事故树分析与应用

国家机械工业委员会质量安全监督司　编

SHIGUSHU
FENXI YU
YINGYONG

机 械 工 业 出 版 社

前　　言

为开展事故分析预测 推动现代化安全管理工作的需要，我们组织编写了《事故树分析与应用》一书，并于1985年由机械工业出版社出版。两年多来，此书深受广大读者的欢迎，并得到了广大读者的热情鼓励和帮助，在此表示衷心的感谢。由于此书需求量较大，应读者要求，我们这次又出版了重排本，并作了必要的修改。

本书较详细地叙述了事故树分析过程中的理论和方法，对必要的数学理论和知识进行了介绍，对机械工业常见的事故编写了九类四十四种事故树分析范例。

全书共分三篇十九章。第一篇数学基础，第二篇事故树分析，第三篇事故树分析范例。

全书由崔国璋、韩军、周惠丰主编。由冯肇瑞、巩长春审阅。第一篇由韩军编写；第二篇第四章至第七章、第八章 §8-1、 §8-2、 §8-7由崔国璋编写；第八章 §8-3、§8-4、§8-5、§8-6、第九章、第十章由周惠丰编写；第三篇由徐斌、吕荫泉、徐远荣、吴开沛、蒋宗乃、刘占杰、段山虎、柳义保、张惠辛、肖亚平、周惠丰、崔国璋、韩军编写。

本书可作为广大安技人员在研究和应用事故树分析方法时的应用手册，也可作为安技人员的培训教材和大专院校有关专业师生的参考书。

本书在编写和出版过程中曾得到了原机械工业部教编室的大力支持和帮助，同时还得到北京市劳动保护研究所、中国工运学院、上海市机电工业管理局、上海市仪表电讯局、甘肃省机械工业总公司、江西省机械工业厅、武汉市机械工业委员会、石家庄市机械工业公司、上海压缩机厂、上海电机厂、上海汽轮机厂、上海电表厂、南昌柴油机厂、第二汽车制造厂、长城开关厂等单位的大力支持，在此表示感谢。

书中难免有错误之处，敬请批评指正。

编者　　1988.5

目 录

第一篇 数学基础

第二篇 事故树分析

第三篇 事故树分析范例

第一篇 数学基础

第一章 集 合

§1-1 集合的概念

一、集合

通常把满足某种条件或具有某种共同性质的事物的集体称为集合，或简称为集。集合可以是一类事物、一组数字、一群人，或是一类概念。构成一个集合的事物均属于这个集合。把组成集合的各个事物称为这个集合的元或元素。

因为集合是事物的集体，所以，可以把它看作是一个事物。通常用大写字母A，B，C，……表示集合，用小写字母 a，b，c，……表示集合的元素。

集合的数学理论是在19世纪末期才产生的。当时一名德国数学家格奥尔格·康托（Georg Gantor）试图解一个涉及到无限量研究的数学难题，其中包括“整数究竟有多少”，“在一个圆周上包含有多少个点”，“一小时里有多少一刹那的时光度过”，康托解决了以上的问题。这些新的数学理论就称为“集合”。经过不断发展，集合的数学理论已应用到代数、概率等许多数学分支学科中来了。

二、集合的表示方法

当给出一个集合后，就规定了这个集合是由哪 元素组成的。并且，对于任意一个元素，都能判定它是否是这个集合的元素，是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，两者必居其一。

表示一个集合的方法有两种：

第一种是列举法，就是把集合里的所有元素都列举出来的方法。元素是有限个的集合，往往用列举法给出。例如，“1～9的奇数集”，这个集合是由 5 个元素 1、3、5、7、9组成的。通常用括号{ }表示集合元素的组成。所以表示为：

$$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \}$$

第二种是描述法，就是描述集合里元素的共同特征性质。元素是无穷个的集合，往往用描述法给出。其要点是：以 x，y 等作为集的代表元，然后在其后加竖“|”，而在竖“|”之后写出集中的元所具有的特性或者应满足的条件，而后加上括号{ }以表示之。

例如，不等式 $x^2-3x-4>0$ 的解组成的集合：

$$B=\{x\mid x^2-3x-4>0\}$$

即B是由满足不等式 $x^2-3x-4>0$ 的一切x所组成的集合。

一般地，P由具有特征性质$p(x)$ 的元素x所组成的集合，记为：

$$P=\{x\mid p(x)\}$$

无穷个元素组成的集合，虽然不能把它的元素全部列举出来，但可以用省略号来代替，

因此，有时也用列举法给出。比如，自然数集合：

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$$

有限个元素组成的集合，有时只知道元素所具有的特征性质，也采用描述法给出。比如：

$$M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

当方程$x^2-3x+2=0$还没有求出解之前，只好用描述法给出。

集合里若干个相同的元素，只能算作一个，也只用一个符号表示出来。比如，$M=\{1, 1, 1, 2\}$，元素1在集合M中出现三次，但元素1只能算作M的一个元素，通常写成$M=\{1, 2\}$，即集合里的元素是不重复出现的。

在集合的概念里，并不考虑元素的顺序。例如，$P=\{a, b, c\}$与$Q=\{c, a, b\}$，因为这两个集合有着相同的元素，就认为是同一个集合，也称为相等，记作$P=Q$。

三、从属关系

在这里讨论集合与元素之间的关系。任意一个元素，对于一个集合来讲，或者是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，两者必居其一。

如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作：

$$a\in A \quad 或 A\ni a$$

这时读作：a属于A，A包含a，或a被A包含。如果元素a不是集合A的元素，可记作：

$$a\notin A \quad 或 A\not\ni a$$

读作a不属于A，A不包含a，或a不被A包含。

例如，设奇数的集合为A，则

$$1\in A,\ 2\notin A,\ 3\in A,\ \cdots$$

又设实数的集合为R，则

$$-0.5\in R;\ \sqrt{2}\in R,\ 1+2i\notin R$$

四、全集、空集和子集

（一）全集

在研究具有某种共同特征性质的事物所组成的集合时，把具有这种共同特征性质的一切事物所组成的集合，称为全集合，简称全集，用U表示。

除了特别指明以哪一个集合为全集的情况以外，一般说来，全集不是完全确定的。在有理数集合内，讨论它的一些元素组成的集合，有理数集合就是全集。在实数集合内，讨论它的一些元素组成的集合，实数集合就是全集。在集合$M=\{a, b, c, d\}$内，讨论它的一些元素组成的集合，M就是全集。

（二）空集

不包含任何元素的集合，称为空集合。简称空集，用$\varnothing$表示。空集用列举法表示时，记作：

$$\{\ \ \}$$

例如，一次方程$ax+b=0$的解集：

当$a\neq 0$时，只有一个解 $x=-\dfrac{b}{a}$，因此，解集为：

$$\{x \mid ax+b=0\}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

当$a=0$，$b\neq 0$时，无解，因此解集为：

$$\{x \mid ax+b=0\}=\varnothing$$

当$a=0$，$b=0$时，由于x可为任意值，因此，解集为：

$$\{x \mid ax+b=0\}=U$$

（三）子集

设A、B是两个集合，若任一$a\in A$，都有$a\in B$，则称集合A是集合B的子集合，或者说B包含A。记为$B\supseteq A$或$A\subseteq B$，“$\supseteq$”读作“包含”，“$\subseteq$”读作“包含于”。

即：集合A的每一个元素都是集合B的元素，就说A是B的子集合。

一个集合的子集合，简称为子集。

若集合A是集合B的子集，并且A和B不相等，换句话说，A是B的子集，并且在B的元素中，有不是A的元素时，就把A称为B的真子集，即

$$A\subset B\text{且}A\neq B。$$

有时我们要知道一个给定的集能组成多少个子集。例如：集$\{l, m, n\}$能组成多少个子集？

答案如下：

$A=\{l, m, n\}$　$E=\{l\}$

$B=\{l, m\}$　$F=\{m\}$

$C=\{l, n\}$　$G=\{n\}$

$D=\{m, n\}$　$H=\{\ \}$

在集合论里，对于每个子集有多少个元素，当不加以限定时，上面的情况都可能存在。还必须注意：原集本身也是它的一个子集。每个子集的每个元素都是原集的元素。所以，当我们问原集能有多少个子集的时候，空集和原集也必须计算在内。

由一个原集所有的子集组成的集，称为原集的幂集。幂集的概念在概率中常常应用，因为往往能从子集的个数，知道各种可能发生的情况会有多少。

五、集合的图解法

关于集合的一些属性，可以直观地用图形来说明，这种图形称为文氏（Venn）图。

一般用矩形来表示全集合（图1-1）。全集的所有元素，都可以看作是这个矩形线上和矩形内的点。

全集中的一个子集用一个圆来表示，如图1-2所示。

下面给出两个圆之间可能有的关系，也即两集之间可能有的关系：

（一）两圆彼此分离。

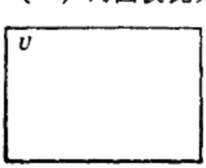


图 1-1

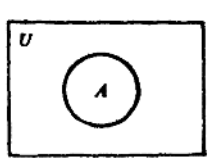


图 1-2

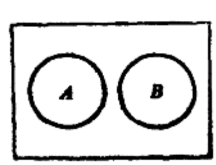


图 1-3

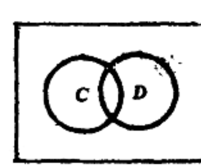


图 1-4

在图1-3里，A和B不相交，即集A与集B彼此独立分离，没有共同的元素。这时，我们说集A与集B分离，或者说是不相交的。

（二）两圆相交

在图1-4里，我们称集C与集D相交。两个集相交说明这两个集具有某些共同的元素。

（三）两个圆完全重合

图 1-5 说明这两个圆所表示的两个集具有完全相同的元素。即这两个集是相等的，也即$X=Y$。

（四）一个圆在另一圆之内

图1-6说明集S所有的元素同时也是集R的元素，换句话说，S是R的子集，即$S\subseteq R$。

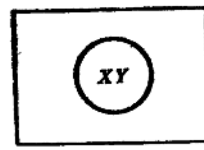


图 1-5

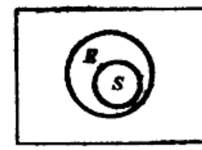
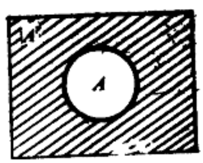


图 1-6

六、补集

上面已讲了两个特殊的集：空集（$\varnothing$）和全集（U）。现在再讲另一个经常用到的重要的集，叫做补集。



题 1-7

对于集合A，从全集U的元素中取出集合A的元素，由剩下的元素所组成的集合，叫做A的补集。可用A'或$\bar{A}$表示。A'读做“A的补集”。

如果用文氏图表示A'，如图1-7的阴影部分。象这样，为了区别全集U与其它集合，多用矩形表示全集。

必须记住：全集U包括A和A'。

§1-2 集合的运算

一、并集

设A、B是两个集合，则属于A或属于B的所有元素所组成的集合S，称为集合A与集合B的并集：，记作：

$$S=A\cup B$$

“$A\cup B$”读作“A并B”。

关于并集的概念，可以用图1-8来说明。

求并集的运算称为并运算。

例如，设$A=\{2, 4, 10, 12\}$，$B=\{3, 6, 9, 12\}$，则$A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12\}$。

在进行并运算时，可以提出这样的一些问题：集A有多少个元素？集B有多少个元素？集$A\cup B$又有多少个元素？是不是把两个集里面的元素的个数相加，就等于并集里面元素的个数？

理解两个集的并集情况，可以利用文氏图画出图中的阴影部分来表示并集。

看下面三个例子：

1）设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，那么，$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，如图1-9a 所示；

2）设$C=\{1, 2, 3\}$，$D=\{4, 5, 6\}$，那么$C\cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，如图1-9b 所示；

3）设$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{1, 2\}$，那么，$X\cup Y=\{1, 2, 3, 4\}$，如图 1-9c 所示，

由并集的定义，可知下列等式成立：

$$A\cup B=B\cup A$$

这称为对于并集的交换律。它正如实数的加法$a+b=b+a$中的“＋”换成了“∪”。还有下列等式也是成立的：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

这称为对于并集的结合律。

结合律的成立，画出文氏图观察是很明显的，如图1-10，不论在图a的 $A\cup B$与C的合并

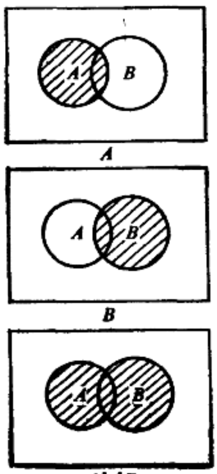


图 1-8

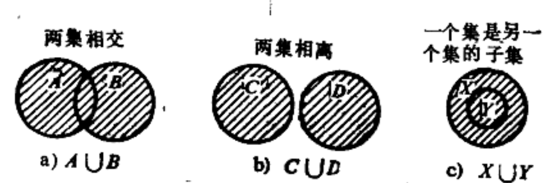


图 1-9

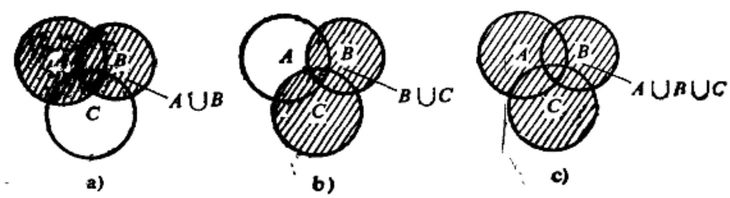


图 1-10

部分，还是在图b的A与$B\cup C$的合并部分，结果都成为图c的阴影部分。于是，表示为$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$。

再由定义可知，下列关系成立：

1) $A\cup A=A$

这称为等幂律。

2) $A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$，$A\cup U=U\cup A=U$

二、交集

设A、B是两个集合，则属于A且属于B的所有元素所组成的集合P，称为A与B的交集，记作：

$$A\cap B$$

“$A\cap B$”读作“A交B”。

求交集的运算，称为交运算。

关于交集的概念，可以用图1-11来说明。

若$A=\{2,\ 6,\ 10,\ 12\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$，则$A\cap B=\{6,\ 12\}$。

应注意的是：“相交的集”与“两集的交”是有所不同的，“相交的集”是指具有公共元素的若干个集，而“两集的交”是指由两个集的公共元素所组成的另一个集。$A\cap B$就是作为另一个集的符号。

交集$A\cap B$能用文氏图中的阴影部分来表示，请看下面的例子：

1) 设$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5\}$，那么$A\cap B=\{3\}$，如图1-12a所示。

2）设$C=\{1, 2, 3\}$，$D=\{4, 5, 6\}$，那么，$C\cap D=\varnothing$，如图1-12b所示。

3）设$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{1, 2\}$，那么，$X\cap Y=\{1, 2\}$，如图1-12c所示。

由交集的定义，可知下列等式成立：

$$A\cap B=B\cap A$$

这称为对于交集的交换律。这正如实数乘法的交换律 ab=ba 中的“×”换成“∩”。

还有下列等式成立：

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

这称为对于交集的结合律，结合律的成立，画出文氏图观察是很明显的。如图1-13，不论在

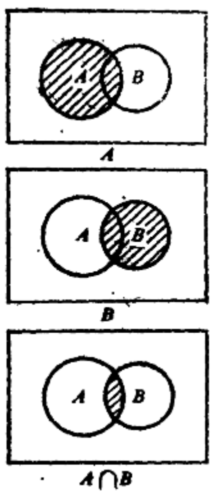
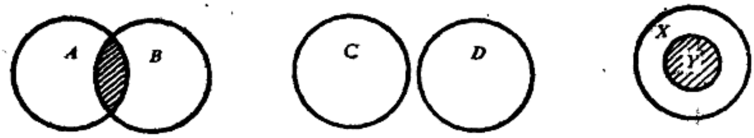
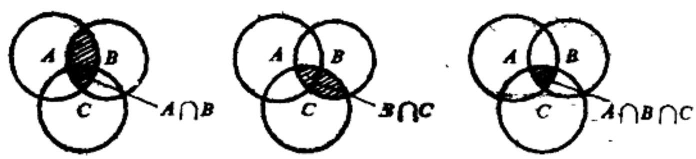


图 1-11



a) $A\cap B$　　b) $C\cap D$　　c) $X\cap Y$

图 1-12



a)　　b)　　c)

图 1-13

图a的$A\cap B$和C的公共部分，还是在图b的A和$B\cap C$的公共部分，结果都成为图c的阴影部分。于是，表示为$(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$

再由定义可知，下列关系成立：

1）$A\cap A=A$

这称为等幂律。

2）$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$

$A\cap U=U\cap A=A$

三、集合的运算

对两个集合A、B，可以实行∩、∪的运算，这同数的计算求积“·”与求和“+”同样，交换律和结合律等也都成立。即

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A \qquad \text{（交换律）}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \qquad \text{（结合律）}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A \qquad \text{（等幂律）}$$

这里，在关于数的计算成立的分配律

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

中，将乘号×换成∩，将加号+换成∪，那么对集合A、B、C，下式为：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

是否成立，我们画出文氏图，讨论如下：

在图1-14a中，先计算 $B\cup C$，再求与 A 的交集。在图 1-14b 中，先求 $A\cap B$，$A\cap C$，再求它们的并集，这两种求法所得结果相同。因此，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$$

这称为交对并的分配律。

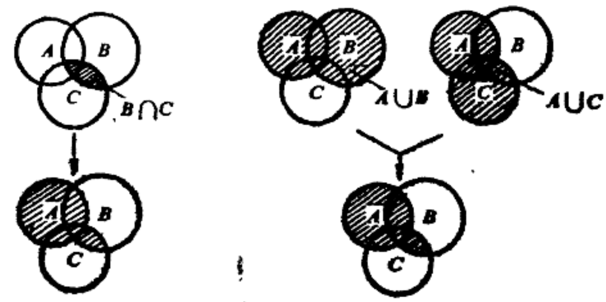
其次，在数的计算的分配律中，把×号与+号对换所得的等式：

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

是不成立的，但是关于集合与之对应的等式：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$$

却是成立的。这称为并对交的分配律，用文氏图（见图 1-15）可以验证。



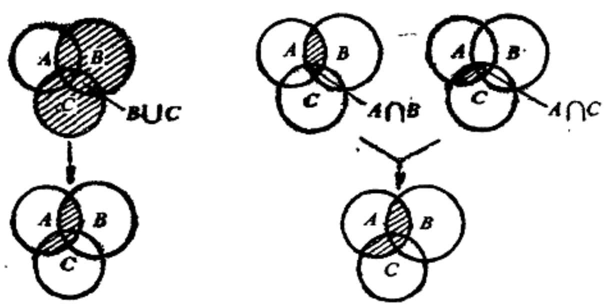
$A\cup(B\cap C)$

a)

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

b)

图 1-14



$A\cap(B\cup C)$

a)

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

b)

图 1-15

上边所得的分配律，将第一式里的 $\cap$ 与 $\cup$ 置换便得第二式，将第二式里的 $\cup$ 与 $\cap$ 置换便得第一式。这种关系的两个等式称为相互对偶。关于集合的等式，成对偶的很多。

又如下列等式也成立，我们把它称为吸收律。

$$A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A$$

（吸收律）

这是因为，若 $P\subset Q$，则 $P\cap Q=P$，$P\cup Q=Q$，因此，根据 $A\subset(A\cup B)$，$(A\cap B)\subset A$，如果用 $P=A$，$Q=A\cup B$，与 $P=A\cap B$，$Q=A$ 分别置换上式中的 P、Q，便可以得出上边的两个等式。这也是相互对偶的。

关于交集、并集的补集，有下列重要等式成立。这就是所谓关于集合的德·摩尔根定律。

(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

这个定律用语言叙述如下：

1）A、B的并的补集等于A、B的补集的交。

2）A、B的交的补集等于A、B的补集的并。

例如，从1～15的自然数中，设2的倍数的集合为A，3的倍数的集合为B。

则由 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

得 $A\cap B=\{6,\ 12\}$

$$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15\}$$

如图1-16所示。

从而$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\ \ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15\}$ (1-1)

$$\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\} \qquad (1\text{-}2)$$

又 $\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

$$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$$

从而

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15\} \qquad (1\text{-}3)$$

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\} \qquad (1\text{-}4)$$

比较式（1-1）和式（1-3），式（1-2）和式（1-4），显然下列等式成立：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

用文氏图也可以验证这个定律是成立的。图1-17a中是由$A\cap B$求$\overline{A\cap B}$；图 1-17b 是由$\overline{A}$、$\overline{B}$求$\overline{A}\cup\overline{B}$，由于所得结果完全相同，因此，

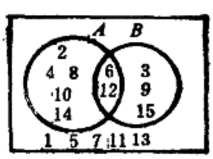
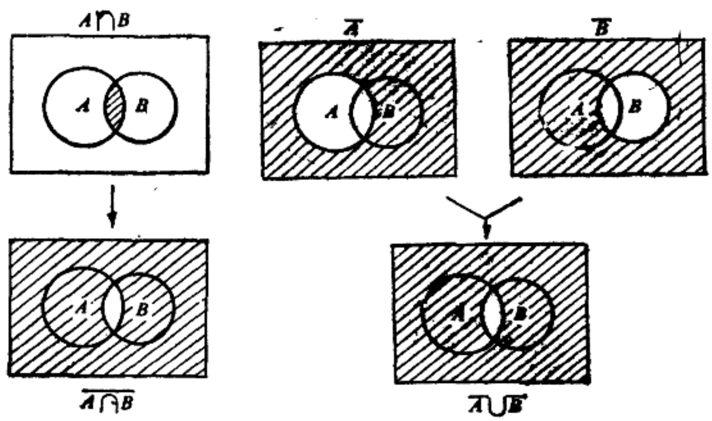


图 1-16



a)　　b)

图 1-17

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

关于$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$也可以由图1-18的文氏图验证。

四、集合的各种运算小结

现将关于集合的各种常用的定律小结如下：

集合主要是研究下列三种运算：

$\cup$（并），$\cap$（交）$^{-}$（补集）。

在这些集合运算之间，有如下的定律：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$

$$A\cap B=B\cap A$$

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

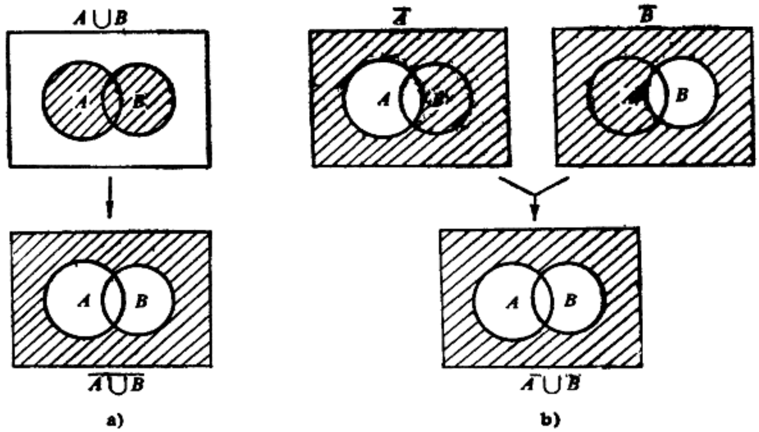


图 1-18

(3) 分配律　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4) 等幂律　　$A\cup A=A$

$A\cap A=A$

(5) 吸收律　　$A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

(6) 补　集　　$A=\overline{\overline{A}}$

(7) 德·摩尔根定律　　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

特别是关于全集U、空集$\varnothing$，下列关系成立：

(8) 交　　$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cap\overline{A}=\varnothing$

(9) 并　　$A\cup U=U$，$A\cup\varnothing=A$

$A\cup\overline{A}=U$

(10) 补集　　$\overline{U}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=U$

对这些关系，$\cap$与$\cup$，U与$\varnothing$，通过置换都相互对偶。

第二章　布尔代数

§2-1　布尔代数的基本理论

一、布尔代数的定义

定义：由元素a，b，c，……组成的集合B称为一个布尔代数，如果在B中定义了两个二元运算＋与·（分别称为加法和乘法），它们具有如下性质：

（1）结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

（2）交换律：

$$a+b=b+a$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$

（3）分配律：

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$
$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$

（4）在B中存在两个元素0与1（分别称为零元素和单位元素），具有如下性质：

$$a+0=0+a=a$$
$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

（5）互补律：对于B中每个元素a，存在一个相应的元素a'，使得：

$$a+a'=1$$
$$a\cdot a'=0$$

应注意以下几点：

1）以上各式中，a、b、c 表示 B 中的任意元素。

2）今后，在不会引起混淆的情况下，可省去乘号和括号（假定运算按补、乘、加的先后次序进行）。例如，和普通代数中一样，可将$a+(b\cdot c')$简记为$a+bc'$。

3）根据结合律，可将（$a+b$）$+c$及$a+$（$b+c$）中的任一个写成$a+b+c$，并将（ab）c及$a(bc)$中的任一个写成abc。这种省略括号的作法还可以推广到任意多个加项或乘项的运算中去。并且，根据交换律，还可以交换式中各项的次序。例如：

$$b+d+a+c=(b+d+a)+c=(a+b+d)+c=(a+b)+(d+c)=(a+b)+(c+d)$$
$$=a+b+c+d$$

4）分配律还可推广为一般的形式：

$$x(y_1+y_2+\cdots+y_n)=xy_1+xy_2+\cdots+xy_n$$
$$x+y_1y_2\cdots y_n=(x+y_1)(x+y_2)\cdots(x+y_n)$$

5）利用交换律和上面的第4点，可得另一种形式的分配律：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)y=x_1y+x_2y+\cdots+x_ny$$

$$x_1x_2\cdots x_n+y=(x_1+y)(x_2+y)\cdots(x_n+y)$$

从以上的定义中可看到，布尔代数中有些运算与普通代数中的加法和乘法的运算律是相同的，例如交换律、结合律、第一分配律。然而与普通代数相比较，布尔代数的另一些运算律则是不同的，例如等幂律、第二分配律。另外，在普通代数中没有与求补相应的运算，因而也就无从考虑互补律、德·摩尔根律和对合律。

虽然布尔代数的运算律和普通代数不尽相同，但它们与集合的运算律却完全一致。下面我们给出如下的定理：

定理：任意集合 E的一切子集所组成的集合对于并、交、补运算构成一布尔代数。空集和全集合分别为它的零元素和单位元素。

这个代数也称为集合代数。

另外，布尔代数的另一种模型是二值代数，这是仅包含两个元素0与1的一个集合，其中加法、乘法和补运算分别由下式定义：

$$0+0=0,\ 1+1=$$

$$0+1=1+0=1$$

$$0\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1$$

$$0\cdot 1=1\cdot 0=0$$

$$0'=1\quad 1'=0$$

二、布尔代数的基本性质

在布尔代数的定义中可以看出，表达各个运算律的等式是成对出现的：如果把+与·互换，0与1互换，则每对等式中的一个就变成另一个。例如，将第一分配律（乘法对加法的分配律）中的+与·互换就得到第二分配律（加法对乘法的分配律），反之亦然。我们称这种对称的性质为加法和乘法的对偶性，并称这种可以互相转换的公式为对偶公式。

由定义中加法与乘法的对偶性可以推出如下一般的对偶原理：在任一个由布尔代数定义中的基本性质所导出的等式中，同时交换+与·及 0 与 1 所得到的式子也可从相应的性质导出。

事实上，要证明交换后所得到的式子，只要在原式的证明中作上述改变就行了。

定理1：零元素是唯一的。

证明：设B中有两个元素0_1与0_2，使得对B中任何元素a，b有：

$$a+0_1=a,\qquad b+0_2=b$$

令$a=0_2$，$b=0_1$，得

$$0_2+0_1=0_2,\qquad 0_1+0_2=0_1$$

由交换律有$0_2+0_1=0_1+0_2$，故$0_1=0_2$，即零元素是唯一的。

定理2：单位元素1是唯一的。

证明与定理1相类似。

定理3：a的补a'是唯一的。

证明：设a有两个补a_1'与a_2'，则

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1'+0 && \text{(由性质4)} \\ &= a_1'+aa' && \text{(互补律)} \\ &= (a_1'+a)(a_1'+a_2') && \text{(分配律)} \end{aligned}$$

$=(a+a_1')(a_1'+a_2')$ （交换律）

$=1\cdot(a_1'+a_2')$ （互补律）

$=(a_1'+a_2')\cdot 1$ （交换律）

$=a_1'+a_2'$ （由性质4）

同理可证：

$$a_2'=a_2'+a_1'$$

于是由交换律即得$a_1'=a_2'$。

定理4：（对合律）：对于B中的每个元素a有：

$$(a')'=a$$

证明：根据a的补的定义有：

$$a+a'=1,\ aa'=0$$

由交换律有：

$$a'+a=1,\ a'a=0$$

于是由定理3，a为a'的补元，即

$$(a')'=a$$

定理5：零元素与单位元素是互补的，即

$$0'=1,\ 1'=0$$

证明：$0+0'=1$ （互补律）

$0+0'=0'$ （由性质4）

由此有$0'=1$，再两边取补，由对合律即可得$1'=0$。

定理6：（加法等幂律）：对于B中每个元素a，有：

$$a+a=a$$

证明：$a+a=(a+a)\cdot 1$ （由性质4）

$=(a+a)(a+a')$ （由互补律）

$=a+aa'$ （由分配律）

$=a+0$ （由互补律）

$=a$ （由性质4）

定理7：（乘法等幂律）：对于B中每个元素a有：

$$aa=a$$

证明：由定理6及对偶原理即得。

定理8：对于B中每个元素a有

$$a+1=1$$

证明：$a+1=(a+1)\cdot 1$ （由性质 4）

$=(a+1)(a+a')$ （由互补律）

$=a+1a'$ （由分配律）

$=a+a'$ （由性质 4）

$=1$ （由互补律）

定理9：对于B中每个元素a有：

$$a0=0$$