



高等学校教材经典同步辅导丛书数学基础类(一)
配高教社《高等数学》同济·第六版 上、下册合订本

高等数学 习题全解

上、下册合订本 同济·第六版

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

◆紧扣教材 ◆知识精讲 ◆习题全解
◆应试必备 ◆联系考研 ◆网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

013
23/-6(3)

高等数学

上下册合订本

习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 范亮宇

本书主编 同济大学 王建福

15151851808

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版,同济大学应用数学系编的《高等数学》(第六版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、学习要求、知识点归纳、历年考研真题评析及课后习题全解等部分组成,旨在帮助读者掌握知识要点,学会分析问题和解决问题的方法技巧,并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校高等数学课程的同步辅导使用,也可作为研究生入学考试的复习资料,同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册合订本)习题全解/王建福主编.

徐州:中国矿业大学出版社,2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7 - 81107 - 395 - 1

I. 高… II. 王… III. 高等数学—高等学校—解題参考资料 IV. O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 086954 号

书 名 高等数学(上、下册合订本)习题全解

主 编 王建福

责任编辑 罗 浩

选题策划 孙怀东

特约编辑 李南木

出版发行 中国矿业大学出版社

印 刷 北京市昌平百善印刷厂

经 销 新华书店

开 本 880×1230 1/32 本册印张 21 本册字数 451 千字

印 次 2007 年 8 月第 1 版第 2 次印刷

总 定 价 114.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

高等学校教材

经典同步辅导丛书编委会

主任：清华大学 王 飞
副主任：清华大学 夏应龙
清华大学 倪铭辰
中国矿业大学 李瑞华

编 委 (按姓氏笔画排序):

于志慧	王丽娜	王 焯	甘 露
师文玉	吕现杰	朱凤琴	刘胜志
刘淑红	孙怀东	严奇荣	杨 涛
李 丰	李凤军	李 冰	李 波
李南木	李炳颖	李 娜	李晓光
李晓炜	李 娟	李雅平	李燕平
时虎平	何联毅	邹绍荣	宋 波
张旭东	张守臣	张鹏林	张 慧
陈晓东	范亮宇	孟庆芬	涂兰敬

前 言

《高等数学》是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程,也是全国硕士研究生理工专业入学考试的统考课。

同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学习题全解》(第六版)。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性,启发性,指导性和补充性的特点。

考虑到《高等数学》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 课程学习指南 从该课程的知识体系出发,对各个章节在全书中的位置,以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述,使学习更有重点。

2. 学习要求 说明该章包括的主要内容,学习的侧重点,以及要掌握的知识点。

3. 内容精要 串讲概念,总结性质和定理,使知识全面系统,便于掌握,并注重知识点之间的联系,使知识融会贯通。

4. 历年考研真题评析 精选近年名校考研真题并进行深入地讲解。

5. 课后习题全解 给出了同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)各章习题的答案。我们给出了详细的解题过程,而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结,从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

6. 2007年考研真题 本书在最后附有2007年研究生统考数学试题,并给出了相应的答案,便于学生对自己的学习效果进行考核。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此,谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,本书难免出现不妥之处,恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网:

http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件:

huateng@huatengedu.com

国全景出,登刺加基地要重口一业专杯工职对完 华腾教育教学与研究中心

。斯考余馆为法学人业等工职出完和士师

穴县,重产岗龄,登宗余本以(湖六第)《学残学高》的融系学残学大充同

。用采对刻委青国全新,林德典登的登斯口在长知点排出的街人第,湖高
的半参部研门舞,用味由委更置掌,登刺加区学出刊更香斯如带丁改

中本。(湖六第)《辑全盟区学残学高》的算强林德出己本志丁已编登学残
对题籍已去在题籍本基金会学,只限本基题掌,全翻本基题型香刺大丁(更香言
,坐收持的融残香具,林德馆的世静研一伙中本本。代编知点高界而此,改

。点排出的决林排封号注,普父白

:排支不以丁排上容内容口舞,点排出的斯口忘《学残学高》解题学

的中午全五并章个各议,突出系看用试的器斯对从 南山区学野野 1

。点重首更区学则,在隔的要题明隔丁系系知部甘章册己又只,置前
题掌要又以,点量阿的区学,容内要主由的的章章即的 宋要区学 2

。点只试的

掌干野,系系面全民限更,照定项和排总,念题斯串 要融容内 3

。融贯会融只映更,系系隔间之点只限重主并,融

。籍排斯人案行批并题真和学对各半五查册 林野野真和卷半野 4

(湖六第)《学残学高》的融系学残学大充同丁出徐 辑全盟区言斯 5

对排合系更更款育枚且而,隔互题籍的的隔丁出徐口舞,系答的题区章各

。点只限一融置掌籍主学题排更研从,替小味只丁融题区的的隔
融为学残学残生系隔半 育隔自最并本 融真野等半 6 2007

。融考行批果效区学的与自枚主半干更,案答的题隔丁出徐并
排关育向新,此查 融考以味林德秀的隔量大丁学参隔融并本

的的号排排如带干徐隔出的并本校又以人融命隔融为隔决,为系更隔隔香

!融隔的心更示泰二同,融香育

131	海明圆真和卷中	
132	编全圆区目录	
133	仓麻宝 章五第	
目 录		朱要区学	
134	要内容内	
135	已好题解已题例题典	
136	课程学习指南	海明圆真和卷中	1
137	第一章 函数与极限	编全圆区目录	3
138	学习要求	田立成公麻宝 章五第	3
139	内容精要	朱要区学	3
140	典型例题与解题技巧	海明圆真和卷中	5
141	历年考研真题评析	海明圆真和卷中	14
142	课后习题全解	海明圆真和卷中	18
143	第二章 导数与微分	编全圆区目录	52
144	学习要求	田立成公麻宝 章五第	52
145	内容精要	朱要区学	52
146	典型例题与解题技巧	海明圆真和卷中	54
147	历年考研真题评析	海明圆真和卷中	59
148	课后习题全解	海明圆真和卷中	63
149	第三章 微分中值定理与导数的应用	编全圆区目录	93
150	学习要求	田立成公麻宝 章五第	93
151	内容精要	朱要区学	93
152	典型例题与解题技巧	海明圆真和卷中	96
153	历年考研真题评析	海明圆真和卷中	102
154	课后习题全解	海明圆真和卷中	106
155	第四章 不定积分	编全圆区目录	149
156	学习要求	田立成公麻宝 章五第	149
157	内容精要	朱要区学	149
158	典型例题与解题技巧	海明圆真和卷中	151

历年考研真题评析	153
课后习题全解	155
第五章 定积分	189
学习要求	189
内容精要	189
典型例题与解题技巧	191
历年考研真题评析	194
课后习题全解	198
第六章 定积分的应用	231
学习要求	231
内容精要	231
典型例题与解题技巧	233
历年考研真题评析	235
课后习题全解	239
第七章 微分方程	263
学习要求	263
内容精要	263
典型例题与解题技巧	265
历年考研真题评析	274
课后习题全解	278
第八章 空间解析几何与向量代数	330
学习要求	330
内容精要	330
典型例题与解题技巧	332
历年考研真题评析	342
课后习题全解	345
第九章 多元函数微分法及其应用	372
学习要求	372
内容精要	372

典型例题与解题技巧	375
历年考研真题评析	398
课后习题全解	403
第十章 重积分	447
学习要求	447
内容精要	447
典型例题与解题技巧	450
历年考研真题评析	452
课后习题全解	456
第十一章 曲线积分与曲面积分	509
学习要求	509
内容精要	509
典型例题与解题技巧	511
历年考研真题评析	527
课后习题全解	532
第十二章 无穷级数	572
学习要求	572
内容精要	573
典型例题与解题技巧	575
历年考研真题评析	602
课后习题全解	605
2007 年考研数学一试题	639
2007 年考研数学二试题	650

的高等数学教材,以数学思想为基础,以数学问题为线索,以数学方法为主线,以数学应用为目的。

本书力求做到:更新、更新、更新。

本书可作为高等院校理工类专业本科生的教材,也可供从事相关工作的工程技术人员参考。

课程学习指南

本书可作为高等院校理工类专业本科生的教材,也可供从事相关工作的工程技术人员参考。

本书可作为高等院校理工类专业本科生的教材,也可供从事相关工作的工程技术人员参考。

三、又一举两得,可

高等数学是理工类、经济管理类等各专业必修的一门重要的理论基础课,又是学习后续技术基础课程和专业课程的重要基础,也是有关各专业研究生入学考试的必考科目。

学习高等数学的目的是要掌握高等数学的基本概念、基本定理以及重要公式,从而提高分析问题与解决问题的能力,同时也为后续各专业课的学习打下基础。

高等数学具有很强的理论性和逻辑性,需要一定的初等数学基础。同时,高等数学具有很广泛的基础性和适用性,是电学、力学、化学、经济管理类等许多专业最重要的先修课程。电学中电路理论、数学信号处理等课程中都广泛运用了微积分、傅立叶级数等相关知识。化学中物理化学、分析化学等课程都用到了高等数学中的微积分、导数等相关知识。力学中理论力学、材料力学等课程都用到了微积分、无穷级数等相关知识。同样在经济管理类学科中,高等数学也得到了广泛运用。

高等数学共分为五个部分。第一部分函数与极限,主要讲述了函数与极限的基本概念、性质及定理;第二部分为一元微积分,主要讲述了导数与微分、微分中值定理、不定积分、定积分、微分方程及其应用;第三部分为空间解析几何与向量代数,主要讲述了向量的运算及曲线曲面方程;第四部分为多元微积分,主要讲述了多元函数微分法、重积分、曲线曲面积分;第五部分为无穷级数,主要讲述了常用级数的概念、性质以及判定方法。

为了加强读者对高等数学相关知识的掌握,为了帮助读者学好这门基础课程,建议在学习过程中按以下方法学习:

1. 掌握基本概念、理解基本定理、熟记重要公式。
2. 要注意前后联系,融会贯通,保持知识的连贯性。
3. 培养自己分析和解决问题的能力。
4. 培养自己抽象思考和逻辑推理的能力。
5. 要养成认真思考、细心推导的良好学习习惯。

此外,为了帮助学生在期末、考研等考试中取得好成绩,我们提出以下建议:

1. 爱思考、勤分析。准确判断问题所蕴含的数学知识,并能够建立对应的模型,想出解决方法。

2. 能抽象、会推导。把具体的、复杂的问题化为抽象的、简单的数学问题,并能合理运用相关公式进行推理、演绎。

3. 多做题、善归纳。要解答大量的相关题目,并归纳总结解题思路及技巧,做到举一反三。

由 (x) 及函数极限, 立知 $M \geq |(x)|$ 有 $\delta \in \mathbb{R}$ 的意义在于, M 及 δ 的取法

界内 δ

当 δ 足够小时

δ 的取法, 立知 $M \geq |(x)|$ 有 $\delta \in \mathbb{R}$ 的意义在于, M 及 δ 的取法



第一章

函数与极限

学习要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示方法, 会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念, 理解函数左、右极限的概念, 以及极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念, 掌握无穷小的比较方法, 会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左、右连续), 会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理), 并会应用这些性质.

内容精要

1. 定义

设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

2. 函数的性质

(1) 函数的有界性

如果存在正数 M , 对于任意的 $x \in Z$ 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 Z 内有界.

(2) 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于 I 内的任意两个数 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ [或 $f(x_1) > f(x_2)$], 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加 [或单调减少].

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于 D 内的任意 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$ [或 $f(-x) = -f(x)$], 则称 $f(x)$ 为偶函数 [或奇函数].

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在正数 T , 使得对于任意 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 极限计算的法则, 公式, 定理

(1) 无穷小量的性质与运算法则;

(2) 极限的四则运算法则;

(3) 复合函数极限的运算法则;

(4) 极限存在的两个准则;

(5) 两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

(6) 无穷小的等价代换定理:

常用等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, \ln(1+x) \sim x, \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \sim \frac{x^n}{n}.$$

4. 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有意义, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

5. 间断点

不连续的点叫做间断点.

不连续的原因有三种: 一是 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义; 二是 $f(x)$ 在点 x_0 处无极限; 三是 $f(x)$ 在点 x_0 处既有定义, 又有极限, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

6. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值、最小值定理: 闭区间上的连续函数在该区间上一定会取得最大值和最小值.

(2) 有界性定理: 闭区间上连续函数一定在该区间上有界.

① (3) 介值性定理: ① 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) = A, f(b) = B$, 且 $A \neq B$, 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

② 闭区间上的连续函数一定会取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

③ 零点定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

典型例题与解题技巧

例 1 判别下列各组函数是否相等:

(1) 函数 $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$;

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

分析 当且仅当给定的函数, 其定义域和对应法则完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故 $f(x) \neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x), g(x), h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$, 故 $f(x) = g(x) = h(x)$.

例 2 求 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\log \cos x}$ 的定义域.

分析 求解简单函数的定义域所构成的不等式组.

$$\text{解 } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, (n=0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \\ x \neq 2n\pi \end{cases}$$

上述不等式组的解为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$,

即所求 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

例 3 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$ (a, b, c 均为常数, 且 $|a| \neq |b|$),

求 $f(x)$.

分析 利用函数表示法的“变量无关性”: 当两个函数定义域相同、对应法则一致时, 这两个函数表示同一个函数.

解 由题意可知 $f(x)$ 满足

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x} \quad (1)$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } x = \frac{1}{t} \text{ 故 } af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = at,$$

$$\text{所以 } af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx, \quad (2)$$

$$\text{联立 (1)、(2) 解得 } f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{ac}{x} - b cx \right).$$

例 4 判别下面函数的奇偶性: $y = \begin{cases} x(1-x), & x \geq 0, \\ x(1+x), & x < 0. \end{cases}$

分析 分段函数奇偶性仍按定义, 注意分区间判定.

$$\text{解 令 } f(x) = y = \begin{cases} -x^2 + x, & x \geq 0, \\ x^2 + x, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x = -f(x)$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(-x) = -(-x)^2 - x = -x^2 - x = -f(x)$$

所以该函数为奇函数.

例 5 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减小, 证明:

对任意两点 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

分析 $\frac{f(x)}{x}$ 单调是唯一的条件, 因此要从 $\frac{f(x)}{x}$ 出发, 逐步构造和结论联系的桥梁.

$$\text{解 不妨设 } 0 < x_1 \leq x_2, \text{ 故有 } \frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1},$$

$$\text{即 } x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1), \text{ 又 } x_2 < x_1 + x_2, \text{ 则 } \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2},$$

$$\text{得 } x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leq x_2 (f(x_2) + f(x_1))$$

$$\text{即 } f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

例 6 求函数 $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} + 1$ 的反函数.

分析 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出, 然后变换 x, y .

解 当 $x \neq 0$ 时, 将原式变形为 $y(10^{2x} - 1) = 10^{2x} + 1 + (10^{2x} - 1)$

即 $(y-2)10^{2x} = y$ 解得 $x = \frac{1}{2} \lg \frac{y}{y-2}$, $+1) = \frac{\pi \Delta t}{\delta} \sin(\frac{1}{\Delta t} + t) = \sin$

故反函数为 $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$.

例 7 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(f(x))]; f(\frac{1}{f(x)})$.

分析 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替.

解 $f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$, $(x \neq 0)$

$f[f(f(x))] = f(\frac{x-1}{x}) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x$,

$f(\frac{1}{f(x)}) = \frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1} = \frac{1}{x} (x \neq 0)$.

例 8 设 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 $(a < b)$
求证: $y = f(x)$ 是周期函数并求其周期.

分析 关键是构造 T , 使 $f(x+T) = f(x)$.

解 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$f(x+2b-2a) = f(b+x+b-2a) = f(b-(x+b-2a))$
 $= f(a+a-x) = f(a-(a-x)) = f(x)$.

所以 $f(x)$ 是周期函数, $2b-2a$ 是它的一个周期.

例 9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n-4} = 0$.

分析 有时求 N , 在“放大”过程中还需要添加一定限制条件

解 对 $\forall \epsilon > 0$, 找 N , 使得 $\left| \frac{2n-1}{n^2+n-4} - 0 \right| < \epsilon$,

而 $\left| \frac{2n-1}{n^2+n-4} - 0 \right| < \frac{2n-1}{n^2+n-4}$ 限制 $n > 4$,

则 $\frac{2n-1}{n^2+n-4} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon$, 取 $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$

所以 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max\{4, \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil\}$, 当 $n > N$ 时 $\left| \frac{2n-1}{n^2+n-4} - 0 \right| < \epsilon$.

例 10 设 $a_n = (1 + \frac{1}{n}) \sin \frac{n\pi}{2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 没有极限.

分析 证 $\{a_n\}$ 没有极限, 只需找到两个子列分别收敛到不同值即可.

证 设 k 为整数, 若 $n = 4k$, 则

$$a_{4k} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin \frac{4k\pi}{2} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin 2k\pi = 0,$$

若 $n = 4k + 1$, 则

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin\left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{4k+1} \rightarrow 1 (k \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 没有极限.

例 11 用定义证明: $a > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

分析 解不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 用定义证得 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

证 不妨设 $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < \sqrt{a}$. $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{a} - \epsilon < \sqrt{x} < \sqrt{a} + \epsilon$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \epsilon)^2 < x < (\sqrt{a} + \epsilon)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \epsilon)^2 - a < x - a < (\sqrt{a} + \epsilon)^2 - a,$$

注意 $(\sqrt{a} - \epsilon)^2 - a = -[a - (\sqrt{a} - \epsilon)^2] < 0$,

$$0 < (\sqrt{a} + \epsilon)^2 - a = 2\sqrt{a}\epsilon + \epsilon^2 > 2\sqrt{a}\epsilon - \epsilon^2 = a - (\sqrt{a} - \epsilon)^2.$$

因此, $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < \sqrt{a}$, $\exists \delta = a - (\sqrt{a} - \epsilon)^2 > 0$.

当 $|x - a| < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$ ($x = a$ 时自然成立), 即 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

例 12 设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x-2, & |x| > 1. \end{cases}$ 试讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

分析 题中函数是分段表达式, 讨论 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x)$ 的极限值必须考虑左、右极限.

解 ① 由题目条件知:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{当 } x < -1, \\ x, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1, \\ x-2, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 不存在.

② 因 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

例 13 证明: $f(x) = x \sin x$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时无界, 但非无穷大.

分析 无界指的是可以取任意不定的数, 而无穷大指的是取的数趋向无穷大. 一定要分清这两个概念.