅里叶变换	(47)
1.2 信号的分类	(3)	2.1 周期信号的频谱分析——	
1.3 信号的基函数表示法	(5)	傅里叶级数	(47)
1.4 正交函数	(6)	2.1.1 三角形式的傅里叶级数	(47)
1.4.1 正交矢量	(6)	2.1.2 指数傅里叶级数	(49)
1.4.2 正交函数定义	(7)	2.1.3 函数波形的对称性与傅里叶	
1.4.3 正交函数集	(9)	系数的关系	(51)
1.4.4 完备正交函数集	(10)	2.2 典型周期信号的频谱	(53)
1.5 奇异函数	(11)	2.2.1 周期矩形脉冲信号	(53)
1.5.1 单位斜坡函数	(12)	2.2.2 常用周期信号	(55)
1.5.2 单位阶跃函数	(13)	2.3 非周期信号的频谱分析——	
1.5.3 单位冲激函数	(14)	傅里叶变换	(57)
1.5.4 单位冲激偶	(16)	2.4 典型非周期信号的频谱	(59)
1.6 信号的时域分解与变换	(17)	2.5 傅里叶变换的性质	(64)
1.6.1 任意函数表示为阶跃函数		2.6 周期信号的傅里叶变换	(73)
之和	(18)	2.6.1 正弦、余弦信号的傅里叶	
1.6.2 任意函数表示为冲激函数		变换	(73)
之和	(19)	2.6.2 周期信号的傅里叶变换	(73)
1.6.3 信号的时域变换	(20)	2.7 抽样信号的频谱	(75)
1.7 离散时间信号——序列	(21)	2.7.1 抽样信号的频谱	(76)
1.8 信号的卷积	(25)	2.7.2 抽样定理	(77)
1.8.1 卷积的计算	(25)	2.8 已调信号的频谱	(79)
1.8.2 卷积的图解说明	(27)	2.8.1 调幅信号的频谱	(79)
1.8.3 卷积的性质	(28)	2.8.2 调角信号的频谱	(81)
1.8.4 函数 $f(t)$ 与冲激函数或		2.9 信号的能量谱与功率谱	(82)
阶跃函数的卷积	(30)	2.9.1 能谱与功率谱	(82)
1.8.5 卷积积分的数值计算	(34)	2.9.2 互能量和互能谱	(84)
1.9 信号的相关	(36)	2.9.3 自相关函数与能谱和功率谱	
1.9.1 信号的自相关函数	(37)	的关系	(86)
1.9.2 信号的互相关函数	(41)	习题2	(88)
1.9.3 相关与卷积的关系	(42)	第3章 拉普拉斯变换	(93)

3.1 引言	(93)	4.2.3 围线积分法(留数法)	(120)
3.2 拉普拉斯变换定义	(93)	4.3 Z变换的性质	(122)
3.3 拉普拉斯变换的收敛域	(96)	4.4 Z变换与拉普拉斯变换	
3.4 常用函数的拉普拉斯变换	(98)	的关系	(129)
3.5 拉普拉斯反变换	(100)	4.4.1 z平面与s平面的映射关系	(129)
3.5.1 部分分式展开法	(100)	4.4.2 Z变换与拉氏变换的关系	(129)
3.5.2 围线积分法(留数法)	(104)	4.5 信号线性变换小结	(131)
3.6 拉普拉斯变换的基本性质	(105)	习题4	(131)
习题3	(110)	第5章 离散傅里叶变换	(133)
第4章 Z变换	(112)	5.1 离散傅里叶级数(DFS)	(133)
4.1 Z变换及其收敛域	(112)	5.2 离散傅里叶变换(DFT)	(135)
4.1.1 Z变换定义	(112)	5.3 离散傅里叶变换的性质	(137)
4.1.2 Z变换的收敛域	(113)	5.4 离散傅里叶变换与Z变换	
4.1.3 典型序列的Z变换	(115)	的关系	(142)
4.2 Z反变换	(117)	5.5 快速傅里叶变换(FFT)	(144)
4.2.1 幂级数展开法(长除法)	(118)	习题5	(149)
4.2.2 部分分式展开法	(118)		

系统篇——线性系统分析

第6章 连续系统的时域分析	(152)	7.2 无失真传输条件	(175)
6.1 系统概述	(152)	7.3 理想低通滤波器	(177)
6.1.1 系统的概念	(152)	7.3.1 理想低通滤波器的冲激	
6.1.2 系统的分类	(152)	响应	(178)
6.1.3 线性非时变系统的基本		7.3.2 理想低通滤波器的阶跃	
性质	(153)	响应	(179)
6.1.4 系统的分析方法	(154)	习题7	(181)
6.2 微分方程的经典解法	(155)	第8章 连续系统的复频域分析	(183)
6.3 零输入响应	(158)	8.1 拉普拉斯变换分析法	(183)
6.4 冲激响应与阶跃响应	(162)	8.1.1 复频域分析原理	(183)
6.5 零状态响应	(166)	8.1.2 零状态响应	(183)
习题6	(168)	8.1.3 零输入响应	(184)
第7章 连续系统的频域分析	(171)	8.1.4 积分微分方程的拉普拉斯	
7.1 傅里叶变换分析法	(171)	变换解法	(188)
7.1.1 频域分析原理	(171)	8.2 系统函数的表示法	(189)
7.1.2 非周期信号激励下系统		8.3 极点零点分布与时域	
响应	(172)	响应特性	(192)
7.1.3 周期信号激励下系统的		8.4 极点零点分布与系统	
响应	(174)	频率特性	(194)

8.5	波特图	(197)	11.4	离散系统状态方程的 解法	(261)
8.6	线性系统的模拟	(201)	11.4.1	矢量差分方程的解法	(261)
8.7	信号流程图	(204)	11.4.2	A^n 的计算	(261)
	习题 8	(208)	11.4.3	状态方程的 Z 变换解法	(263)
第 9 章	离散系统的时域分析	(212)	11.5	系统的可控性和可观性	(266)
9.1	引言	(212)	11.5.1	系统的可控性	(266)
9.2	离散系统的描述和模拟	(212)	11.5.2	系统的可观性	(268)
9.2.1	离散系统的描述—— 差分方程	(212)		习题 11	(270)
9.2.2	离散时间系统的模拟	(215)	第 12 章	运用 MATLAB 分析	
9.3	差分方程的经典解法	(218)		信号与系统	(273)
9.4	零输入响应和零状态响应	(221)	12.1	MATLAB 简介	(273)
9.4.1	零输入响应	(221)	12.2	运用 MATLAB 显示和分析 信号波形	(276)
9.4.2	零状态响应	(223)	12.2.1	用 MATLAB 编程获取信号 和显示信号波形	(276)
	习题 9	(227)	12.2.2	用 MATLAB 工具箱函数 获取信号	(281)
第 10 章	离散系统的 Z 域分析	(230)	12.2.3	利用 MATLAB 图形界面工具 (SPTool)生成信号和观察信号 波形	(283)
10.1	离散系统的 Z 变换 分析法	(230)	12.3	运用 MATLAB 显示和分析 信号的频谱	(285)
10.1.1	零输入响应	(230)	12.4	运用 MATLAB 求解和分析 线性时不变系统	(294)
10.1.2	零状态响应	(231)	12.4.1	求解和分析由单输入-单输出法 描述的线性时不变系统	(294)
10.1.3	全响应	(232)	12.4.2	求解和分析由状态变量法描述的 线性时不变系统	(301)
10.2	离散系统的系统函数	(234)		习题 12	(303)
10.3	离散系统的频率响应	(237)	附录 A	常用周期信号的傅里叶 级数表	(304)
10.3.1	序列的傅里叶变换	(237)	附录 B	常用信号的傅里叶变换表	(305)
10.3.2	频率响应特性	(237)	B.1	功率信号的傅里叶变换	(305)
10.3.3	频率特性的几何表示法	(238)	B.2	能量信号的傅里叶变换	(307)
	习题 10	(240)	附录 C	常用数学表	(308)
第 11 章	系统的状态变量分析法	(242)	附录 D	复函数的正交条件	(311)
11.1	引言	(242)		习题答案	(313)
11.2	状态方程的建立	(243)		参考文献	(326)
11.2.1	连续系统状态方程的建立	(243)			
11.2.2	离散系统状态方程的建立	(248)			
11.3	连续系统状态方程的 解法	(251)			
11.3.1	矩阵指数函数 e^{At}	(251)			
11.3.2	矢量微分方程的解法	(253)			
11.3.3	矩阵指数 e^{At} 的计算	(254)			
11.3.4	状态方程的拉普拉斯解法	(257)			

第 1 章 信号分析的理论基础

1.1 引言

社会生活中,人们总要不断地以某种方式发出消息和接收消息,即传递和交换消息。实现人类社会职能乃至维持人本身的生存,都必须不停地进行各种消息的传递和交换。例如,我国古代利用烽火台的火光传送敌人入侵的警报;古希腊人以火炬的位置表示不同的字母符号;人们还曾利用击鼓鸣金的音响传达战斗命令等。人们将欲传送的消息变为光和声的形式,即形成了光信号和声信号。在当时,信号的形式和内容以及传递信号的方式都是很简单的,因此要实现信号的传送,无论在距离、速度及可靠性等方面都受到很大限制。

19 世纪以后,人们开始利用电信号传递消息。1837 年,莫尔斯(F. B. Morse)发明了有线电报,将欲传送的字母和数字经编码后变成电信号进行传送。1876 年,贝尔(A. G. Bell)发明了电话,直接将声音转变为电信号沿导线传送。在 19 世纪,人们致力研究电信号的无线传输也有突破。1865 年,英国的麦克斯韦(Maxwell)总结了前人的科学技术成果,提出了电磁波学说。1887 年,德国的赫兹(H. Hertz)通过实验证实了麦克斯韦的学说,为无线电电子学的发展奠定了理论基础。1895 年,俄国的波波夫(A. C. Попов)、意大利的马可尼(实现了利用电磁波传送信号的美好理想。此后,传送电信号的通信方式得到迅速发展,无线广播、超短波通信、广播电视、雷达、无线电导航等相继出现,并且已经应用到工农业生产、国民经济管理、国防及人们日常生活的各个方面。

无线电电子学的发展和应用,归根结底是要解决一个信号传输问题,也就是要建立一个输送信号的装置,即所谓信号传输系统。电报、电话、电视、雷达、导航等都是一种信号传输系统。例如,一个电视系统,要传送的消息是一些配有声音的画面,在传输时,首先要利用电视摄像机把画面转换成图像信号,并利用话筒把声音变成伴音信号,这就是待传送的全电视信号。由于这种信号的振荡频率太低,很难直接在天线上激励起电磁波,因此利用电视发射机把全电视信号变换为频率更高的信号,通过天线将这种高频信号转换为电磁波发射出去,电磁波在空间传播。在收信点,电视接收天线截获到电磁波的一小部分能量并将其转变成为微弱的高频电信号,送入电视接收机。电视接收机将高频信号的频率降低,变为全电视信号,再分解为图像信号和伴音信号,并分别送到显像管和喇叭,于是就能收看到配有伴音的画面,从而得到了发送端的消息。这个过程可以用方框图表示出来,如图 1.1-1 所示。



图 1.1-1 一般通信系统的组成

现在对上图中的一些名词稍做解释。

消息 待传送的一种以收、发双方事先约定的方式组成的符号,例如语言、文字、图形、电码等。

信号 按照习惯,人们将用于描述和记录消息的任何物理状态随时间变化的过程叫做信号。这里是指电信号。由于消息一般不便直接传输,故需把消息转换成相应变化的电压或电流,即电信号。由此可见,信号是消息的一种表现形式,而消息是信号的具体内容。

除了消息和信号之外,人们还常用到“信息”一词。所谓信息是指包含在消息中的有效成分。在本书中,我们不讨论有关信息的问题。

转换器 把消息转换为电信号,或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像管、显像管、话筒和喇叭等。由于这些装置具有将一种形式的能量转换为另一种形式能量的功能,所以也常称其为换能器。

信道 信号传输的通道。它可以是双导线、同轴电缆、波导和光纤,也可以是空间和人造卫星。有时发射机和接收机也可以看成是信道的通道。

由上述可知,通信系统的工作主要包括三个方面:消息与信号之间的转换,信号的处理和信号的传输。可见,通信系统是以信号为核心进行工作的。为了保证信号以尽可能小的失真进行传输及得到满意的处理,作为无线电技术工作者应首先认真研究信号的特性。

1.2 信号的分类

信号是通信系统中所传输的主体,而系统中所包含的各种电路、设备只是实现这种传输的手段。

信号是运载消息的载体,其最常见的表现形式是随时间变化的电压或电流,因此描述信号的常用方法是写出它的数学表达式,也可以绘图表示。由于信号表现为以时间为自变量的函数,故在本书中常常交替地使用“信号”与“函数”这两个名词而不加区别。然而,严格说来函数可以是多值的,而信号却是单值的。

对于各种信号,可以从不同的角度进行分类。

1. 确定信号与随机信号

当信号是一确定的时间函数时,给定某一时间值,就可以确定出一相应的函数值,这样的信号是确定信号或称规则信号。但是,实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性,这种信号是随机信号或称不确定信号。严格说来,在自然界中确定信号是不存在的。因为在信号传输过程中,不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响,这些干扰和噪声都具有随机特性。对于随机信号不能表示为确切的时间函数,对它的研究只能使用统计无线电方法。

2. 周期信号与非周期信号

在确定信号中又可分为周期信号和非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔无始无终地重复着某一变化规律的信号,其表达式可以写为

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2-1)$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。非周期信号在时间上不具有周而复始变化的特

性,它不具有周期 T (或者认为周期 T 是趋于无限大的情况)。当然,真正的周期信号实际上是不存在的,所谓周期信号只是指在相当长时间内按某一规律重复变化的信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数自变量取值的连续性和离散性可将信号分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。如果在某一时间间隔内,对于任意时间值(除若干不连续点外)都可给出确定的函数值,则此信号就称为连续信号。例如,图 1.2-1 所示的正弦波和矩形波,都是在 $-\infty < t < \infty$ 时间间隔内的连续信号。只是在图(a)中 $t < 0$ 和图(b)中 $t < 0$ 及 $t > t_0$ 的范围内的信号值均为零,并且图(b)中在 $t = 0$ 和 $t = t_0$ 处存在两个不连续点。连续信号的幅值可以是连续的,即可以取任何实数,如图(a)所示;连续信号的幅值也可以是离散的,即只能取有限个规定的数值,如图(b)所示。对于时间和幅值都连续的信号又称为模拟信号,如图 1.2-1(a)所示。与连续信号相对应的是离散信号。代表离散信号的时间函数,只在某些不连续的规定瞬时给出函数值,在其他时间,函数没有意义。例如,在图 1.2-2(a)中,函数 $f(t_k)$ 只在 $t_k = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 离散时刻分别给出函数值 $1.3, -1.7, 2, 3, 1, 4.1, -2.5, \dots$,此时的函数幅值可取任何实数。离散时间间隔一般都是均匀的,也可以是不均匀的。如果离散信号的幅值是连续的,即幅值可取任何实数(如图(a)),则称为抽样信号。如果离散信号的幅值只能取某些规定的数值(如图(b)),则称为数字信号。

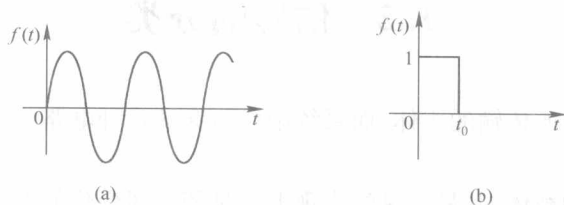


图 1.2-1 连续时间信号

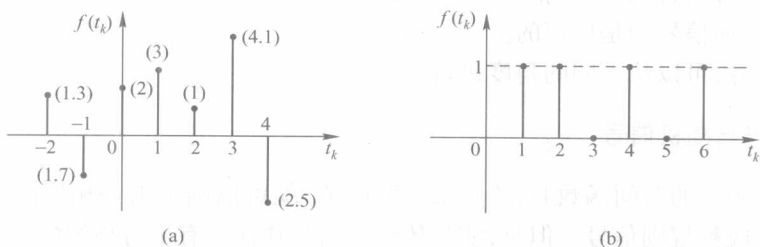


图 1.2-2 离散时间信号

4. 能量信号与功率信号

按照信号的能量特点可以将信号分为能量信号和功率信号。如果在无限大的时间内,信号的能量为有限值而信号平均功率为零,则此信号称为能量信号。对它只能从能量方面去加以考察,而无法从平均功率去考察。如果在无限大的时间内,信号的平均功率为有限值而信号的总能量为无限大,则此信号称为功率信号。对它只能从功率上去加以考察。不难理解,周期信号都是功率信号,有限时间内的信号必为能量信号,而非周期信号可以是能量信号,也可以

是功率信号。

除以上分类方式外,还可将信号分为一维信号与多维信号,调制信号、载波信号与已调波信号,等等。

1.3 信号的基函数表示法

信号是时间的函数,它的最一般的表示方法是借用某个抽象的数学符号,例如 $f(t)$, $x(t)$, $e(t)$ 等加以表示。这种数学表示对于进行任何形式的系统分析是必不可少的。但是,由于这种不定量的抽象表示,没有指明信号在任意瞬间的数值,因此需要使用一种时间的显函数来表示信号,以使在所有瞬间的数值都有准确的定义,如图 1.3-1 所示信号。

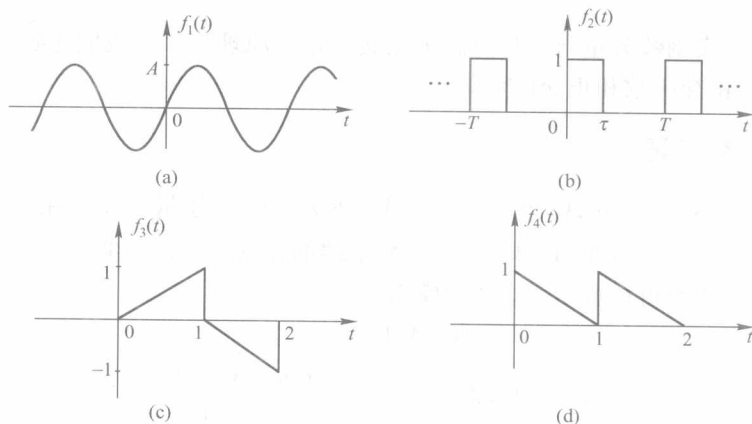


图 1.3-1

图 1.3-1 所示信号可分别用显函数表示为

$$f_1(t) = A \sin t \quad -\infty < t < \infty \quad (1.3-1)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & nT < t < nT + \tau \\ 0 & nT + \tau < t < (n+1)T \end{cases} \quad (1.3-2)$$

$$f_3(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1-t & 1 < t < 2 \end{cases} \quad (1.3-3)$$

$$f_4(t) = \begin{cases} 1-t & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \end{cases} \quad (1.3-4)$$

由上式可见,信号的表示形式各不相同,不利于信号之间的分析和比较。因此需要得到一种表示信号的统一形式。

根据数学实现上的方便、是否易于形象化和具体应用等,已经研究证实:将信号 $f(t)$ 表示为一组基本时间函数的线性组合,在数学上是比较方便的。这些基本时间函数,简称为基函数,通过适当选择的基函数,可以使信号表示法得到统一的最一般的形式。

设所选定的基函数为 $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, \dots , $\Phi_N(t)$,其中 N 可以无限大。任意信号 $f(t)$ 可以表示为这组基函数的线性组合,即

$$f(t) = \sum_n a_n \Phi_n(t) \quad (1.3-5)$$

式中,下标 n 取任意整数,包括正整数和负整数。这样,要表示一个具体的信号,就变成如何选择最佳的基函数集 $\Phi_n(t)$ 和确定相应的系数 a_n 的问题了。

实际使用式(1.3-5)时,总是取有限项数 N ,即要求确定有限个系数 a_n 。因此,对信号的基函数表示法所期望的一个性质是所谓的系数的终结性。这个性质允许我们单独求出任何指定的系数,而不需要知道其他的系数。换句话说,即可以在表达式(1.3-5)中加上更多的项(如果要获得更高的精度),而对前面的系数不必做任何改变。

已经证明,为了得到系数的终结性,在表达式成立的时间区间内要求基函数集 $\Phi_n(t)$ 必须是正交函数集,即函数集内各个函数之间具有正交性。

1.4 正交函数

信号分解为正交函数分量与矢量分解为正交矢量的原理相似。我们先熟悉一下矢量分解的概念,然后引出正交函数和正交函数集。

1.4.1 正交矢量

图 1.4-1 表示两个矢量 A_1 和 A_2 。若 A_1 在 A_2 上的分量为 A_1 在 A_2 上的投影,如图 1.4-1(a) 中的 $C_{12}A_2$ 。这里 A_1 末端与 $C_{12}A_2$ 末端的连线(图中虚线)垂直于 A_2 , C_{12} 是一个标量系数。由矢量代数可得分量 $C_{12}A_2$ 的模为

$$|C_{12}A_2| = C_{12}A_2$$

$$\text{且可见} \quad |C_{12}A_2| = A_1 \cos\theta = \frac{A_1 A_2 \cos\theta}{A_2} = \frac{A_1 \cdot A_2}{A_2}$$

式中, θ 是两矢量之间的夹角, A_1 、 A_2 分别为 A_1 、 A_2 的模。由上两式可得

$$C_{12} = \frac{A_1 \cdot A_2}{A_2^2} = \frac{A_1 \cdot A_2}{A_2 \cdot A_2} \quad (1.4-1)$$

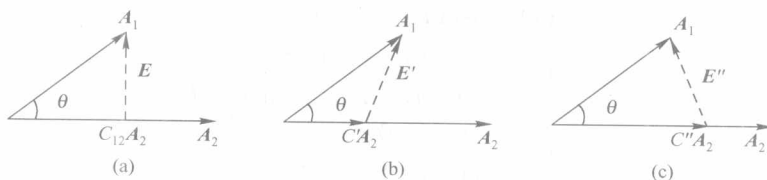


图 1.4-1 一矢量在另一矢量上的投影形式

由图 1.4-1 可见,矢量 A_1 和它的分量 $C_{12}A_2$ 显然是有区别的。如果用 $C_{12}A_2$ 直接表示 A_1 , 则为一个近似表达式,即

$$A_1 \approx C_{12}A_2$$

A_1 和 $C_{12}A_2$ 之间的误差矢量 E 如图 1.4-1(a) 中虚线所示。由图可见,三个矢量之间的关系式为

$$E = A_1 - C_{12}A_2 \quad (1.4-2)$$

式(1.4-2)表明,矢量 A_1 可以分解为两个分量 $C_{12}A_2$ 和 E ,其方向是互相垂直的。除此之外,矢量 A_1 在 A_2 上还存在斜投影 $C'A_2$ 和 $C''A_2$,如图 1.4-1(b)、(c)所示。它们也是矢量 A_1 在

A_2 上的分量,而且这一类的斜投影分量可以有无限多个。但是,如果要求用一矢量的分量去代表原矢量而使误差矢量为最小,则这个分量只能是原矢量的垂直投影。

由图 1.4-1 可见,所有其他情况下的误差矢量 E' 和 E'' 等,都将大于垂直投影时的误差矢量 E 。所以,从一矢量的分量要与其原矢量尽量接近这一要求出发,系数 C_{12} 的选取应使误差矢量最小,即按式(1.4-1)确定的垂直投影情况。以上是从几何图形上直观得出的结论。

若从解析角度考虑 C_{12} 的取值问题,可令误差矢量的平方 $|E|^2 = |A_1 - C_{12}A_2|^2$ 为最小,即令

$$\frac{d}{dC_{12}} |A_1 - C_{12}A_2|^2 = 0$$

由此式也可导出式(1.4-1)的结果。

系数 C_{12} 是在最小平方误差的意义上的,标志着两个矢量 A_1 和 A_2 相互接近的程度。当 A_1 和 A_2 完全重合时, $\theta = 0, C_{12} = 1$ 。随着 θ 增大, C_{12} 减小,当 A_1 和 A_2 互相垂直时, $\theta = 90^\circ, C_{12} = 0$ 。对于最后的这种情况,我们称 A_1 和 A_2 为正交矢量。此时,矢量 A_1 在矢量 A_2 的方向没有分量。

根据上述原理,我们可以将一个平面中的任意矢量 A 在直角坐标系中分解为两个正交矢量的组合,如图 1.4-2 所示,即

$$A = A_x + A_y \quad (1.4-3)$$

这样,平面上的任何一个矢量都可以用一个二维的正交矢量集的分量组合来表示它。

同理,对于一个三维空间中的矢量 A 可以用一个三维的正交矢量集来表示它,如图 1.4-3 所示,即

$$A = A_x + A_y + A_z \quad (1.4-4)$$

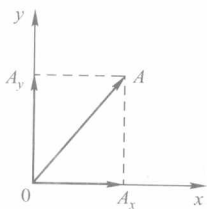


图 1.4-2 二维正交矢量表示

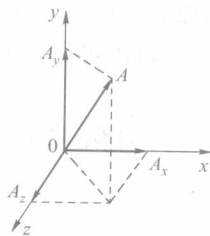


图 1.4-3 三维正交矢量表示

上述概念可以推广到 n 维空间。虽然在现实世界并不存在超过三维的 n 维空间,但是许多物理问题可以借助于这个概念去处理。

1.4.2 正交函数定义

利用与正交矢量类比的方法可以方便地定义出正交函数。

设在一定的时间区间 $(t_1 < t < t_2)$ 内,用函数 $f_1(t)$ 在另一函数 $f_2(t)$ 中的分量 $C_{12}f_2(t)$ 来近似表示 $f_1(t)$,即

$$f_1 \approx C_{12}f_2(t) \quad (t_1 < t < t_2)$$

则有误差函数 $\varepsilon(t)$,且

$$\varepsilon(t) = f_1(t) - C_{12}f_2(t) \quad (1.4-5)$$

式中,系数 C_{12} 的选择应使 $f_1(t)$ 和 $C_{12}f_2(t)$ 达到最佳的近似。这里采用使方均误差(而不是平

均误差)为最小作为“最佳”的标准。方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2 dt \quad (1.4-6)$$

为求得使 $\overline{\varepsilon^2}$ 为最小的 C_{12} 值,应使

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dC_{12}} = 0 \quad (1.4-7)$$

即

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2 dt \right\} = 0$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt + 2C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] = 0$$

上式第一项等于零,于是得

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (1.4-8)$$

式(1.4-8)表明,函数 $f_1(t)$ 有 $f_2(t)$ 的分量,此分量的系数是 C_{12} 。如果 C_{12} 等于零,则表明 $f_1(t)$ 不包含 $f_2(t)$ 的分量,我们称此时 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。

由式(1.4-8)可得两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt = 0 \quad (1.4-9)$$

如果 $C_{12} = 1$,即 $f_1(t) = f_2(t)$,则分量 $C_{12}f_2(t)$ 就是函数 $f_1(t)$ 本身。所以 C_{12} 称为两函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的相关系数。

如果所讨论的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是复变函数,那么有关正交特性的描述略有不同。

若 $f_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可以由 $C_{12}f_2(t)$ 来近似,即

$$f_1(t) \approx C_{12}f_2(t) \quad (1.4-10)$$

则使方均误差幅度为最小的 C_{12} 之最佳值是

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)f_2^*(t) dt} \quad (1.4-11)$$

两复函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内互相正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t) dt = 0 \quad (1.4-12)$$

式中, $f_1^*(t)$ 、 $f_2^*(t)$ 分别是 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的复共轭函数。

有关复函数的相关系数和正交条件的详细讨论请参见本书后附录D。

例 1.4-1 设方波函数 $f(t)$ 如图 1.4-4 所示,试用正弦波 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似表示此函数,并使方均误差最小。

解 方波函数表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

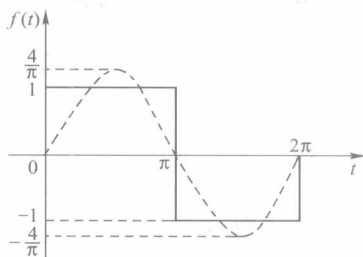


图 1.4-4 例 1.4-1 图

在区间 $(0, 2\pi)$ 内, $f(t)$ 近似表示为

$$f(t) \approx C_{12} \sin t$$

根据式(1.4-8)求系数 C_{12} , 得

$$C_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt \right] = \frac{4}{\pi}$$

所以

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

例 1.4-2 试用正弦函数 $\sin t$, 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似表示余弦函数 $\cos t$ 。

解 根据式(1.4-8), 有

$$C_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} = 0$$

此结果说明余弦信号 $\cos t$ 不包含正弦信号 $\sin t$ 的分量, 或者说余弦函数与正弦函数二者是正交函数。

1.4.3 正交函数集

设 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$, n 个函数构成一个函数集, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足下列正交条件

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt &= 0 \quad i \neq j \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (1.4-13)$$

式中, K_i 为常数, 则称此函数集为正交函数集。当 $K_i = 1$ 时, 则称此函数集为归一化正交函数集或规格化正交函数集。

任意一个函数 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内, 可以用这 n 个正交函数的线性组合来近似地表示, 即

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

显然, 这是信号的基函数表示方法。在使近似式的方均误差最小的情况下, 可分别求得各系数 C_1, C_2, \dots, C_n 。

设方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt$$

令 $\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dC_i} = 0$, 则

$$\frac{d}{dC_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_i} \left[f^2(t) - 2f(t) \left(\sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right) + \left(\sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right)^2 \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-2f(t) g_i(t) + 2 \left(\sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right) g_i(t) \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt = C_i \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt$$