

信息与通信工程研究生系列教材



信息与通信工程中的随机过程

(第三版)

陈 明 / 编著



科学出版社
www.sciencep.com

信息与通信工程研究生系列教材

信息与通信工程中的随机过程

(第三版)

陈 明 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书在注重概念的数学严密性和知识体系的逻辑性基础上,结合大量信息与通信工程中的问题和范例,深入浅出地介绍了信息与通信工程领域所必需的随机数学基础。内容包括:随机现象的数学建模,各种随机对象,随机数学分析,随机信号与线性系统,信号的统计推断,Markov 链,随机对象的计算机模拟等。

本书可作为高等院校信息与通信工程一级学科下各专业的研究生、高年级本科生教材,也可作为信息与通信工程领域的科研人员及工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信息与通信工程中的随机过程/陈明编著. — 3 版. — 北京: 科学出版社, 2009

(信息与通信工程研究生系列教材)

ISBN 978-7-03-025272-2

I. 信… II. 陈… III. ① 信息技术-随机过程-研究生-教材 ② 通信工程-随机过程-研究生-教材 IV. G202 TN911.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 144119 号

责任编辑: 匡 敏 余 江/责任校对: 陈玉凤

责任印制: 张克忠/封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月东南大学出版社第一版

2005 年 9 月第 二 版 开本: 787×1092 1/16

2009 年 8 月第 三 版 印张: 20 3/4

2009 年 8 月第三次印刷 字数: 459 000

印数: 7 501—11 000

定价: 37.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第三版前言

本书第三版较之第二版在以下四个方面作了修改和完善:

(1) 在章节安排和内容取舍方面做了进一步完善。具体来说:

① 将原来第1章(绪论)中的“随机现象及其数学建模方法”与原来第2章中的“概率空间”部分合并为现在的第1章(随机现象的数学建模),将原来第1章中的“信息与通信工程中的随机对象”部分的关键内容,用例题的形式分散到第1、2章中去。这样的改动,可以使得本书内容在条理上更加清晰。

② 将原来的第7章(排队论初步)分别合并到第6章(Markov链)的连续时间 Markov 链和嵌入 Markov 链中去。这样的合并可以避免读者过分看重“排队论”应用层面的知识,而忽略对连续时间 Markov 链概念的理解和重视。

③ 删除了原来第5章(信号的统计推断)滤波部分的 Kalman 滤波的内容。一方面,限于篇幅无法对 Kalman 滤波的内容进行详细介绍;另一方面,过于庞杂的内容有时反而会使学生产生畏惧心理。所以,去除了这部分内容,将其作为研究型习题,学有余力的学生可以通过课外阅读了解这方面的内容。

④ 其他章节,除了个别地方做了次序上的微小调整之外,基本上保持不动。

(2) 丰富了例题的选用。特别是第2章,补充了很多在信息与通信工程的应用中常见的随机对象。

(3) 对一些内容的阐述进行了进一步完善。对一些比较难以理解的内容,在阐述的方式上进行了改进。这样做能使读者更加容易地理解书本的内容。

(4) 增加了概念型习题。数学是一门语言,如果对一些基本概念的内涵缺少足够的思维,则很难真正掌握书本的内容。为了帮助读者真正掌握书本中的基本概念,在每章的后面添加了概念型习题。读者在学完本章内容后,应当首先对概念型习题进行仔细思考,在此基础上再挑选部分练习型习题和研究型习题来完成。

调整之后的全书逻辑结构如图1所示。

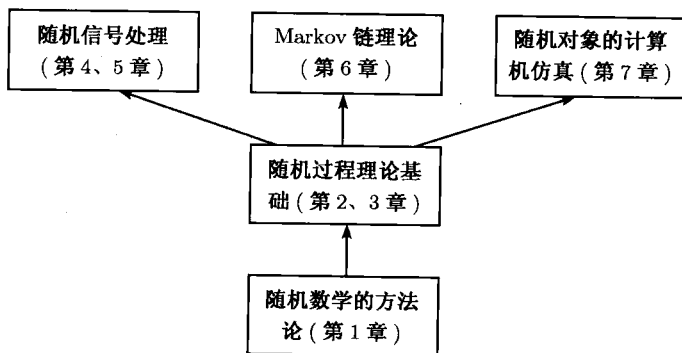


图1 全书知识的逻辑结构及在信息与通信工程中的应用背景

此次再版，研究生顾旻昊、张达亮、任参军、薛新华、王琛琛、钱耘之等在文字录入方面给予了帮助，并提出了一些修改意见，在此表示感谢。

此外，还要感谢科学出版社余江编辑对于本书出版所付出的所有努力。

虽经多次修改，但由于笔者工作繁忙，时间仓促，书中难免存在不少疏漏和错误之处，恳请读者不吝斧正。任何对本书的指正和建议，可以发送到如下电子邮箱：
chenming@seu.edu.cn，笔者深表感谢！

陈 明

2009年5月于南京

第二版前言

在被称为信息时代的今天,信息与通信技术的发展日新月异。人们所处理的信息种类越来越多,处理手段日益更新,所处理的信息量也越来越大。此外,传输信息的系统——通信系统也不断地更新换代,系统容量越来越大,信息传输速率越来越高,传输的信息种类也越来越丰富。通信技术的发展,正朝着任何人在任何时间和任何地点实现与任何人进行任何种类的信息交换这一“个人通信”的最高目标迈进。

众所周知,信息与通信技术的发展首先依赖于信息与通信理论不断发展。由于信息与通信工程的研究对象涉及大量随机现象,所以用以描述随机现象的概率论、随机过程、数理统计等随机数学理论成了必不可少的理论工具。因此,对于从事这一领域科学研究的人来说,掌握足够的随机数学理论是进行科研的前提条件。

从 1996 年秋季开始,笔者为东南大学无线电工程系信息与通信工程学科的硕士研究生开设了学位基础课程“随机过程”。这门课的教学目的是使研究生掌握信息与通信领域的科研所必需的随机过程基础理论,为后续课程的学习和将来的科研奠定随机数学的理论基础。

在教学过程中,笔者发现国内关于随机过程方面的教材虽然不下数十种,但在内容的选择上各有所重、深浅不一,缺乏针对信息与通信工程这一学科的专门教材。这些教材有些是针对其他具体学科编写的,有些是针对多学科编写的,因而在内容的选择上,有些在信息与通信工程领域中不常用的知识也占据了很大的篇幅,有些知识为信息与通信工程领域所必需,但却没有提及。

事实上,信息与通信工程领域所需要的随机过程基础理论知识具有鲜明的学科特点。即便在这一学科内部,随着信息与通信技术的发展,所需的科研预备知识的侧重点也发生了一些深刻的变化。例如,信息数字化的发展趋势,使得离散时间随机信号的处理更为常见,关于连续时间随机信号的一些复杂处理已经变得不太常用;网络技术的发展,使得 Markov 链及排队论的知识显得日益重要;计算机仿真成了信息与通信工程领域的重要实验手段之一,这使得随机变量、随机过程的计算机模拟成为必要。

所以,需要针对信息与通信工程学科的知识特点和发展趋势,既照顾知识体系的完整性,又考虑到实际的学科应用背景,对内容进行取舍,并将随机数学的基础理论和信息与通信工程学科的应用实例进行恰当关联,编写一本适用于信息与通信工程学科的《随机过程》研究生教材。这样,可以使得硕士研究生在学业繁重的就读期间,具有针对性地掌握信息与通信工程领域所必需的随机数学预备知识,为将来后续课程的学习及科研奠定理论基础。

本书正是基于上述背景和出发点编写而成的。在内容的选择上,参考了国内外各种随机过程教材的内容,并结合信息与通信工程的学科特点,根据笔者在东南大学移动通信国家重点实验室从事信息与通信工程领域的科研经验,选择了一些该领域最重要的随

机过程基础理论知识作为本书的内容。

具体来说, 本书的内容按知识的逻辑结构 and 应用背景可以分为以下几个部分(见图 1):

- 随机数学的方法论(第 1 章)。
- 概率论和随机过程的基本概念和基础理论(第 2、3 章)。
- 随机信号处理(第 4、5 章)。
- 应用于系统分析和网络流量分析的 Markov 链和排队论(第 6、7 章)。
- 随机对象的计算机仿真(第 8 章)。

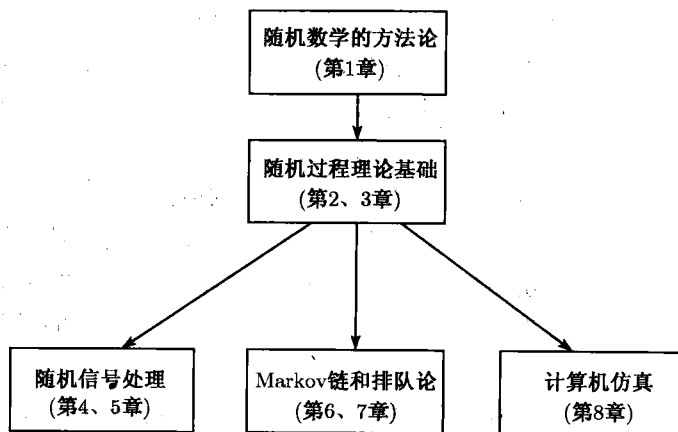


图 1 全书知识的逻辑结构及在信息与通信工程中的应用背景

在本书的编写中, 假设读者具有如下预备知识: 高等数学中的微积分、常微分方程、线性代数以及信号与系统的初步知识。此外, 本书还需要一些泛函分析的基础性概念和广义函数及其导数的概念, 这些预备知识已经在附录 A 中给出。

第 1 章介绍了随机现象形成的原因及其数学建模的基本思想, 旨在从科学方法论的角度, 阐明随机现象的数学建模方法所体现的科学思想。本章还介绍了信息与通信工程中常见的随机对象, 旨在阐明随机对象是信息与通信工程领域的常见研究对象。本章内容是全书的纲领, 揭示的是随机数学理论中所蕴涵的科学思想, 是非常重要的部分, 授课教师要花一定时间讲透。

第 2、3 章是全书的理论基础, 这两章内容是以介绍基本的随机数学概念和理论为主线, 同时穿插了大量信息与通信工程领域的应用范例。这两章的基本随机数学概念包括概率空间、随机变量、随机向量、随机过程、随机对象的函数、随机序列的收敛、随机过程的微积分、随机过程的正交分解、随机过程的线性变换及随机过程的遍历性等。

第 2 章详细介绍了概率空间和随机对象的概念。概率空间和随机对象是对随机现象的两种基本建模方法, 该章在介绍概率空间的基础上, 尝试从一个统一的框架介绍三类最本质的随机对象, 即随机变量、随机向量、随机过程。事实上, 这三类随机对象只是样本空间维数的不同, 它们的样本空间分别是 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{R}^n$ 、 $\mathbb{R}^\infty$ 。这样一个框架很好地揭示了随机变量、随机向量、随机过程这三类随机对象之间的联系和差别。从这个框架, 读者

可以很清楚地看到,随机过程实际上是无穷维的随机向量,是随机向量概念的一个推广;此外,有限维的随机变量和随机向量是描述随机过程的必备基础。

值得一提的是,“随机对象”概念的引进以及从“无穷维随机向量”的角度引进随机过程的概念,是本书的两个重要尝试,是笔者在教学过程中摸索出来的介绍随机变量、随机向量、随机过程这三个核心概念的一种直观的、易于理解的方法。这种方法,使得这三个概念牢牢地捆绑在一起,既起到了巩固概率论基础知识的作用,也起到了引进随机过程概念的作用。

该章还介绍了描述这些随机对象的指标,如各种概率函数和数字特征等。该章随机过程部分,还介绍了各种常见的随机过程,如正态随机过程、和过程、Wiener 过程、Poisson 及其导出过程、更新过程等。通过第 2 章的学习,读者可以迅速具备概率论的预备知识,并达到对随机过程概念的深刻理解。

第 3 章在介绍随机对象函数的基础上,介绍了随机变量序列的各种收敛性;在均方收敛的基础上,介绍了均方微积分、二阶矩过程的正交分解、遍历性等概念。这些内容在数学领域内属于“数学分析”的范畴,由于分析的对象是随机对象,所以称之为“随机数学分析”。这一章内容是后续章节内容的理论基础。

第 4、5 章以信息与通信工程中的“随机信号处理”为应用背景,介绍了随机信号的功率谱密度及带宽、随机信号通过线性系统和信号的统计推断这几个方面的基础理论知识。

第 4 章介绍了随机信号的功率谱密度和带宽的概念;在此基础上介绍了随机信号通过线性系统的二阶统计特性和概率特性;此外,还介绍带限和带通信号的一些常见性质。

第 5 章介绍了信号的统计推断,包括信号检测、参数估计和信号的波形估计(滤波)。在检测问题中,介绍了常见的各种检测准则,如 Bayes 准则、最小化最大风险准则、最大似然准则、最小错误概率准则等;在参数估计中,也介绍了各种估计准则,如 Bayes 准则、最小化最大风险准则、最大似然准则、线性最小均方误差准则和最小二乘准则等;在滤波问题中,介绍了匹配滤波、白化滤波、Wiener 滤波和 Kalman 滤波。

第 6、7 章以信息与通信工程中的“系统分析和网络流量分析”为应用背景,介绍了 Markov 链及其排队论方面的基础理论知识。

第 6 章在介绍 Markov 过程的基础上,分别介绍了离散时间 Markov 链的状态方程、状态分类、应用举例,以及连续时间 Markov 链的状态停留时间、状态微分方程和应用举例等,嵌入 Markov 链概念的引进,使得可以用离散时间 Markov 链来分析连续时间 Markov 链的极限性质。

第 7 章排队论初步,实际上是第 6 章 Markov 链的理论应用举例,在介绍排队系统基本要素和 Little 定理的基础上,介绍了 M/M 型、M/G/1 和 G/M/1 排队系统。M/M 型排队系统可以用一种特殊的连续时间 Markov 链——生灭过程来建模, M/G/1 和 G/M/1 排队系统可以用嵌入 Markov 链来进行分析。一个排队系统,不仅要对待顾客数、系统顾客数等顾客参量的分布进行分析,还要对等待时间、系统时间、忙期、闲期等时间参量的分布进行分析。

第 8 章以信息与通信工程中的仿真实验为应用背景,介绍了随机过程的计算机模拟

方法,也即在计算机仿真实验中,如何生成一个具有指定概率分布或其他统计特性的随机对象。

借助于多媒体的教学手段,本书的内容基本上可以在 60 学时内讲授完毕。建议在使用本书作为教材时,注重基本概念的讲解,让学生对基本概念产生确定的理解,而将大部分非概念性的例子主要交给学生自学,来达到巩固基本概念的目的。“概念是灵魂”,如果学生理解了概念就基本上掌握了这些知识所蕴涵的思想方法,将来在科研中用随机数学的方法对所遇到的问题建立恰当的数学模型就没有困难。否则,对概念一知半解,只会解一些习题,终究是“影像学习”,根本无法将科研中遇到的实际问题用随机数学的“语言”进行描述,并建立数学模型。

为了激发学生的学习兴趣,本书每章最后给出了一些研究型习题,可以培养学生良好的分析问题、解决问题的能力。

本书的第一版曾于 2001 年 8 月在东南大学出版社出版。此次第二版,虽然知识要点和第一版大致相同,但对各知识要点的内容进行了较大的补充,例题的选用和概念的描述上也做了较大的完善。此外,还对这些知识要点的章节安排做了较大的改动,使得这些知识要点按照一个更加合理清晰的框架呈现在读者面前。

感谢芬兰 NOKIA 公司为本书的出版提供了资助,感谢芬兰 NOKIA 公司的高级研究员 Jorma Lilleberg 和王海峰研究员使得该项资助成为可能,他们也为本书的编写提供了很好的参考资料。

感谢东南大学移动通信国家重点实验室的程时昕教授、尤肖虎教授、赵春明教授、高西奇教授、曹秀英教授、沈连丰教授、毕光国教授和所有同事、研究生,整个移动通信国家重点实验室不畏劳苦、勇于开拓、互帮互助、团结奋进的精神给了我工作的乐趣和动力。在移动通信国家重点实验室即将成为通信技术国家实验室之际,衷心地祝愿这个团结向上、充满朝气与活力的研究团队在未来的岁月里创造更多的辉煌,为祖国通信事业的发展贡献一份光和热!

感谢东南大学无线电工程系历届学习该课程的硕士研究生,他们对本书提出了许多宝贵的建议;感谢研究生商秋帮助校对了本书的全部草稿;感谢科学出版社高教分社的匡敏女士为本书再版付出的所有努力。

本书虽经多次修改,但由于笔者工作繁忙,时间仓促,书中难免存在不少疏漏和错误之处,恳请读者不吝斧正。任何对本书的指正和建议,可以发送到电子邮箱:chenming@seu.edu.cn,笔者深表感谢!

愿本书能够成为读者掌握信息与通信领域随机数学基础知识的桥梁!

陈 明

2005 年 6 月于南京

本书常用数学记号

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	实数集, n 维实数空间(n 维欧氏空间)
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$	整数集, 正整数集, 负整数集
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$	有理数集, 正有理数集, 负有理数集
$\mathbb{T}$	连续或离散时间随机过程的时间指标集
j	虚数单位, $j^2 = -1$
π	圆周率
e	自然对数的底
$S_X, S_{\mathbf{X}}$	随机变量 X 或者随机向量 $\mathbf{X}$ 的样本空间
$A, B, C, X, Y, Z, \dots$	随机变量
$a, b, c, x, y, z, \dots$	一维变量
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$	随机向量
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$	多维向量
$X(t), Y(t), \dots$	连续时间随机过程
$x(t), y(t), \dots$	连续时间函数
$X[n], Y[n], \dots$	离散时间随机过程
$x(n), y(n), \dots$ 或 $x_n, y_n, \dots$	离散时间函数、数列
$P(x), P(\mathbf{x})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率质量函数
$f_X(x), f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数
$F_X(x), F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率分布函数
$G_X(z), G_{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率生成函数
$\Phi_X(\omega), \Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率特征函数
$P_{X Y}(x y), f_{X Y}(x y), F_{X Y}(x y)$	条件概率质量(密度、分布)函数
$E\{X\}$	随机变量 X 的期望
m_X, ψ_X^2	随机变量 X 的均值、均方
$\sigma_X^2, \text{var}\{X\}$	随机变量 X 的方差
R_{XY}, C_{XY}	随机变量 X 和 Y 的相关矩、协方差
$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}, \mathbf{C}_{\mathbf{X}}$	随机向量 $\mathbf{X}$ 的相关矩阵、协方差矩阵
$\mathbf{R}_{\mathbf{XY}}, \mathbf{C}_{\mathbf{XY}}$	随机向量 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的互相关矩阵、互协方差矩阵
$H(X), H(\mathbf{X})$	随机变量 X 和随机向量 $\mathbf{X}$ 的熵
$m_X(t), \psi_X^2(t), \sigma_X^2(t)$	随机过程 X 的均值函数、均方函数和方差函数
$R_X(t_1, t_2), R_X[n_1, n_2]$	随机过程 X 的自相关函数
$R_X(\tau), R_X[n]$	宽平稳随机过程 X 的自相关函数

$C_X(\tau), C_X[n]$	宽平稳随机过程 X 的自协方差函数
$S_X(f)$	随机过程 X 的功率谱密度
$f(x) * g(x)$	连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积
$f[n] * g[n]$	离散函数 $f[n]$ 和 $g[n]$ 的卷积
Z^*	复数 Z 的共轭
$\mathbf{A}^\dagger$	矩阵或者向量 $\mathbf{A}$ 的共轭转置
$\mathbf{A}^\mathrm{T}$	矩阵或向量 $\mathbf{A}$ 的转置
$\bar{A}$	集合 A 的补集
ms lim	均方极限
$\forall$	表示“对于所有的……”

目 录

第三版前言

第二版前言

本书常用数学记号

第 1 章 随机现象的数学建模	1
1.1 自然界的随机现象	1
1.1.1 随机现象的定义和例子	1
1.1.2 随机现象产生的原因	2
1.2 随机现象的频率稳定性	4
1.2.1 样本的频率稳定性	4
1.2.2 事件的频率	6
1.3 随机现象频率稳定性的数学建模	6
1.3.1 概率的概念	6
1.3.2 概率空间	7
1.3.3 条件概率和事件的独立	13
1.4 本章概要和习题	16
1.4.1 概要	16
1.4.2 习题	17
第 2 章 各种随机对象	20
2.1 样本空间的标准化	20
2.2 随机变量	23
2.2.1 概率函数	24
2.2.2 数字特征	35
2.3 随机向量	41
2.3.1 概率函数	41
2.3.2 数字特征	47
2.3.3 随机变量间的关系	51
2.4 随机过程	58
2.4.1 用无穷维向量的观点来看函数	58
2.4.2 随机过程的定义	59
2.4.3 概率函数族	60
2.4.4 矩函数	64
2.4.5 常见随机过程	67
2.5 其他形式的随机对象	77
2.5.1 复随机对象	77
2.5.2 矩阵随机对象	80

2.6	概率空间和随机对象的概念比较	82
2.7	本章概要和习题	83
2.7.1	概要	83
2.7.2	习题	84
第3章	随机数学分析	92
3.1	随机对象的函数	92
3.1.1	随机变量的函数	92
3.1.2	随机向量的函数	96
3.1.3	随机过程的函数	99
3.2	二阶矩过程的均方微积分	102
3.2.1	均方收敛	102
3.2.2	均方连续	108
3.2.3	均方导数	109
3.2.4	均方积分	111
3.3	二阶矩过程的正交分解	113
3.3.1	二阶矩过程的正交分解	113
3.3.2	Fourier 正交分解	115
3.3.3	Karhunen-Loève 正交分解	117
3.4	二阶矩过程的线性变换	121
3.4.1	连续时间二阶矩过程的线性变换	121
3.4.2	离散时间二阶矩过程的线性变换	122
3.5	二阶矩过程的各态遍历性	123
3.6	本章概要和习题	127
3.6.1	概要	127
3.6.2	习题	128
第4章	随机信号与线性系统	133
4.1	随机信号的功率谱密度	133
4.1.1	连续时间随机信号的功率谱密度	133
4.1.2	离散时间随机信号的功率谱密度	137
4.2	随机信号的带宽	139
4.3	带限和带通随机信号	141
4.3.1	带限随机信号	141
4.3.2	带通随机信号	143
4.4	随机信号通过线性系统	147
4.4.1	连续时间线性系统	147
4.4.2	离散时间线性系统	158
4.5	本章概要和习题	163
4.5.1	概要	163

4.5.2 习题	164
第 5 章 信号的统计推断	170
5.1 信号的统计推断	170
5.1.1 统计推断	170
5.1.2 信号的统计推断	171
5.2 信号检测	172
5.2.1 信号检测模型	172
5.2.2 常见判决准则	173
5.2.3 应用举例	176
5.3 参数估计	180
5.3.1 参数估计模型	180
5.3.2 常见估计准则	181
5.3.3 应用举例	185
5.4 滤波(波形估计)	187
5.4.1 信号的波形估计	187
5.4.2 匹配滤波	188
5.4.3 白化滤波	189
5.4.4 Wiener 滤波	191
5.5 本章概要和习题	198
5.5.1 概要	198
5.5.2 习题	198
第 6 章 Markov 链	203
6.1 随机现象的状态记忆性	203
6.2 离散时间 Markov 链	204
6.2.1 定义	204
6.2.2 状态方程	207
6.2.3 状态分类	210
6.2.4 应用举例: 停-等 ARQ 系统	221
6.3 连续时间 Markov 链	224
6.3.1 定义	224
6.3.2 状态停留时间	226
6.3.3 状态方程	227
6.3.4 生灭过程	229
6.3.5 应用举例: M/M 型排队系统	237
6.4 嵌入 Markov 链	252
6.4.1 定义	252
6.4.2 M/G/1 排队系统	253
6.4.3 G/M/1 排队系统	261

6.5	本章概要和习题	264
6.5.1	概要	264
6.5.2	习题	265
第 7 章	随机对象的计算机模拟	272
7.1	通信与信息系统的计算机仿真	272
7.2	均匀分布随机变量的模拟	273
7.3	具有给定分布随机变量的模拟	274
7.3.1	变换法	274
7.3.2	拒绝法	276
7.4	给定协相关矩阵的随机向量的模拟	279
7.5	具有给定功率谱密度的随机过程的模拟	280
7.6	移位寄存器生成的伪随机序列	281
7.6.1	线性移位寄存器	281
7.6.2	m 序列及其性质	284
7.7	Monte Carlo 方法	287
7.8	本章概要和习题	289
7.8.1	概要	289
7.8.2	习题	290
附录 A	泛函分析基本概念	291
A.1	集合和映射	291
A.2	常见泛函空间	293
A.3	广义函数及其导数	295
A.4	习题	298
附录 B	常用数学公式	300
B.1	三角恒等式	300
B.2	不定积分	300
B.3	定积分	301
附录 C	常见随机变量	303
C.1	离散型随机变量	303
C.2	连续型随机变量	304
附录 D	Fourier 变换	307
D.1	Fourier 变换表	307
D.2	Fourier 变换的常用性质	308
参考文献		309
索引		313

第 1 章 随机现象的数学建模

本章在介绍随机现象定义的基础上,分析了随机现象的产生原因,观察了随机现象的频率稳定性,介绍了随机现象频率稳定性的数学建模方法——概率和概率空间。此外,还介绍了条件概率、事件的独立等概念。本章内容是全书内容的基础。

1.1 自然界的随机现象

1.1.1 随机现象的定义和例子

在自然科学的研究中,人们需要对各种自然现象进行观察。在观察过程中,人们发现有一类现象,在发生之前只能知道该现象各种可能的发生结果,但无法准确预知哪一个结果将发生。人们把具有上述特征的现象称为随机现象。

随机现象在自然界大量存在,下面是一些例子:

例 1.1 将硬币抛在桌面上,考察硬币的哪一面朝上。在抛之前观察者只知道有两种可能的结果,但却无法准确预测哪一面朝上。

例 1.2 在均匀的水平桌面上投掷正六面体的骰子。在投掷之前观察者只知道有六种可能的结果,但却无法准确预测哪一面朝上。

例 1.3 观察明天中午某地点是否下雨。在明天中午未到来之前,观察者只知道“下雨”这个现象可能发生,也可能不发生,但却无法准确预知。

例 1.4 观察某机器的使用寿命。观察者只知道,该机器的使用寿命可以是一个大于零的实数,但具体是哪个实数却无法预知。

例 1.5 观察某天某个时刻某地点的温度。观察者只能知道,温度是某个范围内的一个数,但却无法准确预知这个数的准确值。

实际上,如果仔细加以观察可以发现,随机现象在自然界到处都存在。尤其是在信息与通信系统中,随机现象更是大量存在。如果对信息与通信系统中的随机现象加以分类,则主要表现在信号、噪声、信道与通信业务这些物理对象之中。以下是一些信息与通信系统中的随机现象的例子:

例 1.6 观察某通信系统在一个符号周期内所要发送的调制符号。信号接收端的观察者在检测符号之前只知道该符号是调制星座集合中的一个符号,但是到底是哪一个符号不得而知。譬如,如果是 BPSK 调制,则符号集合为 $\{-1, 1\}$, 观察在检测之前,只知道这个符号周期所发的符号是 -1 或 1 中的一个,但到底是 -1 或 1 中的哪一个不得而知。

例 1.7 在上例中, 假如观察者观察的是由 N 个符号组成的一帧信号, 则在检测之前, 观察者知道所接收的信号是集合 $\{-1, 1\}^N$ 中的一个元素, 但是到底是哪一个也不得而知。

例 1.8 在上例中, 假设发射机所发送的符号序列是一个由 -1 和 1 组成的无限长符号序列, 则接收端在检测之前, 只知道发射机所发送的是一个由 -1 和 1 组成的无限长符号序列, 但到底是哪一个序列则不得而知。

例 1.9 所谓噪声是接收机所接收到的和信号叠加在一起, 但对信号检测没有任何作用的信号。如果关闭发射机, 此时接收机接收到的信号就是噪声。在一个符号周期内接收到的噪声电平是 $(-\infty, \infty)$ 内的一个数, 但在接收之前无法预测是哪一个数。如果信号是由 N 个符号组成的一帧信号, 此时噪声就是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个向量; 在接收之前, 只知道噪声是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个向量, 但无法预测具体是哪一个向量。如果信号是一个无穷长序列, 则噪声可以建模为一个 $\mathbb{R}^\infty$ 中的无穷维向量; 在接收之前, 无法预测是 $\mathbb{R}^\infty$ 中的哪一个向量。

例 1.10 传输离散信号的无线信道的冲激响应可以建模为一个有限长的向量, 记为 $h_0, \dots, h_{L-1}$ 。如果在发送端发送 L 个脉冲信号, 则在接收端就会接收到一组冲激响应 $h_0, \dots, h_{L-1}$ 。可以发现, 每次试验所接收到的冲激响应 $h_0, \dots, h_{L-1}$ 互不相同, 在接收之前只知道冲激响应是 $\mathbb{R}^L$ 中的一个向量, 但是不知道具体是哪一个向量。

例 1.11 业务的发生时刻。观察某通信系统一天内业务到达的时刻, 可以建模为一个有限长的数列 $\{a_n\}_{n=1}^N$, a_n 是第 n 个业务的到达时刻。在观察之前, 只知道一天内的业务发生时刻序列是一个有限长序列, 但是长度 N 和具体的 $\{a_n\}_{n=1}^N$ 则无法预测。

例 1.12 业务的持续时间长度。对一个业务持续的时间进行观察, 则发现持续时间可以是 $(0, \infty)$ 内的一个数, 但是具体是哪一个数, 则在业务发生之前无法预测。

例 1.13 移动业务的位置和移动速率。在移动通信系统中, 移动业务的位置和移动速率也是随机现象, 因为在观察之前只知道它们的可能范围, 但是无法准确预测它们的具体取值。

总之, 在信息与通信系统中, 存在着各种各样的随机现象。

1.1.2 随机现象产生的原因

为什么会产生随机现象呢? 原因是决定现象发生的因素和机制过于复杂, 超过了观察者的认识能力, 观察者无法根据自己所掌握的资料准确预测现象的发生。

以上面所举的抛硬币试验为例, 当把一枚均匀的硬币抛向水平桌面时, 决定硬币最终是正面朝上还是反面朝上的因素非常多, 如抛出时的角度和速度、空气的流动、桌面的平整性等, 或许还有其他观察者根本认识不到的因素。此外, 这些因素对硬币最终是正面朝上还是反面朝上的影响机制也难以被观察者认识, 以致最后的结果——硬币正面朝上还是反面朝上, 在现象发生之前, 对观察者来说也成了无法确知的事情。

同样, 决定明天某地点是否下雨的因素有很多, 譬如空气的湿度、温度、流动方向