高等专科函授试用辅导教材

管理数学讲义

罗祥钰 编

机械工业管理干部学院

目 录

第一篇 微积分学

第一章 函 数

第二章 极 限

第三章 函数的连续性

第四章　导数及微分

第五章　中值定理、导数的应用

第六章　不定积分

第七章　定积分及其应用

第八章　矢量代数与空间解析几何

第九章　多元函数微分学

第一篇　微积分学

第一章　函　　数

函数是高等数学研究的主要对象。在这一章里，我们将介绍函数的基本概念，函数的表示，几种特殊类型的函数，及基本初等函数、复合函数、反函数等。绝对值概念是研究函数特征不可缺少的工具，在这一章里插入一节绝对值概念。

学习本章的要求：

（1）掌握区间的符号用法。

（2）正确理解绝对值的概念，掌握简单绝对值不等式的解法。

（3）正确理解函数的概念，搞清楚函数的对应律、对于已给函数会求它的定义域。

（4）掌握基本初等函数的图形、会描草图，通过图形了解其性质。

（5）了解复合函数的概念，能正确分解复合函数复合的构成，了解反函数的概念。

§1　变量、区间

一、常量与变量

无论我们观察自然现象、参加生产活动或科学试验时，不管么什过程都会遇到一些量。举例说明如下：

例1．在银行定额储蓄，就存在着储蓄金额与利息两个量的问题。

例2．观察某地区某天的气温。

例3．一列客运火车，由北京开往天津，我们遇到的量有：这到火车拖挂的节数，乘客的人数，行车的时间、速度距离等等。

例4．在研究园的周长与半径的比，得到一个量，我们称它为园周率，用π表示（$\pi\approx 3.14159265\cdots\cdots$）

上面各例中遇到的量尽管它们所表示的意义各不相同，但就其状态来看，可分为两大类型。有些量在某一过程中始终保持取一个定值，如定额储蓄的金额，火车拖挂的节数，园周率π等。我们把在某一过程中保持取一确定值的量，称为常量、通常用字母a、b、c、…表示。另一些量在某一个过程中取不同的值。如定额储蓄的利息，乘客的人数，火车行驶的时间、速度、距离等、某天某地区的气温等，我们把在某一过程中取不同值的量，称为变量。通常用字母x、y、z、……表示。这里要指出一点，常量与变量的概念是相对的、有条件的。如例3中乘客人数问题，如果火车由北京直开天津、中间不停车，这样乘客的人数就是一个常量。也有一种常量在任何条下件都保持不变。如园周率π，对于任何

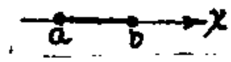
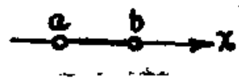
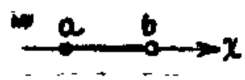
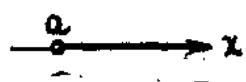
一个圆，它的周长与半径之比都是π，称这样的常量为绝对常量。有条件的常量称为待定常量。

量的取值，都是以实数来表示的。因此，我们把变量又称为变数。常量又称为常数。

二、区间

变量的取值，随着过程的不同，都限定在某一范围，这个范围为某两实数之间的一切实数值，我们把变量取两实数之间一切值称为变量变化的区间。两实数称为区间的端点。

现将变量取值范围、符号、名称以及数轴上的表示（即图象）列表如下：

变量 x 取值范围	符　号	名　称	数轴的表示（即几何意义）
$a\leqslant x\leqslant b$	$[a, b]$	闭区间	
$a<x<b$	(a, b)	开区间	
$a\leqslant x<b$	$[a, b)$	半开区间	
$a<x\leqslant b$	$(a, b]$	半开区间	
$a<x$	$(a, +\infty)$	无限区间	
$a\leqslant x$	$[a, +\infty)$	无限区间	
$x<b$	$(-\infty, b)$	无限区间	
$x\leqslant b$	$(-\infty, b]$	无限区间	
x取全体实数	$(-\infty, +\infty)$	无限区间	整个实数轴

表中的a、b为二个实数（常量）并且 $a<b$。a、b 可以全为负或全为正，a也可以为负

b为正，x为变量。不等式$a\leqslant x\leqslant b$表示x取a、b之间任何值，包括端点a、b在内，符号用方括号。如果变量x不取端点上的值，不等号“$\leqslant$”换成“$<$”，方括号换成园括号。

注意表中的图象都是数轴，粗线部分表示区间的图象，空园圈表示不包括该点。另外，以后对于数轴上的点与点所对应的坐标不加区别、如$x=3$它既表示变量x取3这一实数值，同时也表示在数轴上坐标为3的点的位置、简单地说成点$x=3$。

下面举例说明变量取值区间：

例1.广播电台每天都广播天气预报，如北京气象台预报北京地区85年2月11日的气温变化说：最低温度为$-4C°$，最高温度为$5C°$。说明这一天的气温是一个变量，以T表示，它的变化范围为：$-4C°\leqslant T\leqslant 5C°$，用符号表示记作$[-4,5]C°$，图象表示如图1.1所示：

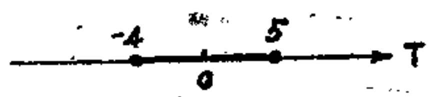


图 1.1

例2.人的身长是一个变量用l表示，人一出生就有身长，这身长既不会等于零更不会小于零，一定大于零，最高的身长，到目前为止，还没有发现达到3米的记载，因此可以说最高人的身长小于3米、这样我们得到人的身长变化为，$0<l<3$（米），用区间表示：$(0,3)$。

图形如图1.2所示

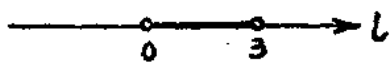


图 1.2

区间的一种特殊情况：开区间$(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$其中a为任意实数，$\delta$是某一正数。称此开区间为$\alpha$的$\delta$邻域（简称$\alpha$的邻域）。

邻域的几何意义：所谓a点的邻域，即以a为中心，2δ长为区间长的开区间，如图1.3所示

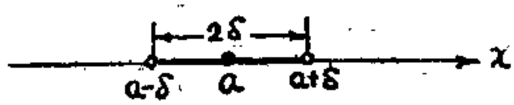


图 1.3

§2 绝对值及绝对值不等式

1.绝对值的概念

定义：

$$|a|=\begin{cases}a, & 当a\geqslant 0\\ -a & 当a<0,\end{cases}$$

称$|a|$为a的绝对值，这里的两条平行线段“| |”为绝对值的符号。

绝对值的含义是：当a是非负值（即a大于或等于零）时，a的绝对值就是a的本身，当a为负值时，a的绝对值为a的相反数，也就是在a的左边添加一个“—”号。

例1．　　$|4|=4$；　　$|0|=0$；

$$|-4|=-(-4)=4。$$

绝对值的几何意义，如果把a看作数轴上点P的坐标，那末 $|a|$ 就表示线段$\overline{OP}$的长度，即点P到原点的距离。

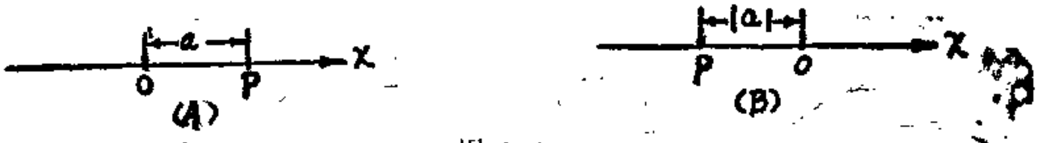


图 1.4

如图1.4(A)(B)所示，当点P在原点O的右边，点P的坐标$a>0$，线段$\overline{OP}$的长就等于点P的坐标。当点P在原点O的左边，点P的坐标$a<0$，这时线段$\overline{OP}$的长用点P的坐标的相反数“—a”表示。一般的情况下，已知点P的坐标为a，没有指出点P在原点的那一侧，这时的线段$\overline{OP}$的长就用 $|a|$ 表示。

2．绝对值不等式

（Ⅰ）不等式

$$|x|\leqslant N(或\ |x|<N,N>0) \qquad (Ⅰ)$$

称为绝对值不等式。

根据绝对值的定义：（Ⅰ）式可改写成

$$x\leqslant N \qquad 当x\geqslant 0时$$

或

$$x\geqslant -N \qquad 当x<0时$$

这两个不等式可合并写成

$$-N\leqslant x\leqslant N \qquad (Ⅰ')$$

也就是说，绝对值不等式（Ⅰ）等价于一个双边不等式（Ⅰ′）（所谓“等价”，是指（Ⅰ）式可用（Ⅰ′）代替，反之（Ⅰ′）也可写成（Ⅰ）的形式。）

不等式（Ⅰ）的几何意义：如图1.5所示。

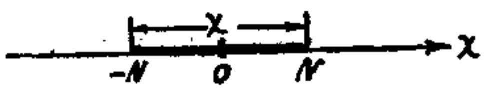


图 1.5

即表示以原点为中心，长为2N的对称区间，x可取－N到N之间包括两端点值在内的一切值。

例3：有不等式

$$|x|<5$$

此式可以改写成双边不等式，即有

$$-5<x<5$$

如图1.6所示

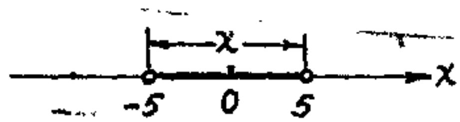


图 1.6

即x取开区间（-5，5）内一切的值。

（ii）不等式

$$|x|\geqslant M \qquad (\text{或} |x|>M, M>0) \qquad (\text{II})$$

也称为绝对值不等式。

由定义，（II）式可改写成

$$\begin{cases} x\geqslant M & \text{当}x\geqslant 0\text{时} \\ \text{或} \\ x\leqslant -M & \text{当}x<0\text{时} \end{cases} \qquad (\text{II}')$$

也就是说（II）与（II′）等价的。几何意义如图1.7所示

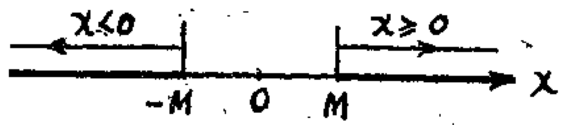


图 1.7

即表示当$x<0$,时，x取半开半闭区间（$-\infty$，$-M$]内一切值，当$x\geqslant 0$时，x取半开半闭区间[M，$+\infty$）内一切值。

3.绝对值不等式的解法。

例4.设$|3x-5|<2$，求x的变化范围。

解：利用绝对值不等式（I），绝对值不等式

$$|3x-5|<2$$

可以改写成双边不等式

$$-2<3x-5<2$$

解此双边不等式（不等式各部分先加5，然后除以3）得

$$1<x<\frac{7}{3}$$

即x变化范围在开区间$\left(1, \frac{7}{3}\right)$内。

例5、设$|5x+4|\geqslant 3$，求x的变化范围。

解：利用绝对不等式（II），绝对值不等式

$$|5x+4|\geqslant 3$$

可改写成：

$$5x+4\geqslant 3$$

或

$$5x+4\leqslant -3$$

即等价两个不等式，解此两个不等式，由第一个不等式解得

$$x\geqslant -\frac{1}{5}$$

由第二个不等式解得

$$x \leqslant -\frac{7}{5}$$

得x的变化范围为两部分：（$-\infty$，$-5/7$）或（$-5/1$，∞），
如图1.8所示

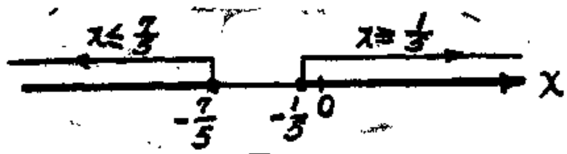


图 1.8

给定绝对值不等式，求x的变化范围，也叫做解绝对不等式，都是求出满足给定的绝对值不等式的x的值。给定绝对值在等式求x的变化范围的步骤如下：

（1°）把给定的绝对值不等式化成（Ⅰ）或（Ⅱ）的形式；

（2°）变绝对值不等式为等价的不等式（Ⅰ′）或（Ⅱ′）；

（3°）解等价不等式（Ⅰ′）或（Ⅱ′），就得原绝对值不等式的解。

注意一点，绝对值不等式的解一般的情况下都是有限区间或无限区间。

4．绝对值计算基本公式

（i）和的绝对值

$$|a \pm b| \leqslant |a| + |b| \qquad \langle 1 \rangle$$

即两数代数和的绝对值，小于或等于这两数绝对值之和。下面举例验征。

例6． 如 $|5+8| = |13| = 13$

$|5| + |8| = 5+8 = 13$

所以 $|5+8| = |5| + |8|$

例7． 如 $|-4-3| = |-7| = 7$

$|-4| + |-3| = 4+3 = 7$

所以 $|-4-3| = |-4| + |-3|$

例8． 如 $|3-8| = |-5| = 5$

$|3| + |-8| = 3+8 = 11$

所以 $|3-8| < |3| + |-8|$

通过以上三例，显然看出〈1〉的正确性，〈1〉对于有限多个数的代数和的绝对值也是成立的。即有

$$|\alpha + b + \cdots + m| \leqslant |\alpha| + |b| + \cdots |m|$$

（Ⅱ） 积的绝对值

$$|\alpha \cdot b| = |\alpha||b| \qquad \langle 2 \rangle$$

即两数乘积的绝对值等于这两数绝对值之积。由于积的绝对值与积的各因式的符号无关，故〈2〉成立。〈2〉式对有限个数之积也成立。即有

$$|a \cdot b \cdots\cdots m| = |a||b| \cdots |m|$$

（Ⅲ）商的绝对值

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b\neq o) \qquad \langle 3\rangle$$

即两数商的绝对值，等于这两数绝对值之商。<3>式也显然成立。因为商的绝对值与被除数及除数的符号无关。

§3、 函数概念

1．举例

例1．设正方形的边长为x，对角线长为y，由勾股定理知，边长x与对角线长y之间关系由下式给出：

$$y=\sqrt{2}x$$

这关系式告诉我们正方形的对角线随正方形的边长变化在变化。

例2．一个物体在真空中自由下落，物体所经过的路程S与下落时间之间有关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

其中g为重力加速度，是一个常数，t_0 为物体开始下落的时刻，t_1 为物体达到地面的时刻。

例3．如温度一定时，一定质量的气体容积V与压力P成反比（波义耳定律）表示成下面等式

$$V=\frac{C}{P}$$

其中C是比例常数。

例4．某气象站用自动温度记录仪记上某一昼夜气温变化情况。如图1.9所示（横坐标为时间t，纵坐标为温度T），这图形象地表示出温度T随时间t变化而变化的规律。当时间t在0时到24时之间取某一确定的时刻，就有一个确定的温度T与之对应。例如当t=12时时，就有一个温度T=14C°与之对应。

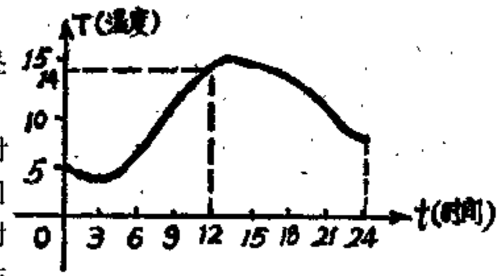


图1.9

例5．某工厂组装车间某年每月完成任务情况如下表

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
组装机床台数	32	32	35	34	36	38	39	39	38	40	38	40

这表给出了该厂组装机床的数量与月分建立了对应的关系。

从以上的例子我们看到，无论是观察自然现象，还是从事生产实践或科学试验，每一个过程都会遇到一些量（变量），它们之间存在着一定的联系。下面我们将抛弃各例的具体的含意抽象成一般的概念进行研究。

2．函数的概念

（Ⅰ）定义：在某一过程中，存在着两个变量 x，y，当变量x在某一范围内任取某一值时，变量y按照一定的规律有一个确定的值于之对应。则称变量y为变量x 的函数，变量x称为自变量；变量y也称为因变量。一般地记作

$$y=f(x) \text{ 或} y=g(x), \; y=h(x), \; \cdots$$

其中x表示自变量，y为x的函数，括号外面的f，g，h，…表示着y与x之间某种对应规律，是一种抽象的符号，对不同的问题表示不同的意义。在同一个过程中，不同的对应关系要用不同的字母表示函数关系。例如在某一过程中$y=x-2$，$z=x^2$，如果写成抽象的函数关系，如果已写成$y=f(x)=x-2$，就不能再表示$z=f(x)=x^2$。

另外，有时为了节省符号、把函数关系表示成$y=y(x)$，$z=z(x)$等等。

定义中的"当变量x在某一范围内任取某一值时，变量y按照一定的规律有一个确定的值于之对应，"并不要求x取不同值时，y也取不同的值。由此，我们把y＝A（常数）也看作为x的函数，即x取任意一实数值时，y都以A值于之对应。

（Ⅱ）函数的表示

定义中所说"因变量y按照一定的规律有一个确定的值于之对应"，就是指自变量与因变量之间的依赖关系，即对应规律（又称对应律，或对应法则）。对应律具体表达形式就是所谓函数的表示。其表示法有(1)解析法，(2)图示法，(3)列表法等三种形式。

例1．例2．例3都是以数学公式（等式）表达自变量与因变量之间对应关系的。我们把凡是用数学公式（等式）表示对应规律的，称为解析法，其数学公式（等式）称为解析式。以上所例举用解析式表示函数关系，都是用一个等式来表示其对应规律。

例如，某工厂为了鼓励全厂职工对参加企业改革的积极性，颁布一个奖励办法，凡提合理化建议被采纳，经济效益在千元以下（包括千元），奖励经济效益的5％，千元以上万元以下（包括万元）增加超过千元部分的3％，万元以上，增加超过万元部分的1％。这里的奖金y与合理化建议所产生经济效益x之间是一个函数关系，有

$$y=\begin{cases} 0.05x & 0<x\leqslant 1000 \\ 50+0.03x & 1000<x\leqslant 10000 \\ 320+0.01x & x>10000 \end{cases}$$

由于经济效益的不同，奖励的办法也不同，这种关系必须分段表示。

例4是通过图象表示其对应律的，称此种形式为图象法。

例5是以表格表示其对应律的，称此种形式为表格法。数学用表都是以表格法表达函数对应关系的实例。

本课程以后所研究的函数对应规律，主要是用解析法表示的。有时图象与解析法结合使用，对研究函数某些特性是有益的。

函数的几何意义：函数$y=f(x)$，表示平面上一条以$y=f(x)$为方程的曲线。

（Ⅲ）函数的定义域

定义中谈到自变量x在某一范围取值，我们把自变量的取值范围称为函数的定义域。因变量y所得对应值的全体为函数的值域。

给定一个函数，我们首先要知道函数的定义域，这对于我们对函数进行研究是不可缺少的一步，否则就有可能出现劳而无功的效果。

确定函数定义域方法举例说明：

例6．试确定函数 $y=\sqrt{2}x$的定义域

解：对于任意一实数x，$\sqrt{2}x$都有一个确定的值，因此函数$y=\sqrt{2}x$的定义域为全体实数、记作$-\infty<x<+\infty$。

如果把例6给定的解析式中的x看作是正方形的边长，y为正方形对角线的长，它就与例1的解析式一样，这时的x不能取负值，它的定义域为$0\leqslant x<+\infty$，

这例子告诉我们，单纯地从数字表达式出发确定函数的定义与从实际问题出发确定的函数定义域有时是不一致的。因此我们在确定函数定义域时分两种情况考虑，对于由实际问题而得到的函数关系确定其定义域，一定要根据实际情况要求而定。如果是给定的一般解析式，就从给定解析式出发确定函数的定义域。

例7．确定 $y=\frac{x}{x^2-1}$的定义域。

解：$x^2-1=(x-1)(x+1)$

要 $X^2-1=0$，只要$X-1=0$即$X=1$，或$X+1=0$，即$X=-1$，

当$X^2-1=0$时，$\frac{X}{X^2-1}$无意义，即当$X=1$或$X=-1$时，y没有确定的值于之对应，因此函数定义域为$X\neq1$和$X\neq-1$的全体实数。用区间表示定义域为：

$(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$三部分。

例8：求 $y=\sqrt{3x-2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$的定义域

解：自变量x取值要使$\sqrt{3x-2}$有意义，即要$3x-2\geqslant0$，同时也要使$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$有意义，即要$x+2>0$，因此确定x的取值范围就变为求下列不等式组的解。

$$\begin{cases}3x-2\geqslant0 & ①\\ x+2>0 & ②\end{cases}$$

解此不等式组

由①得 $x\geqslant\frac{2}{3}$

由②得 $x>-2$

两不等式解的重合部分，就是不等式组的解，不等式组的解为

$$x\geqslant\frac{2}{3}$$

也就是说，当$x\geqslant\frac{2}{3}$时，$\sqrt{3x-2}$，$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$都有意义，因此函数的定义域为

$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

例9．求函数 $y=\log a(x-1)+\frac{1}{x-2}$的定义域。

解：要$\log a(x-1)$有意义，必须$x-1>0$

要$\frac{1}{x-2}$有意义，必须$x\neq 2$

因此求函数定义域问题，化为求不等式组

$$\begin{cases} x-1>0 & ① \\ x\neq 2 & ② \end{cases}$$

解的问题，解此不等式组。两不等式的解分别为

$$\begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

不等式组的解为此两个不等式解的重合部分，所以不等式组的解为$1<x<2$，$2<x<+\infty$

故函数的定义域为：$1<x<2$，$2<x<+\infty$

确定函数定义域的一般方法归纳如下：

1°）整式函数（多项式）的定义域为全体实数。

2°）有理分式函数（分子、分母都为整式）定义域为除去使分母为零值的全体实数。

3°）对于无理函数（即根式），如果是奇次根式定义域为全体实数，偶次根式，定义域为使根式内被开方式子保持非负值的全体自变量的值。如果根式为分母，还要除去使被开方式子等于零的值。

4°）如果函数解析式是对数形式，定义域为使真数保持大于零的一切自变量的值。

5°）给定的函数解析式如例8，例9的形式，首先把给定函数分解成若干部分，求出每一部分的的定义域，最后求所有各部分定义域的公共部分，就是给定函数的定义域。简便的方法把各部分确定定义域的条件联立成一个不等式组，这不等式组的解就是给定函数的定义域。

例10.已知$y=\sqrt{x+3}+\log_a(3x-5)+\frac{x}{\sqrt{5-x}}$求x的取值范围。

解：把给定函数分成$\sqrt{x+3}$，$\log_a(3x-5)$，$\frac{x}{\sqrt{5-x}}$三个部分，得不等式组

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ 3x-5>0 \\ 5-x>0 \end{cases}$$

解此不等式组，得解为　$\frac{5}{8}<x<5$。

给定函数的定义域为开区间$\left(\frac{5}{3},\ 5\right)$。

（Ⅳ）对应函数值

所谓对应函数值，就是在给定自变量x一个值x_0，用x_0代替给定的函数解析式中的自变量x，然后经过运算就得到在$x=x_0$，时的对应的函数值。

例11. 已知$y = 3x^2 - \frac{x+1}{x+3}$ 求$f(o)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(-2)$，$f(a)$

解：设$y = f(x)$，这里的$f(x) = 3x^2 - \frac{x+1}{x+3}$，

所谓求$f(0)$，就是求$x = 0$时对应的函数值，具体做法把函数$f(x)$中的自变量x以0代替，并计算出最后的确定数值。

$$f(0) = 3\cdot(0)^2 - \frac{0+1}{0+3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 就是求$x = \frac{1}{2}$时对应的函数值，只要把$f(X)$中的自量x换成 $-\frac{1}{2}$，

所以 $$f(\frac{1}{2}) = 3\cdot(\frac{1}{2})^2 - \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+3} = \frac{3}{4} - \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$$

同理 $$f(-2) = 2\cdot(-2)^2 - \frac{(-2)+1}{(-2)+3} = 13$$

$$f(a) = 3(a)^2 - \frac{a+1}{a+3} = 3a^2 - 1 + \frac{2}{a+3}$$

（V）函数等价问题

函数定义的两个条件是函数关系的两个重要的因素，要判别两函数是否恒等（等价），主要观察这两条是否一致。

例12. $f(x) = \lg x^2$，$g(x) = 2\lg x$，是否恒等？

解：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，$g(x)$的定义域为$(0, +\infty)$定义域不同，$f(x)$ $g(x)$不恒等。

如果$f(x)$在$(0, +\infty)$上定义，这时$f(x) \equiv g(x)$，因为定义域与对应律都一致。

例13. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1}$，$g(x) = x - 1$是否恒等？

解：$f(x)$定义域为$x \neq 1$的全体实数。而$g(x)$定义域为全体实数。定义域不相同，$f(x)$，$g(x)$不恒等。

§4、 几种特殊的函数

函数的形式虽然多种多样，有些函数，具有某种共同的特性，我们按具有某种共同特性的函数进行分类：

一、有界函数

在三角学中我们知道正弦函数$Y = \sin x$，余弦函数$Y = \cos x$，当x取任意实数值时，都有

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

也可以写成

$$|\sin x| \leqslant 1 \qquad\qquad |\cos x| \leqslant 1$$

就是说，对应的函数值的绝对值总是小于或等于1。由于正弦函数与余弦函数具有这样的共同特性，我们称正弦函数、余弦函数为有界函数。其各自的几何意义如图1.10、1.11所示。

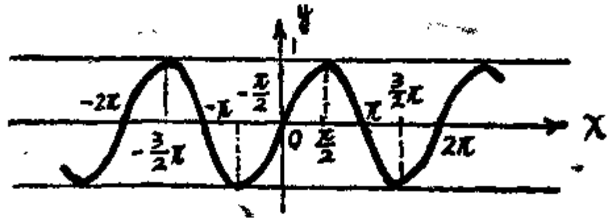


图 1.10

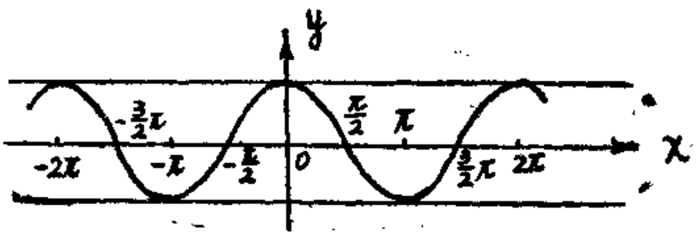


图 1.11

即函数的图都落在以两条平行直线$y=1$，$y=-1$为边界的带形区域内。

一般的有界函数有如下的定义：

定义：函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义（即闭区间$[a,b]$为函数$f(x)$的定义域，如果定义域为开区间(a,b)则说在(a,b)内）如果存在$c>o$，对于$[a,b]$上任意一点x，都有

$$|f(x)| \leqslant c$$

称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界。

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界的几何意义是函数$f(x)$的图象在区间$[a,b]$上都落在以两条直线$y=c$，$y=-c$为边界的带形区域内、如图1.12所示。

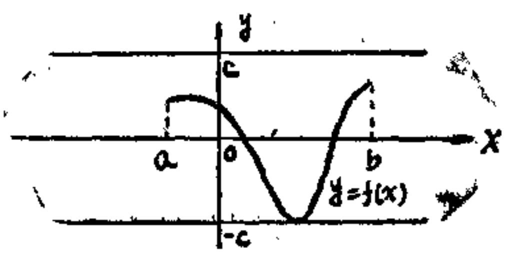


图 1.12

二、奇函数与偶函数、

定义：函数$y=f(x)$在其定义域内，以$-x$代替x，函数值不变，即$f(-x)=f(x)$，称函数$f(x)$为偶函数。以$-x$代替x，函数值的绝对值不变，函数值相差一个负号，即$f(-x)=-f(x)$称函数$f(x)$为奇函数。

例1：设$f(x)=x^2$，$g(x)=\cos x$，以$-x$代替这两个函数中的x。有

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

$$g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$$

由定义知　f(x)、g(x)都是偶函数。函数的图象如图1.13(A)、(B)

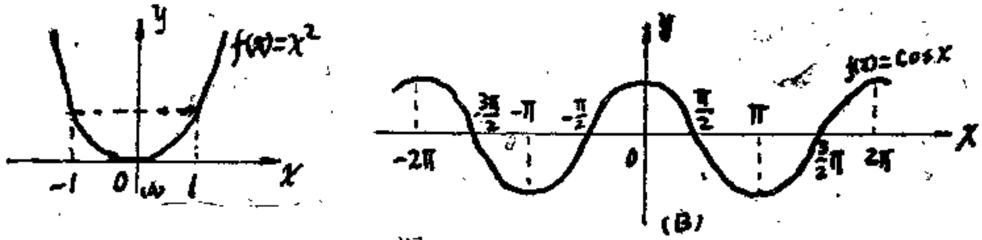


图 1.13

这两个函数图象有一个共同特点，都是以y轴对称的图象，由此可推知偶函数图象的特征是以y轴为对称的。

例2：　设　$f(x)=\dfrac{1}{x}$　,$g(x)=\sin x$,当以$-x$代替两函数中的x,有

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

$$g(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-g(x)$$

由定义知　f(x)、g(x)都是奇函数。函数的图象如图1.14(A),(B)所示,

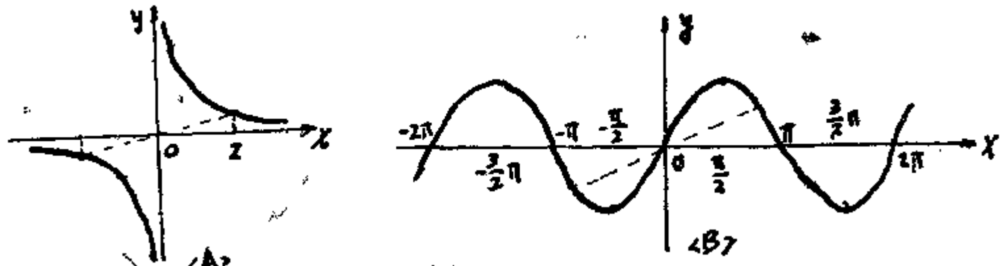


图 1.14

这两个函数图象共同的特点，都是以原点O为对称的图象，由此可推知奇函数图象的特征是以坐标原点O为对称的。

三、单调函数

定义：函数f(x)在区间(a,b)内有定义，(a,b)内任意两点x_1,x_2,且$x_1<x_2$,如果满足

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad(\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数f(x)在区间(a,b)内为单调增函数(单调减函数)。称区间(a,b)为单调区间。单调增函数的图象是单调上升的,如图1.15<c>,<b>所示。单调减函数的图象是单调下降的，如图1.15<c>,<d>所示。