

目 录

前 言

第一章 振动理论的基本概念	1
§ 1-1 简谐振动	1
§ 1-2 同向简谐振动的合成	4
§ 1-3 非谐周期过程分解为简谐过程	9
§ 1-4 互相垂直振动的合成	14
§ 1-5 一个自由度系统的自由振动	21
§ 1-6 一个自由度系统的强迫振动	28
§ 1-7 多自由度系统的振动特性	39
第二章 扰动力和叶片的振型	48
§ 2-1 运行叶片所受的扰动力	48
§ 2-2 共振条件与K值的概念	54
§ 2-3 叶片振动的分类	58
§ 2-4 叶片的切向振动	62
§ 2-5 叶片的轴向振动	68
§ 2-6 自由叶片的扭转振动	69
§ 2-7 复合振动	70
§ 2-8 整圈连接叶片的振型	71
第三章 叶片自振频率的计算	78
§ 3-1 单个叶片弯曲振动的自振频率	78
§ 3-2 等截面叶片组的自振频率	87
§ 3-3 变截面自由叶片弯曲振动的自振频率	91
§ 3-4 变截面叶片组的自振频率	100
§ 3-5 叶片的动频率	110
第四章 叶片和轮系的振动特性试验	119
§ 4-1 试验任务和内容	119
§ 4-2 试验的仪器和设备	120
§ 4-3 试验前的主要准备工作	135

§ 4-4	测试方法	137
§ 4-5	振型的确定	142
§ 4-6	试验的注意事项	146
§ 4-7	用激光全息照相测量叶片振动	147
第五章	叶片动频率的测定	153
§ 5-1	动频率测定方法及基本原理	153
§ 5-2	动频率试验	159
§ 5-3	动频率测定的一些情况	181
第六章	叶片振动特性的评价	188
§ 6-1	叶片的频率分散率	188
§ 6-2	叶片避开低频共振的安全条件	190
§ 6-3	避开叶片高频共振的安全条件	198
§ 6-4	疲劳极限及衰减率	199
§ 6-5	介绍一种新的调频准则	202
第七章	轮系振动	206
§ 7-1	轮系的振型	206
§ 7-2	轮系振动的波	210
§ 7-3	轮系振动特性的评价	222
第八章	叶片及轮系振动特性的调整	229
§ 8-1	叶片低频振动特性的调整	230
§ 8-2	叶片高频振动特性的调整	240
§ 8-3	轮系振动频率的调整	245
§ 8-4	“三重点”共振的调开	246
§ 8-5	网形交错连接叶片频率的调整	247
§ 8-6	整圈连接叶片及阻尼拉金	248
第九章	汽轮机叶片的常见事故及其防止	258
§ 9-1	叶片断落的征象	258
§ 9-2	叶片损坏的原因	259
§ 9-3	叶片事故原因的分析	262
§ 9-4	防止叶片断裂事故的措施	276
附录 I		281
附录 II		285
参考文献		286

第 一 章

振动理论的基本概念

汽轮机是发电设备的主机之一，其叶片和叶轮的振动特性直接关系到机组的安全运行。自1952年开始，我国有关单位对汽轮机叶片和叶轮振动特性进行了大量的试验研究工作。指导该项工作和对振动现象进行完整的说明离不开振动理论。因此，在讨论汽轮机叶片和叶轮的振动特性时，必须首先对振动理论的基本概念作一概略的叙述。本章的重点即在于此。

§ 1-1 简 谐 振 动

简谐运动是符合正弦或余弦规律的运动。具有简谐运动过程的振动称简谐振动。简谐运动是周期运动中最简单的一种运动形式。物体作周期振动时，可从理论上证明其运动过程不是简谐运动便是由数个不同频率和不同振幅的简谐运动迭加而成。因此简谐振动是振动中最简单、最基本的振动型式，是研究复杂振动的基础。

简谐振动的运动方程式已知为：

$$y = A \sin \omega t, \quad (1-1)$$

当 $t=0$ 时， $y=0$ ，即在振动起始计算时刻，振动点处于平衡位置。若 $t=0$ 时， $y \neq 0$ ，如图 1-1 所示，则简谐振动的位移 y 和时间 t 的关系式为：

$$y = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1-2)$$

由上式可见，描述简谐振动的的基本参量为 A 、 ω 和 φ 。 A 表示振动点离开平衡位置的最大距离，称为振幅。 ω 称为振动的圆频率或角频率。由图 1-1 可见， ω 是 M 点作等速圆周运动的角速度，

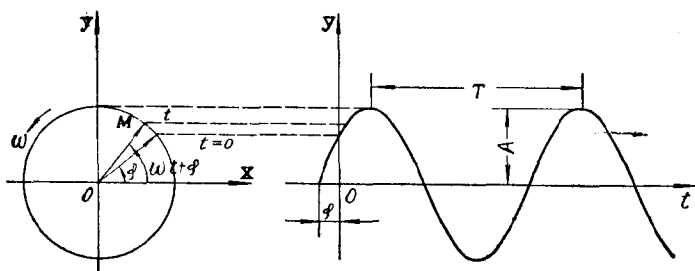


图 1-1 初相位 $\varphi \neq 0$ 的简谐振动

单位是弧度/秒。常用的术语还有周期和频率：振动一周所需要的时间称周期，常用 T 表示，以秒为单位；单位时间内振动的周数称频率，常用 f 表示，单位为周/秒或称赫芝。从周期函数和简谐振动的定义可知，当 t 变为 $(t+T)$ 时， ωt 应变为 $(\omega t + 2\pi)$ ，因此 ω 与 T 及 f 的关系是：

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (1-3)$$

$(\omega t + \varphi)$ 称相位角，或称相位，它决定着 M 点在瞬间 t 时的方位，亦即决定着某瞬时振动点的位置和运动方向。当 $t=0$ 时，相位角为 φ ，故 φ 表示了振动起始位置时的角度，称初相位，在图 1-1 中， $\varphi \neq 0$ 。

若两个振动的相位不同，其相位的差值称为这两个振动的相位差。两个振动起始时间具有的相位差值 $\Delta\varphi$ 称为初相位差。如两个振动的频率相同，则在振动过程中的相位差不变，始终等于初相位差。相位差的大小表示其中一个振动过程比另一个振动过程超前或滞后多少角度。图 1-2 显示两个分别由式 $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 和 $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ 表示的频率相同的简谐振动。

图 1-3 为两只叶片的振动示意图：甲为两只叶片的相位差 $\Delta\varphi = 0$ ，称同相；乙为两只叶片的相位差 $\Delta\varphi = 90^\circ$ ；丙为两者相位差 $\Delta\varphi = 180^\circ$ ，称反相。

简谐振动的位移既由 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ 表示，则其运动的速度和加速度可由位移对时间的一阶和二阶导数求得。为了简便起

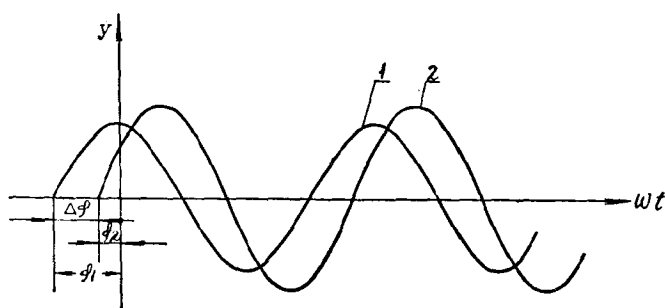


图 1-2 具有相位差 $\Delta\varphi$ 的两个同频的简谐振动

$$1-y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad 2-y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

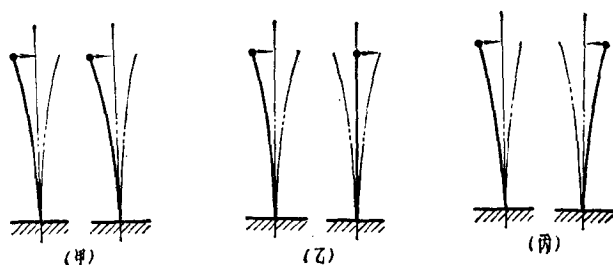


图 1-3 叶片振动时的相位差示意图

见，设 y 的初相位 $\varphi = 0$ ，于是得：

$$y = A \sin \omega t;$$

$$V = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right); \quad (1-4)$$

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \omega^2 A \sin \left(\omega t + \pi \right). \quad (1-5)$$

由此可得以下结论：

1) 当振动点的位移是简谐过程时，振动的速度和加速度也是简谐过程，三者的周期完全相同；

2) 三者的最大绝对值分别等于 A 、 ωA 、 $\omega^2 A$ ，亦即振动的最大速度 $V_{\max} = \omega A = 2\pi f A$ ，与频率的一次方成正比；最大加

速度 $a_{\max} = \omega^2 A = 4\pi^2 f^2 A$ ，与频率的平方成正比；

3) 速度的相位比位移超前 $\pi/2$ ；加速度相位比位移超前 π 、比速度超前 $\pi/2$ ，所以三者不可能同时达到最大值。速度的最大值将较位移的最大值提前 90° 出现，加速度的最大值将较位移的最大值提前 180° 出现。

简谐运动常用旋转矢量来表示。因简谐振动的位移、速度和加速度都是简谐过程，故三者都可用旋转矢量表示，图 1-4 画出了三者的波形和相位关系。

若简谐振动用旋转矢量表示，则对振动的合成和分解可用向量运算法则进行，由此可带来很大的方便。

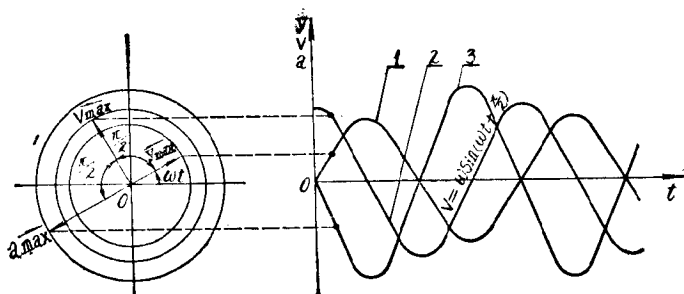


图 1-4 简谐振动位移、速度、加速度的相位关系

$$1-y = A \sin \omega t, \quad 2-V = \omega A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad 3-a = \omega^2 A \sin (\omega t + \pi)$$

§ 1-2 同向简谐振动的合成

当弹性系统受到几种周期性外力作用时，它将同时进行几种型式的振动，这时每一振动称为分振动。弹性系统同时参与几个振动时构成合成振动。合成振动又名合振动。一般来说合振动有四种形式。

一、同频率简谐振动的合成

一点如受两个同向（指沿同一座标轴）同频率的简谐振动，则其合成振动可很方便地在旋转矢量图上用矢量合成法求得，如

图1-5。

设两个同向振动分别为：

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

图1-5画出了 $t=0$ 时刻 $\vec{A}_1$ 、 $\vec{A}_2$ 的位置。由于 $\vec{A}_1$ 、 $\vec{A}_2$ 以相同角速度 ω 旋转，因此两者间的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 不变，合成向量 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ 的大小也不变，并且也以角速度 ω 旋转。合振动方程式为：

$$y = A \sin(\omega t + \varphi).$$

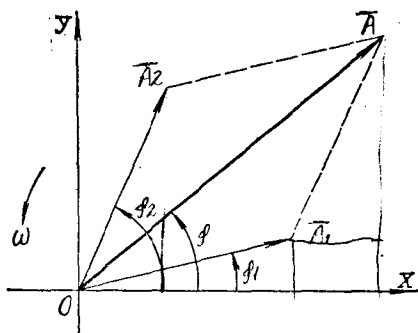


图 1-5 同向同频简谐振动的合成

由图可立即得出：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (1-7)$$

故两个同向同频简谐振动合成时，其合振动仍是一个同一频率的简谐振动。

对于多个同频同向简谐振动合成时，所得结论显然相同，合振动也为同频的简谐振动，其振幅 A 和初相位 φ 则如下式：

$$A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i \right)^2};$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sum_{i=1}^n A_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cos \varphi_i}.$$

二、频率为简单整数比的简谐振动的合成

设两个同向分振动为:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

则合振动为:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

由于 $\omega_1 \neq \omega_2$, 故振动点在任一时刻的位移为两个分振动在该时刻位移的代数和, 而其位移的变化就不符合正弦曲线的规律。因此, 合振动为一非谐周期运动, 即合振动不是简谐运动。

合振动的周期是两个分振动周期的最小公倍数, 因为只有经过这一时间后, 两个振动才能同时回到原位置。若合振动的周期为 T , 则

$$T = mT_1 = nT_2, \quad (1-8)$$

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1},$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

例如 $f_1/f_2 = m/n = 2/3$, $f_1 = 10$ 周/秒, $f_2 = 15$ 周/秒, 则 $T = mT_1 = 2 \times \frac{1}{10} = 0.2$ 秒, 在 0.2 秒时间内, y_1 振动了二周, y_2 则振动了三周, 两者同时回到原位而合振动恰振动了一周。

图 1-6 为 $f_1/f_2 = 1/2$ 时合振动的波形。图中 $\omega_2 = 2\omega_1$, 虚线为分振动, 实线为合振动。显然, 合成波形的形状还与初相位有关。

三、高频与低频简谐振动的合成

当分振动频率相差较大时, 其合成波形如图 1-7 所示, 图中甲为高频振动的振幅比低频的大; 乙为低频振动的振幅比高频的

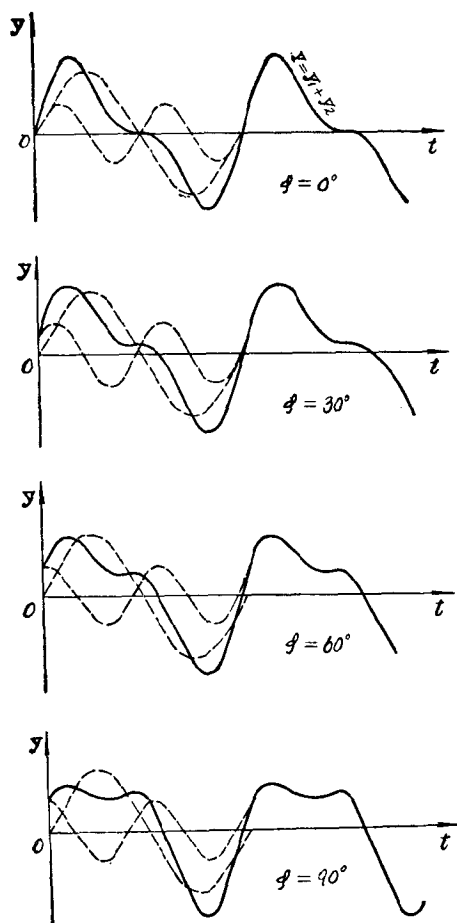


图 1-6 $\omega_2 = \alpha\omega_1$ 时两个同方向简谐振动的合振动波形

大。这两种情况都可能在电磁振动台上出现，例如：在实现高频振动时，出现低频晃动；在实现低频振动时，出现50赫芝的干扰振动。

四、两频率接近情况下的振动合成，拍的现象

若两个简谐振动的频率 f_1 和 f_2 相差很少，振幅分别为 A_1 和 A_2 ，两者相差不多，如图1-8的甲、乙所示，其合振动如图

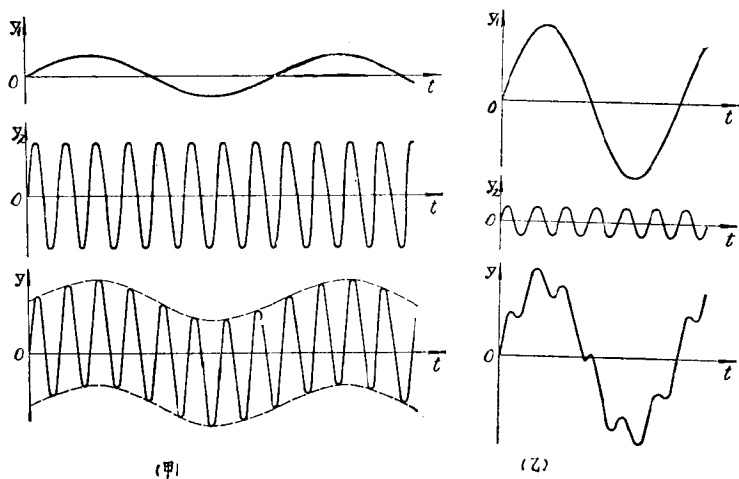


图 1-7 同向高频与低频简谐振动的合成波形

甲— $A_2 \gg A_1$, 乙— $A_1 \gg A_2$

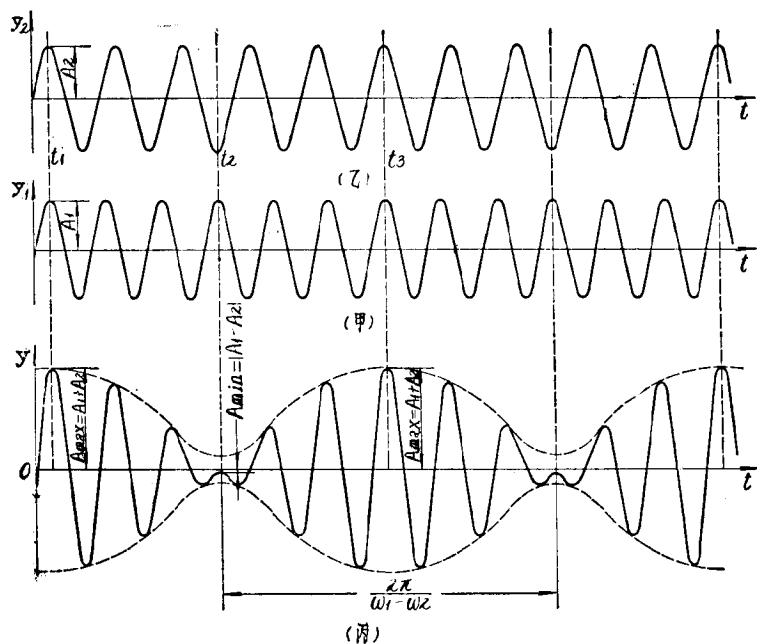


图 1-8 拍

1-8丙所示。设在 t_1 时两个分振动的相位相同，其合振动的振幅最大， $A_{\max} = A_1 + A_2$ 。由于 $f_1 \neq f_2$ ，随着振动次数的增加，两分振动的相位差逐渐增大，合振动的振幅逐渐减小，当相位差等于 π 时，两分振动的波峰处于相反方向，因此合振动的幅值最小， $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ 如图1-8 t_2 所示。随着振动次数的继续增加，相位差超过 π ，合振幅又逐渐增大。当相位差等于 2π 时，合成振幅又达最大，如图1-8 t_3 所示。这时第一个分振动恰超过第二个分振动一个循环，两个分振动的波峰又一次同时同侧达到最大。随着振动的继续，上述现象重复出现。这种振幅呈现时大时小周期性变化的现象称为拍。若合成振动是声波，则可很清晰地听到强音和弱音缓慢地交替着。如果两个分振动的振幅相差较大，则拍的现象就不怎么明显，因为当 A_1 与 A_2 相差较大时， $A_{\min}$ 与 $A_{\max}$ 的差距也不会明显。

由图 1-8 可明显看出，合振动的频率决定于两个分振动的频率，若 $f_1 > f_2$ ，则 $f_1 - f_2$ 为一秒钟内第一分振动赶上第二分振动又超过第二分振动的次数。这个次数也就是合振动的振幅从一个最大值通过最小值到下一个最大值的次数，故是拍的频率 f_0 ，称为拍频。

$$f_0 = f_1 - f_2. \quad (1-9)$$

拍的周期 T_0 为：

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (1-10)$$

利用拍的现象，可以进行频率的精密测定。

§ 1-3 非谐周期过程分解为简谐过程

从上文可知，不同频率的同向简谐过程合成时，得到的是一个非谐周期过程。实际工作中得到的往往是一些非谐周期波形。将这些任意形状的周期波形分解为若干简谐过程，对分析振动问题具有重要的意义。这种谐波分析的方法是利用富里叶级数，即周

期为 T 的某一运动过程 $y(t)$ 可按式展开

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (1-11)$$

式中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

a_0, a_n, b_n 为富里叶系数,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos n\omega t dt, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin n\omega t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

如再将同频的正弦和余弦项合并, 则富里叶级数 (1-11) 式可写成如下形式:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \\ &\quad + \dots, \end{aligned} \quad (1-13)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_n}{b_n},$$

式中常数项 A_0 为 $y(t)$ 的中值, 它表示整个曲线在 y 轴方向的位移, 是一常数, 故对振动问题的讨论不具有重要性; 第二项是频率最低的分振动, 称为基波, 而圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 则称为基频; 具有圆频率 $n\omega$ 的第 $n+1$ 项称为 n 次谐波。由此可见, 一个非谐周期振动在理论上总可以分解为无限多个频率相互成整数比的简谐过程, 其频谱总是离散型的。但由于富里叶级数是收敛的, 随着谐

波次数的增高，谐波的幅值却逐渐减小，故实际应用时可根据级数收敛的快慢及精度要求，决定对高次谐波的取舍。

例 试将周期为 T ，脉宽为 τ 的方脉冲展开为富里叶级数，见图1-9。

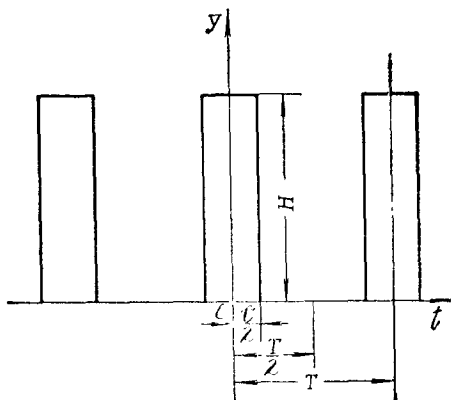


图 1-9 方脉冲波

这种波在一个周期内的函数表示式为：

$$y(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}; \\ H, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

基频 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 。按(1-12)式求富里叶系数，因波形对称于 y 轴，

$$y(t) = y(-t), \text{ 是偶函数, 故 } b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin n\omega t dt = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos n\omega t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} y(t) \cos n\omega t dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} y(t) \cos n\omega t dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos n\omega t dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos n\omega t dt \right] \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} H \cos n\omega t dt = \frac{4H}{T} \left(\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \\
&= \frac{2H}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}. \quad (n=1, 2, 3) \\
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} y(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} H dt = \frac{2H\tau}{T}.
\end{aligned}$$

所以该波形的表达式为：

$$y(t) = \frac{H\tau}{T} + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos n\omega t.$$

若 $\tau = \frac{T}{2}$ ，则矩形波图1-10甲的展开式为：

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{H}{2} + \frac{2H}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right).
\end{aligned}$$

图1-10乙为矩形波的离散型频谱图，高度代表各分谐波的振幅。

图1-11分别画出了谐波取一项、二项、三项时迭加结果与原矩形波逼近情况。由图可见，项数取得越多，近似程度越好。

必须指出，利用上面的方法进行谐波分析时，必须知道函数 $y(t)$ 的解析表达式，而在实际工作中则往往得不到，得到的只是纪录纸上的波形。这时为了获得富里叶系数，就需进行波形的近似数值分析，即采用数值积分法求出 a_0 、 a_n 和 b_n 。

用于谐波分析的一些仪器就是在上述原理上工作的。它通过

仪器内部的滤波器将一般周期振动中的某些谐波成分去掉，而将需要测量的某一谐波分量定量地显示出来，从而代替了繁复的计算。

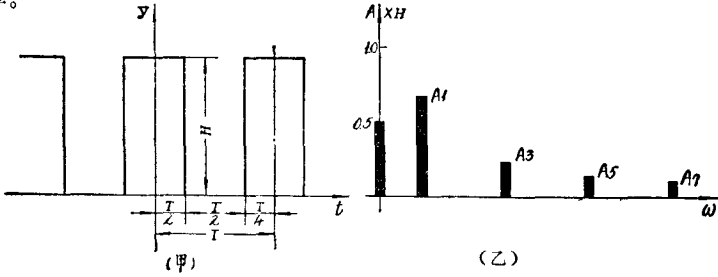


图 1-10 矩形波的离散型频谱

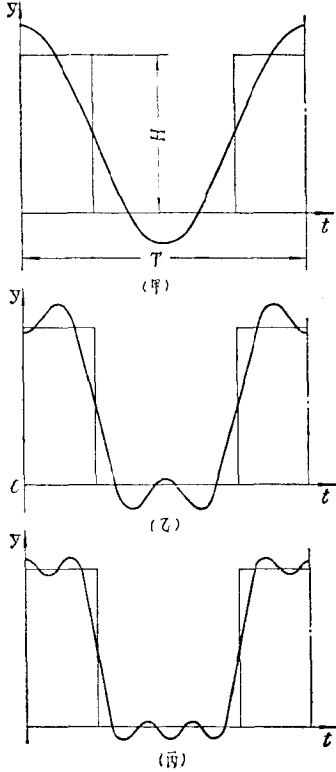


图 1-11 谐波取不同项数迭加时与原矩形波逼近情况

§ 1-4 互相垂直振动的合成

若一个点同时参与互相垂直的两个简谐运动，则合成运动轨迹一般将不在一直线上，而是在一平面上，振动轨迹将呈现各种形状的封闭曲线，其形状决定于两个分振动的频率比例和初相差，这种封闭曲线称为李沙茹图。若两个分振动频率比例为简单的整数比，则在示波器上便可见到简单的稳定的封闭曲线。如果两分振动的频率相近但不等，则在示波器上便出现连续变化的运动轨迹曲线，此曲线是两个分振动合振动轨迹封闭曲线的一部分。

利用示波器与音频讯号发生器测定汽轮机叶片频率时，常利用李沙茹图的形状，根据已知的给定频率求出叶片的自振频率。现分别讨论如下：

一、同频简谐振动的合成

若质点同时参与 x 及 y 轴方向振动的运动方程式分别为：

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

则消去 t ，就可得到质点合成振动的轨迹方程式。

将上两式改写成以下形式：

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1; \quad (a)$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2. \quad (b)$$

用 $\cos \varphi_2$ 乘式 a — $\cos \varphi_1$ 乘式 b 得：

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (c)$$

用 $\sin \varphi_1$ 乘式 b — $\sin \varphi_2$ 乘式 a 得：

$$\frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 - \frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 = \sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (d)$$

将 c 式和 d 式平方后相加，则得振动轨迹方程为：

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

式中 $\varphi_1 - \varphi_2$ 为两分振动的相位差，令 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ，则振动轨迹方程式可写为：

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi. \quad (1-14)$$

由式可见，轨迹曲线的性质由相位差 $\Delta\varphi$ 值决定。下面分析几种特殊情形：

当 $\Delta\varphi = 0$ 时，则

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0.$$

由此得：

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}.$$

这是通过坐标原点的直线方程式，振动沿这条直线作简谐运动，合振动的频率与分振动之频率相等，而其振幅 A 为：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

当 $\Delta\varphi = \pi$ 时，则

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

由此得：

$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}.$$

这个方程式仍是一条通过坐标原点的直线，它与 $\Delta\varphi = 0$ 时比较，只是直线的斜率是负的，不再在第一和第三象限，而是通过第二和第四象限。

当 $\Delta\varphi$ 等于 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时，式(1-14)变为：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

该式为一个有正向长轴和短轴的椭圆方程式，椭圆轴在 x 轴及 y 轴上，长轴等于 $2A_1$ ，短轴等于 $2A_2$ 。当 $A_1 = A_2$ 时，上式就成