高等学校教材经典同步辅导丛书数学基础类(一)
配高教社《高等数学》同济·第六版　上、下册合订本

高等数学
习题全解

上、下册合订本　同济·第六版

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　范亮宇
本书主编　同济大学　王建福

◇紧扣教材　◇知识精讲　◇习题全解
◇应试必备　◇联系考研　◇网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

高等数学

上下册合订本

习 题 全 解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，同济大学应用数学系编的《高等数学》(第六版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、学习要求、知识点归纳、历年考研真题评析及课后习题全解等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校高等数学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册合订本)习题全解/王建福主编．徐州：中国矿业大学出版社，2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-395-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题参考资料　Ⅳ.O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086954 号

书　　名　高等数学(上、下册合订本)习题全解
主　　编　王建福
责任编辑　罗　浩
选题策划　孙怀东
特约编辑　李南木
出版发行　中国矿业大学出版社
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　880×1230　1/32　**本册印张** 21　**本册字数** 451 千字
印　　次　2007 年 8 月第 1 版第 2 次印刷
总 定 价　114.00 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前 言

《高等数学》是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程，也是全国硕士研究生理工专业入学考试的统考课。

同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学习题全解》(第六版)。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性，启发性，指导性和补充性的特点。

考虑到《高等数学》这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书中的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 学习要求　说明该章包括的主要内容，学习的侧重点，以及要掌握的知识点。

3. 内容精要　串讲概念，总结性质和定理，使知识全面系统，便于掌握，并注重知识点之间的联系，使知识融会贯通。

4. 历年考研真题评析　精选近年名校考研真题并进行深入地讲解。

5. 课后习题全解　给出了同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)各章习题的答案。我们给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

6. 2007 年考研真题　本书在最后附有 2007 年研究生统考数学试题，并给出了相应的答案，便于学生对自己的学习效果进行考核。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：http：//www.huatengedu.com.cn

电子邮件：huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

课程学习指南

高等数学是理工类、经济管理类等各专业必修的一门重要的理论基础课，又是学习后续技术基础课程和专业课程的重要基础，也是有关各专业研究生入学考试的必考科目。

学习高等数学的目的是要掌握高等数学的基本概念、基本定理以及重要公式，进而提高分析问题与解决问题的能力，同时也为后续各专业课的学习打下基础。

高等数学具有很强的理论性和逻辑性，需要一定的初等数学基础。同时，高等数学具有很广泛的基础性和适用性，是电学、力学、化学、经济管理等许多专业最重要的先修课程。电学中电路理论、数学信号处理等课程中都广泛运用了微积分、傅立叶级数等相关知识。化学中物理化学、分析化学等课程都用到了高等数学中的微积分、导数等相关知识。力学中理论力学、材料力学等课程都用到了微积分、无穷级数等相关知识。同样在经济管理类学科中，高等数学也得到了广泛运用。

高等数学共分为五个部分。第一部分函数与极限，主要讲述了函数与极限的基本概念、性质及定理；第二部分为一元微积分，主要讲述了导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、微分方程及其应用；第三部分为空间解析几何与向量代数，主要讲述了向量的运算及曲线曲面方程；第四部分为多元微积分，主要讲述了多元函数微分法、重积分、曲线曲面积分；第五部分为无穷级数，主要讲述了常用级数的概念、性质以及判定方法。

为了加强读者对高等数学相关知识的掌握，为了帮助读者学好这门基础课程，建议在学习过程中按以下方法学习：

1. 掌握基本概念、理解基本定理、熟记重要公式。
2. 要注意前后联系，融会贯通，保持知识的连贯性。
3. 培养自己分析和解决问题的能力。
4. 培养自己抽象思考和逻辑推理的能力。
5. 要养成认真思考、细心推导的良好学习习惯。

此外，为了帮助学生在期末、考研等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. 爱思考、勤分析。准确判断问题所蕴含的数学知识，并能够建立对应的模型，想出解决方法。

2. 能抽象、会推导。把具体的、复杂的问题化为抽象的、简单的数学问题，并能合理运用相关公式进行推理、演绎。

3. 多做题、善归纳。要解答大量的相关题目，并归纳总结解题思路及技巧，做到举一反三。

第一章

函 数 与 极 限

学习要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

内容精要

1. 定义

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

2. 函数的性质

(1) 函数的有界性

如果存在正数 M,对于任意的 $x \in Z$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 **Z** 内有界.

(2) 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于 I 内的任意两个数 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$[或 $f(x_1) > f(x_2)$],则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加[或单调减少].

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于 D 内的任意 x,恒有 $f(-x) = f(x)$[或 $f(-x) = -f(x)$],则称 $f(x)$ 为偶函数[或奇函数].

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 T,使得对于任意 $-x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$,且 $f(x \pm T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 极限计算的法则,公式,定理

(1) 无穷小量的性质与运算法则;

(2) 极限的四则运算法则;

(3) 复合函数极限的运算法则;

(4) 极限存在的两个准则;

(5) 两个重要极限:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e};$$

(6) 无穷小的等价代换定理:

常用等价无穷小:当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \mathrm{e}^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x\ln a, \ln(1+x) \sim x, \sqrt[n]{1+x^m} - 1 \sim \frac{x^m}{n}$.

4. 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有意义,则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

5. 间断点

不连续的点叫做间断点.

不连续的原因有三种:一是 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义;二是 $f(x)$ 在点 x_0 处无极限;三是 $f(x)$ 在点 x_0 处既有定义,又有极限,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值、最小值定理:闭区间上的连续函数在该区间上一定会取得最大值和最小值.

(2) 有界性定理:闭区间上连续函数一定在该区间上有界.

(3) 介值性定理:① 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(a)=A$,$f(b)=B$,且 $A\neq B$,则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

② 闭区间上的连续函数一定会取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

③ 零点定理:设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,即 $f(a)f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

典型例题与解题技巧

例 1 判别下列各组函数是否相等:

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$;

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=|x|$ 与 $h(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

分析 当且仅当给定的函数,其定义域和对应法则完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故 $f(x)\neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(x)=g(x)=h(x)=|x|$,故 $f(x)=g(x)=h(x)$.

例 2 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\log\cos x}$ 的定义域.

分析 求解简单函数的定义域所构成的不等式组.

解 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \cos x>0\\ \cos x\neq 1\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},(n=0,\pm1,\pm2\cdots)\\ x\neq 2n\pi\end{cases}$

上述不等式组的解为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

即所求 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$($a,b,c$ 均为常数,且 $|a|\neq|b|$),

求 $f(x)$.

分析 利用函数表示法的"变量无关性":当两个函数定义域相同、对应法则一致时,这两个函数表示同一个函数.

解 由题意可知 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \qquad ①$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$,则 $x=\dfrac{1}{t}$ 故 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$,

所以
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx, \qquad ②$$

联立 ①、② 解得
$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right).$$

例 4 判别下面函数的奇偶性:$y=\begin{cases}x(1-x), & x\geqslant 0,\\ x(1+x), & x<0.\end{cases}$

分析 分段函数奇偶性仍按定义,注意分区间判定.

解 令 $f(x)=y=\begin{cases}-x^2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+x, & x<0.\end{cases}$

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x=-f(x)$

当 $x<0$ 时,$f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$

所以该函数为奇函数.

例 5 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小,证明:对任意两点 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

分析 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调是唯一的条件,因此要从 $\dfrac{f(x)}{x}$ 出发,逐步构造和结论联系的桥梁.

解 不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$,故有 $\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$,

即 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$,又 $x_2<x_1+x_2$,则 $\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

得 $x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2(f(x_2)+f(x_1))$

即 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

例 6 求函数 $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$ 的反函数.

分析 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出,然后变换 x、y.

解 当 $x\neq 0$ 时,将原式变形为 $y(10^{2x}-1)=10^{2x}+1+(10^{2x}-1)$

即$(y-2)10^{2x}=y$解得$x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{y-2}$,

故反函数为$y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}$.

例 7 设$f(x)=\frac{1}{1-x}$,求$f[f(f(x))]$;$f(\frac{1}{f(x)})$.

分析 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替.

解 $f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$, $(x\neq 0)$

$$f[f(f(x))]=f(\frac{x-1}{x})=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x,$$

$$f(\frac{1}{f(x)})=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{1}{x}(x\neq 0).$$

例 8 设$y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于$x=a,x=b$均对称$(a<b)$求证:$y=f(x)$是周期函数并求其周期.

分析 关键是构造T,使$f(x+T)=f(x)$.

解 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))$

$=f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x)$.

所以$f(x)$是周期函数,$2b-2a$是它的一个周期.

例 9 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+n-4}=0$.

分析 有时求N,在"放大"过程中还需要添加一定限制条件

解 对$\forall\varepsilon>0$,找N,使得$\left|\frac{2n-1}{n^2+n-4}-0\right|<\varepsilon$,

而$\left|\frac{2n-1}{n^2+n-4}-0\right|<\frac{2n-1}{n^2+n-4}$限制$n>4$,

则$\frac{2n-1}{n^2+n-4}<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}<\varepsilon$,取$N=[\frac{2}{\varepsilon}]$

所以$\forall\varepsilon>0$,取$N=\max\{4,[\frac{2}{\varepsilon}]\}$,当$n>N$时$\left|\frac{2n-1}{n^2+n-4}-0\right|<\varepsilon$.

例 10 设$a_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{n\pi}{2}$,证明数列$\{a_n\}$没有极限.

分析 证$\{a_n\}$没有极限,只需找到两个子列分别收敛到不同值即可.

证 设k为整数,若$n=4k$,则

$$a_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0,$$

若 $n=4k+1$,则

$$a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=1+\frac{1}{4k+1}\to 1(k\to+\infty),$$

因此 $\{a_n\}$ 没有极限.

例 11 用定义证明:$a>0$ 时,$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

分析 解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,用定义证得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证 不妨设 $\forall\varepsilon,0<\varepsilon<\sqrt{a}$. $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon\Leftrightarrow\sqrt{a}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{a}+\varepsilon$

$\Leftrightarrow\qquad(\sqrt{a}-\varepsilon)^2<x<(\sqrt{a}+\varepsilon)^2$

$\Leftrightarrow\qquad(\sqrt{a}-\varepsilon)^2-a<x-a<(\sqrt{a}+\varepsilon)^2-a,$

注意 $\qquad(\sqrt{a}-\varepsilon)^2-a=-[a-(\sqrt{a}-\varepsilon)^2]<0,$

$$0<(\sqrt{a}+\varepsilon)^2-a=2\sqrt{a}\varepsilon+\varepsilon^2>2\sqrt{a}\varepsilon-\varepsilon^2=a-(\sqrt{a}-\varepsilon)^2.$$

因此,$\forall\varepsilon,0<\varepsilon<\sqrt{a},\exists\delta=a-(\sqrt{a}-\varepsilon)^2>0$.

当 $|x-a|<\delta$ 时,有 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$($x=a$ 时自然成立),即 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

例 12 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ x-2, & |x|>1.\end{cases}$ 试讨论 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

分析 题中函数是分段表达式,讨论 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的极限值必须考虑左、右极限.

解 ① 由题目条件知:

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & 当\ x<-1,\\ x, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-2, & 当\ x>1.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-2)=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}x=1$.

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 不存在.

② 因 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-3$,

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 不存在.

例 13 证明:$f(x)=x\sin x$,当 $x\to\infty$ 时无界,但非无穷大.

分析 无界指的是可以取任意不定的数,而无穷大指的是取的数趋向无穷大.一定要分清这两个概念.