普通高等教育“十一五”国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

抽象代数Ⅱ

徐明曜 赵春来 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

抽象代数 II

徐明曜　赵春来　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

抽象代数 II / 徐明曜，赵春来编著. — 北京：北京大学出版社，2007.3

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-08528-8

I. 抽 ··· II. ①徐 ··· ②赵 ··· III. 抽象代数 – 高等学校 – 教材 IV. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 148161 号

书　　名: **抽象代数 II**
著作责任者: 徐明曜　赵春来　编著
责 任 编 辑: 刘　勇
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-08528-8/O · 0633
出 版 者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
出版部 62754962
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者: 北京大学印刷厂
发 行 者: 北京大学出版社
经 销 者: 新华书店
890 mm × 1240 mm　A5　9 印张　270 千字
2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
印　　数: 0001—4000 册
定　　价: 18.00 元

作者简介

徐明曜 1941 年 9 月生，1965 年毕业于北京大学数学力学系数学专业，1980 年在北京大学数学系研究生毕业，获硕士学位，并留校任教. 1985 年晋升为副教授，1988 年破格晋升为教授，博士生导师.

徐明曜长期从事本科生及研究生代数课程的教学以及有限群论的研究工作，讲授过多门本科生和研究生课程，著有《有限群导引》（下册与他人合作）; 科研方面自 20 世纪 60 年代起进行有限 p 群的研究工作， 80 年代中期又开创了我国 “群与图” 的研究领域，至今已发表论文 80 多篇，多数发表在国外的重要杂志上. 曾获得国家教委优秀科技成果奖 (1985), 国家教委科技进步二等奖 (1995), 周培源基金会数理基金成果奖 (1995).

赵春来 1945 年 2 月生， 1967 年毕业于北京大学数学力学系数学专业， 1984 年在北京大学数学系研究生毕业，获博士学位. 1987 年晋升为副教授， 1992 年晋升为教授，博士生导师.

赵春来长期从事本科生及研究生代数课程的教学以及代数数论的研究工作，讲授过多门本科生和研究生课程，与他人合著了《代数学》、《线性代数引论》、《模曲线导引》、《代数群引论》等著作. 他的研究工作主要集中于椭圆曲线的算术理论以及信息安全方面，在国内外重要学术刊物上发表论文十余篇. 曾获教育部科技进步二等奖 (2004), 北京市优秀教学成果一等奖 (2005), 国家级优秀教学成果二等奖 (2005).

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效. 2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时. 并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程 (其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的

时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张 继 平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前　言

代数学是数学专业最基本和最重要的基础课程之一. 它对学好数学本身以及数学在现代科学技术很多方面的应用来说都有重要的意义. 因此我们在数学学习的各个阶段都开设了代数课程. 比如在本科低年级开设的高等代数或线性代数，以及抽象代数或近世代数 (简称抽象代数 I) 等. 本课程是为数学硕士生阶段设计的抽象代数 II 课程.

由于现代代数学有很多分支，而每个分支又都有众多抽象的概念，因此在本科开设的抽象代数中只能讲解代数的基本概念以及概念之间的联系，而不能讲解代数各个分支丰富的内容和深刻的结果. 于是给学生造成了这样一种印象，似乎抽象代数就是若干概念的堆积，看不出代数学有什么深刻的结果. 这种印象和代数学的实际发展是大相径庭的. 事实上，即使是在 19 世纪末和 20 世纪初的代数学就已经有着十分丰富而深刻的结果，更不用说今天的代数学了. 基于此，我们想在本课程中讲解代数学的较为深刻而又有着广泛应用的内容. 为了这样的目的，在内容上就有很多可能的选择. 譬如，群表示论、典型群、有限群、复单 Lie 代数的分类、环论、交换代数、模论、 Galois 理论、代数数论、代数几何、格论、同调代数初步，等等. 根据教学实际和师资情况，我们最后选择了模论、群论的进一步知识、 Galois 理论、结合代数和群的表示论、典型群初步等五块内容. 而其他的也是很好的内容就只能割爱了. 另外，在实际的教学过程中，任课教师还可对这五部分内容有所取舍. 因为我们只有 45 课时的课堂教学时间，而目前已经写的部分差不多可供 60 课时使用.

还有几点是需要向读者说明的.

1. 本书是作为教材而编写的，它不仅要介绍代数学的基本知

识同时也要介绍方法，而且还要突出方法．因此从知识上并不追求完全，相当多的内容是为了介绍方法而写入的．

2. 学习本书之前应该学过本科抽象代数 I 课程．由于我校的硕士生来自全国各个学校，而各校所学的内容不尽相同，为了使大家有个共同的基础，我们在第一至第三章前都加了第 0 节，分别介绍在本科抽象代数 I 课程中已经学过的环论、群论和域论知识．

3. 由于读者在本科阶段都受过较充分的抽象代数的训练，在本书中定理的证明写得比较简短，常给读者留有思考的余地．这样读起来可能会感到吃力，但对训练推理能力以及将来阅读文献、学做研究都会有一定的帮助．

4. 本书中的习题是不可不做的，它们是本书重要的组成部分．这些习题难易程度不等，对于稍难一些的题目都标了星号“*”．

最后，我们要感谢我学院代数组各位同仁，他们参与了本书教学大纲的讨论，并提出了很多有价值的建议．

作　者

2006 年 8 月于北京大学

数学科学学院

目　录

第 0 章　预备知识

在本章中，我们介绍 Zorn 引理和范畴论的一些最基本的知识.

§0.1　Zorn 引理

Zorn 引理是集合论中一个基本的公理，与之等价的有 *选择公理* 和 *良序定理* 等. 我们在这里仅叙述 Zorn 引理. 有关这方面的较详细的论述可以参见 B.L. 范德瓦尔登的《代数学 (I)》(丁石孙、曾肯成、郝钢新译，科学出版社，1978).

定义 1.1　设 S 是一个集合. 所谓 S 上的一个 **偏序** (记为 "$\le$") 是指满足下述三个条件的二元关系：

(1) 反身性：$a \le a$ $(\forall\, a \in S)$;

(2) 反对称性：若 $a \le b$, $b \le a$, 则 $a = b$ $(\forall\, a, b \in S)$;

(3) 传递性：若 $a \le b$, $b \le c$, 则 $a \le c$ $(\forall\, a, b, c \in S)$.

具有偏序的集合称为**偏序集**. 偏序集的两个元素 a 和 b 称为**可比较的**, 如果 $a \le b$ 或 $b \le a$.

定义 1.2　设 S 是偏序集. 如果存在 $m \in S$, 满足

$$m \le a \text{ 蕴含着 } m = a \quad (\forall\, a \in S),$$

则称 m 为 S 的一个**极大元**. 设 $T \subseteq S$. 如果存在 $s \in S$, 满足

$$t \le s \quad (\forall\, t \in T),$$

则称 s 为 T 在 S 中的一个**上界**.

定义 1.3　设 S 是偏序集. 称 S 的一个子集 T 为**链** (或**全序链**), 如果 T 的任意两个元素都是可比较的.

Zorn 引理　设 S 是一个偏序集. 如果 S 中的任意一个链在 S 中都有上界, 则 S 有极大元.

§0.2　范畴与函子

定义 2.1　一个**范畴** $\mathfrak{C}$ 由下述三个内容组成:

(1) 一类对象的全体 (记为 Obj $\mathfrak{C}$);

(2) 对于任意两个对象 $A, B \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$, 有一个态射集合 (记为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, 或在不致引起混淆时记为 $\mathrm{Hom}\,(A, B)$);

(3) 对于任意三个对象 A, B, C, 有态射集合的合成映射:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C), \\ (f, g) &\mapsto f \circ g. \end{aligned}$$

其中的 (2), (3) 两条满足以下三个条件:

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, D) = \varnothing$, 如果 $A \neq C$ 或 $B \neq D$;

(ii) 态射的合成有结合律: 对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ 以及 $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, D)$, 有

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h);$$

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ 中存在态射 id_A, 具有如下性质: 对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, A)$ (B 为 $\mathfrak{C}$ 的任一对象), 有

$$\mathrm{id}_A \circ f = f, \quad g \circ \mathrm{id}_A = g.$$

定义 2.2　设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是两个范畴. 如果 Obj $\mathfrak{D}$ 是 Obj $\mathfrak{C}$ 的一部分, 并且对于 Obj $\mathfrak{D}$ 的任意二对象 X 和 Y, 都有

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y), \tag{0.1}$$

则称 $\mathfrak{D}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴**. 若 (0.1) 式中的 “$\subseteq$” 是 “$=$”, 则称 $\mathfrak{D}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**全子范畴**.

定义 2.3 设 X 和 Y 为 $\mathfrak{C}$ 的二对象. 如果存在 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 和 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$, 使得 $fg = \mathrm{id}_X$, $gf = \mathrm{id}_Y$, 则称对象 X 和 Y **同构**.

例 2.4 设 $\mathfrak{G}$ 的对象 Obj $\mathfrak{G}$ 为所有的群, 对于两个群 G_1 和 G_2, 令 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(G_1,G_2)$ 为 G_1 到 G_2 的所有群同态组成的集合, 对于三个群 G_1, G_2, G_3, 规定

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(G_1,G_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(G_2,G_3) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(G_1,G_3),\\ (\sigma,\tau) &\mapsto \sigma\tau.\end{aligned}$$

这样就定义了一个范畴 $\mathfrak{G}$, 称为群范畴 (注意: Obj $\mathfrak{G}$ 不是集合). 群范畴 $\mathfrak{G}$ 中二对象的同构就是群同构. 完全平行地可以定义交换群范畴 **Ab**, 即 Obj **Ab** 为所有的交换群; 对于 $A, B \in \mathrm{Obj}\ \mathbf{Ab}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,B)$ 为 A 到 B 的所有群同态组成的集合, **Ab** 是 $\mathfrak{G}$ 全子范畴. 环范畴 $\mathfrak{R}$ 的对象 Obj $\mathfrak{R}$ 为所有的环; 对于 $R, S \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{R}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(R,S)$ 为 R 到 S 的所有环同态组成的集合, $\mathfrak{R}$ 是 **Ab** 的子范畴, 但不是全子范畴 (例如, 有理数域 $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}$, 易见 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ 只含有零同态和恒同映射, 而 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ 是无穷集合).

类似地, 我们可以定义域范畴、一个域 F 上的线性空间范畴、拓扑空间范畴、集合范畴, 等等.

两个范畴的联系可以用所谓的“函子”给出.

定义 2.5 设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是两个范畴、由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**共变函子** (或**协变函子**) F 是指:

(1) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, F 规定了 $\mathfrak{D}$ 中的相应的对象 $F(X)$;

(2) 设 X 和 Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意二对象. 对于任一 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, F 规定了 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(X),F(Y))$ 中的一个元素 (态射) $F(f)$, 满足:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (\forall\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,Z)) \qquad (0.2)$$

以及

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

如果将 (0.2) 式改为

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \quad (\forall\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,Z)),$$

则称 F 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**反变函子**. 共变函子和反变函子统称为**函子**.

相应于一个范畴 $\mathfrak{C}$, 有它的**反范畴**(记为 $\mathfrak{C}^0$). $\mathfrak{C}^0$ 的对象与 $\mathfrak{C}$ 的对象相同, 但是对于 $\mathfrak{C}^0$ 中二对象 X, Y 之间的态射集合规定为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^0}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$. 于是, 由范畴 $\mathfrak{C}$ 到范畴 $\mathfrak{D}$ 的反变函子可以视为由 $\mathfrak{C}^0$ 到 $\mathfrak{D}$ 的共变函子.

用函子可以定义两个范畴的同构.

定义 2.6　设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是两个范畴. 如果存在函子 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ 和函子 $G:\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$, 满足:

(1) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, $\mathfrak{D}$ 的任一对象 Y, 都有

$$G(F(X)) = X, \quad F(G(Y)) = Y;$$

(2) 对于 $\mathfrak{C}$ 的任二对象 X 和 X', $\mathfrak{D}$ 的任二对象 Y 和 Y', 都有

$$G(F(f)) = f \quad (\forall\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X')),$$
$$F(G(g)) = g \quad (\forall\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(Y,Y')),$$

则称 F 是由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个**同构**, 同时也称 $\mathfrak{C}$ 与 $\mathfrak{D}$ 是**同构的**或**等价的**.

对于给定的两个范畴, 联系它们之间的函子的概念是"函子态射"(或"自然变换").

定义 2.7　设 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是两个范畴, F 和 G 为由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{D}$ 的两个函子. 由 F 到 G 的一个**函子态射** Φ 是指: 对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, 给定一个态射 Φ_X: $F(X)\to G(X)$, 使得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\
{\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\
F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y)
\end{array}$$

其中 X, Y 为 $\mathfrak{C}$ 的任意两个对象，f 为 X 到 Y 的任一态射. 由 F 到 G 的函子态射的全体记为 $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}(F,G)$. 进一步，如果上述的 Φ_X $(\forall X \in \mathrm{Orb}(\mathfrak{C}))$ 都是同构，则称 Φ 是一个**函子同构**, 并称同构 Φ_X 是**自然的**.

在很多范畴中存在具有特殊重要性的下述对象.

定义 2.8 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴. $\mathfrak{C}$ 的一个对象 U 称为**始对象**, 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(U,X)$ 都只含有一个元素；类似地，$\mathfrak{C}$ 的一个对象 Z 称为**终对象**, 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任一对象 X, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z)$ 都只含有一个元素.

容易看出，如果一个范畴中存在始对象，则所有的始对象都是同构的. 对于终对象也是如此.