国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列 · 3

场的量子理论

胡宁 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

经 典 系 列 · 3

场的量子理论

胡 宁 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

场的量子理论/胡宁著.—北京:北京大学出版社,2012.4
(中外物理学精品书系·经典系列)
ISBN 978-7-301-20446-7

Ⅰ.①场…　Ⅱ.①胡…　Ⅲ.①量子场论　Ⅳ.①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 055802 号

书　　　名:**场的量子理论**
著作责任者:胡　宁　著
责 任 编 辑:周月梅
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-20446-7/O·0868
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038
出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
730 毫米×980 毫米　16 开本　12.5 印张　238 千字
1964 年 5 月第 1 版
2012 年 4 月第 1 版重排　2012 年 4 月第 1 次印刷
定　　　价:34.00 元

序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义"请进来"的同时，也将我国近现代物理的优秀成果"送出去"。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的"硬实力"，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的"软实力"，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是"只闻其声，未见其真"。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出，"加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件"。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

内 容 简 介

本书介绍理论物理的重要领域——场的量子理论.在前三章详细讨论了场的量子化问题,具体地介绍了自由电磁场、介子场和电子场的量子理论,接着导出由相互作用拉氏函数表示的碰撞矩阵.在第四、第五两章应用这个矩阵来计算和讨论各种基本粒子的碰撞和衰变问题.在强相互作用部分着重介绍了塔姆-唐可夫型的近似.在最后一章介绍了重正化理论.

本书较详细地讨论了对电磁场的标量场和纵场的各种处理方式.在处理碰撞矩阵和重正化问题中采用了较新的观点.本书可作综合性大学基本粒子课程的教材,也可供理论物理研究工作者参考.

目　　录

第一章　引论 …… 1

§1　薛定谔量子理论 …… 1

§2　二次量子化的物理内容，玻色子和费米子 …… 6

§3　物质场的量子理论 …… 14

第二章　自由场的经典理论和量子理论 …… 17

§4　介子场的经典理论 …… 17

§5　介子场的量子理论 …… 22

§6　狄拉克场的经典理论，代表平面波的解 …… 27

§7　狄拉克方程的协变性 …… 32

§8　狄拉克场的量子理论 …… 38

§9　对电磁场的纵场和标量场进行形式上的量子化 …… 46

第三章　场的相互作用和正则描述 …… 55

§10　电磁相互作用的规范不变性和正则描述 …… 55

§11　量子场论的正则形式 …… 60

§12　在相互作用存在时对电磁场纵场和标量场的处理 …… 64

§13　粒子-反粒子反演以及相互作用在这个反演下的不变性 …… 70

第四章　碰撞矩阵及其应用 …… 78

§14　碰撞矩阵的微扰论展开式 …… 78

§15　康普顿散射矩阵元的微扰计算 …… 84

§16　康普顿散射的碰撞截面 …… 93

§17　电子和电子的摩勒(Møller)散射 …… 100

§18　光子和带电介子的弹性散射 …… 107

§19　β 衰变理论 …… 111

§20　β 衰变的电子-中微子角关联和电子角分布的上下方不对称性 …… 118

第五章　强相互作用理论 …… 125

§21　π 介子和核子间的强相互作用 …… 125

§22 S 矩阵对核子的非相对论极限 …… 131
§23 π 介子和核子低能散射的共振现象，塔姆-唐可夫近似 …… 137
§24 π-π 相互作用 …… 148

第六章 重正化理论 …… 159
§25 量子场论里的发散困难 …… 159
§26 电子和光子的自能积分和顶角的放射修正 …… 161
§27 利用“抵消项”消去发散困难的重正化理论 …… 168
§28 结语 …… 176

附录Ⅰ 在场论里引入的在洛伦兹变换下不变的几个奇异性函数 …… 177
附录Ⅱ …… 183
附录Ⅲ 基本粒子的分类 …… 184
索引 …… 185
重排后记 …… 189

第一章　引　　论

§1　薛定谔量子理论

微观运动的量子理论是从普朗克(Planck)常数 h 的引入开始的. 在 1900 年，普朗克指出由实验观察到的电磁辐射的能谱不服从经典电磁理论所预示的规律. 为着解释这个实验上观察到的能谱，必须在理论里唯象地引入一个新参数 $h=6.5\times10^{-27}$ 尔格·秒. 这个参数的引入意味着频率为 ν 的电磁波的能量必须是 $h\nu$ 的整数倍. 正像原子和分子是实物的最小单位一样，被普朗克称为"能量子"的能量 $h\nu$ 也是频率为 ν 的电磁波的能量的最小单位. 不久以后，爱因斯坦(Einstein)指出上述的能量的不连续性应该反映着电磁辐射的"粒子"结构，正像质量的不连续性反映着实物的粒子(原子和电子等)结构一样. 这个深刻的观点不久在光电现象的实验里得到了证实.

上述爱因斯坦的概念在光电现象中被证实以后，量子理论暂时没有继续沿着普朗克和爱因斯坦理论所指示的方向发展，却转入对原子的微观运动的探讨. 1913 年玻尔(Bohr)根据对原子光谱的分析指出：一个原子系统的能量也像电磁辐射的能量一样具有不连续性. 非相对论的量子力学在 1925 年左右建立. 在微观领域内，它完全代替了牛顿力学. 以后不久，人们发现可以根据作为非相对论量子力学的基础的薛定谔方程导出电磁辐射的能量子 $h\nu$. 这样，电磁场和实物(原子和分子)运动的能量不连续性就可由薛定谔方程统一地加以解释.

非相对论量子力学虽然成功地阐明了微观运动的能量不连续性，但它却没有触及上述由爱因斯坦提出而后来由光电现象的实验所完全证明的观点，这就是：电磁辐射的能量不连续性实际上是电磁场的粒子性所造成的. 人们在当时已经从实验中认识到，作为电磁场能量子的所谓"光子"或"光量子"，具有和电子一样的波动性和粒子性，但在非相对论量子理论里，光子和电子的地位则是完全不同的. 为着说明这一点，我们将在下面介绍一下电磁辐射的能量子是怎样由薛定谔方程导出的.

为明确起见，我们考虑在边长为 L 的立方形的、具有完全反射壁的容器内的电磁辐射. 这个电磁场可由矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 来描写，其中 $\boldsymbol{r}$ 是容器内任一点的坐标，t 代表时间变数. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 满足下面波动方程：

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0. \tag{1.1}$$

除(1.1)外 $\boldsymbol{A}$ 还须满足洛伦兹(Lorentz)辅助条件,在所谓"洛伦兹规范"中这个条件可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=0. \tag{1.2}$$

我们可取容器的中点为坐标的原点,并取 x,y,z 轴平行于立方体的三边.我们可以假定,在容器的壁上 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 是周期的,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 满足下面边界条件:

$$\boldsymbol{A}\text{ 相同,当 } x=\pm L/2,y=\pm L/2\text{ 或 }z=\pm L/2. \tag{1.3}$$

这是一个标准的经典电磁场问题,按照在引入普朗克理论以前人们已经习用的办法,我们可把(1.1),(1.2),(1.3)的解用下面的傅里叶(Fourier)展开式表出:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\{\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^{*}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{1.4}$$

上式右边括号中引入两个相加的复数共轭项是为了保证 $\boldsymbol{A}$ 值是实数.满足条件(1.3)的 $\boldsymbol{k}$ 由下式给出:

$$k_x=\frac{2\pi}{L}n_x,\quad k_y=\frac{2\pi}{L}n_y,\quad k_z=\frac{2\pi}{L}n_z, \tag{1.5}$$

n_x,n_y,n_z 为整数;因此(1.4)式中对 $\boldsymbol{k}$ 的求和代表对所有的整数值 n_x,n_y,n_z 的求和.每一个 $\boldsymbol{k}$ 值代表一个沿 $\boldsymbol{k}$ 方向前进的、频率为 $\nu_k=c(n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{1/2}/L$ 的单色波.$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 满足下面的运动方程:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)+\omega_{\boldsymbol{k}}^2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)=0,\\ \omega_{\boldsymbol{k}}=2\pi\nu_{\boldsymbol{k}}=ck,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 代表频率为 ν_k、前进矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的单色波的振动,k 为矢量 $\boldsymbol{k}$ 的模.由(1.6)我们看到这个振动是一个简谐振动.

变换(1.4)的作用是把由(1.1)描写的在容器内电磁辐射的连续运动表达为无穷多个(因为由(1.5)式决定的 $\boldsymbol{k}$ 值有无穷多个)简谐振动(1.6).因为简谐运动是我们所熟悉的运动,所以引入变换(1.4)式可以造成求解的方便.这个变换把一个偏微分方程变换成无穷多个较易处理的全微分方程.在力学上这个变换属于正则变换.一个力学体系的拉氏函数以及它所满足的变分原理和正则运动方程的形式在正则变换下是不变的.

如果我们接受薛定谔方程作为微观区域运动的普遍规律,那就必须考虑对简谐振动(1.6)进行量子化的问题.必须指出,这样做已经意味着对量子理论的推广,因为量子力学过去所处理的对象是在普通空间的一个质点的运动,而(1.6)式所描绘的则是电磁波的振动.但是人们发现,当对简谐振动(1.6)像对运动的质点一样进行量子化以后,由相应的薛定谔方程立刻可以导出普朗克理论里的能量子.这说明实物和电磁场的微观运动都遵循着完全相同的规律.

为着写出相应于简谐运动(1.6)的薛定谔方程,我们必须首先找到这个运动体系的正则动量 $\boldsymbol{P}_k(t)$和正则坐标 $\boldsymbol{Q}_k(t)$.不难看出 $\boldsymbol{P}_k(t)$,$\boldsymbol{Q}_k(t)$和 $\boldsymbol{\alpha}_k(t)$都满足(1.6)式,所以在一般情况下,$\boldsymbol{\alpha}_k(t)$是 $\boldsymbol{P}_k(t)$和 $\boldsymbol{Q}_k(t)$的一个线性的组合.为着找出 $\boldsymbol{P}_k(t)$和 $\boldsymbol{Q}_k(t)$,我们首先给出电磁辐射的总哈密顿量 H 或总能量 E 的式子.根据经典的电动力学,我们立刻写出

$$H = E = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\mathrm{d}V, \tag{1.7}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别代表电场和磁场强度.积分是对整个容器内的空间的积分.在这里和以后,我们将都用洛伦兹-亥维赛(Lorentz-Heaviside)单位系统,因此在通常单位中出现的因子$(4\pi)^{-1}$将不出现.在"洛伦兹规范"($\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$)中,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系为

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}, \quad \boldsymbol{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.8}$$

我们可以选取(1.6)的解为

$$\boldsymbol{\alpha}_k(t) = \boldsymbol{\alpha}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t},$$

这样选择并没有丧失解(1.4)的普遍性.把(1.4)和(1.8)两式代入(1.7),并利用上式得

$$H = 2V\sum_k k^2 \boldsymbol{\alpha}_k^*(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}_k(t), \tag{1.9}$$

式中 $V=L^3$.引入下面定义:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_k &= \frac{\mathrm{i}}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k - \mathrm{i}ck\boldsymbol{Q}_k), \\ \boldsymbol{\alpha}_k^* &= \frac{-\mathrm{i}}{2k\sqrt{V}}(\boldsymbol{P}_k + \mathrm{i}ck\boldsymbol{Q}_k). \end{aligned} \tag{1.10}$$

于是(1.9)式变为

$$H = \frac{1}{2}\sum_k(\boldsymbol{P}_k^2 + \omega_k^2\boldsymbol{Q}_k^2), \tag{1.11}$$

上式给出用正则动量 $\boldsymbol{P}_k$ 和正则坐标 $\boldsymbol{Q}_k$ 表出的无穷多个简谐振动的总哈密顿量.(1.10)式给出 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{Q}_k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 间的关系.

得出了正则变数 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{Q}_k$ 以后,我们可以立刻写出描绘简谐振动 $\boldsymbol{k}$ 的薛定谔方程:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\nabla_Q^2 + \frac{1}{2}\omega_k^2 Q^2\right)\psi_k(\boldsymbol{Q}) = \varepsilon_n^{(k)}\psi_k(\boldsymbol{Q}), \tag{1.12}$$

式中 $\boldsymbol{Q}\equiv\boldsymbol{Q}_k$,$\nabla_Q\equiv(\partial/\partial Q_x,\partial/\partial Q_y,\partial/\partial Q_z)$,$\hbar=h/2\pi$,$\psi_k(\boldsymbol{Q})$代表相应于前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的简谐振动的薛定谔波函数.

由洛伦兹条件$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$,我们看到矢量 $\boldsymbol{Q}$ 是与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的,因此(1.6)式和

(1.12)所描绘的简谐振动只是在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 平面内的运动. 命 Q_1 和 Q_2 为 $\boldsymbol{Q}$ 在这个平面内沿着两个垂直方向的分量，于是(1.12)可以分解为两个独立的一维运动：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q_s}\right)^2+\frac{1}{2}\omega_k^2Q_s^2\right]\psi_{ks}(Q_s)=\varepsilon_n^{(k,s)}\psi_{ks}(Q_s)\quad(s=1,2),\tag{1.13}$$

上式的解是我们所熟知的. (1.13)所给出的本征值 $\varepsilon_n^{(k,s)}$ 取不连续的值：

$$\varepsilon_n^{(k,s)}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)h\nu_k,\tag{1.14}$$

式中 n_{ks} 是零或正整数. 上式所给出的能级间隔正是普朗克所引入的能量子 $h\nu_k$.

上面的推导说明，把描绘微观质点运动的薛定谔方程推广应用于电磁运动立即给出普朗克的能量子. 这个能量子只代表一个量子运动的能级间隔，正像一个氢原子的能级间隔一样. 不过对于氢原子，能级间隔不是一个与能级无关的常量，因此没有导致能量子的概念.

人们在发现了薛定谔波动方程以后，曾经认为这个方程反映出实物的波动性，因此应和描绘电磁波的麦克斯韦(Maxwell)波动方程相当. 但是不久人们不得不放弃这种看法而接受对于薛定谔波函数的几率幅的解释. 上面的推导也指出，对于电磁辐射，描写它的量子运动的几率波 ψ_k 是和描写它的经典的和宏观的波动的麦克斯韦方程的解是截然不同的两件事.

为着更清楚地对照说明在薛定谔量子理论里实物和电磁场的量子现象间的联系，在表 I 中我们给出从宏观到微观各个阶段电子和电磁场理论的对比. 从这个表我们看到，电子没有相应于麦克斯韦方程的阶段. 实物的粒子性贯穿于所有的阶段，而场的光量子只是在表的最下面的部位作为能级的间隔而出现的. 因此作为非相对论量子力学基础的薛定谔方程没有反映出爱因斯坦所提出的重要观点，即光量子是和电子一样的微观粒子.

表 I

场(电磁辐射)	实物(电子)
经典电磁场的麦克斯韦方程 $\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$	
简谐振动的动量和坐标 $P_{ks}(t),Q_{ks}(t)(s=1,2)$	经典粒子的动量和坐标 $p_i(t),q_i(t)(i=1,2,3)$
量子理论的对易关系 $[P_{kr},Q_{k's}]=-i\hbar\delta_{kk'}\delta_{rs}$	量子理论的对易关系 $[p_i,q_j]=-i\hbar\delta_{ij}$
容器的薛定谔方程能级 $\varepsilon_{ks}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)h\nu$	单个电子的薛定谔方程 连续的和不连续的能级

下面我们将进一步讨论描绘电磁辐射的薛定谔方程和薛定谔态矢量(波函数)

的物理意义. 按照前面的定义,$\varepsilon_n^{(k,s)}$ 代表前进矢量为 $\boldsymbol{k}$,偏振为 s 的单色波所作的简谐振动的能量. 容器内辐射的总能量应为相应于所有前进矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两种不同偏振($s=1,2$)的简谐振动的能量之和. 辐射所处的态可由这无穷多个简谐振动所处的态来确定,即可由无穷多个简谐振动的薛定谔态矢量的乘积来表示. 因此,容器内辐射的总态矢量和总能量可写为

$$\Psi = \prod_{k} \psi_{k1}^{n_1}(Q_{k1}) \psi_{k2}^{n_2}(Q_{k2}), \tag{1.15}$$

$$E = \sum_{k} \sum_{s=1}^{2} \left(n_{ks} + \frac{1}{2}\right) h\nu_{k}. \tag{1.16}$$

在经典理论里没有辐射存在的情况相当于量子理论里能量最低的情况,即所有简谐振动都处于基态的情况. 这时(1.15)和(1.16)变为

$$\Psi_0 = \prod_{k} \psi_{k1}^{0}(Q_{k_1}) \psi_{k2}^{0}(Q_{k_2}), \tag{1.17}$$

$$E_0 = \sum_{k} h\nu_{k}. \tag{1.18}$$

因简谐振动 $\boldsymbol{k}$ 的数目是无限的,当容器中没有辐射存在时,E_0 的值仍等于无穷大. 这个无穷大的零点能不造成任何观察上的效果,如果我们以真空的态作为能量为零的态的定义,那么(1.18)即可换为 $E_0=0$. 由(1.17)给出的 Ψ_0 代表没有辐射存在时的态,所以可以称为真空的态矢量. 因为不管容器中有没有辐射,Ψ 都是存在的,所以我们称 Ψ 为容器的态矢量或空间的态矢量. 按照这个观点,空间本身是一个力学体系,而辐射只代表空间被激发时的情况.

使得相应于($\boldsymbol{k}s$)的简谐振动增加和减少一个能量子 $h\nu_k$ 的算符分别为

$$c_{ks}^{*} = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2c\hbar k}}(P_{ks} + \mathrm{i}ckQ_{ks}) = \sqrt{\frac{2kV}{c\hbar}}\alpha_{ks}^{*}, \tag{1.19}$$

$$c_{ks} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2c\hbar k}}(P_{ks} - \mathrm{i}ckQ_{ks}) = \sqrt{\frac{2kV}{c\hbar}}\alpha_{ks}. \tag{1.20}$$

由 P_{ks} 和 Q_{ks} 所满足的对易关系:

$$[P_{ks}, Q_{k's'}] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{ss'}\delta_{kk'}, \tag{1.21}$$

我们立刻得到 c_{ks} 和 c_{ks}^{*} 间的对易关系:

$$[c_{ks}, c_{k's'}^{*}] = \delta_{ss'}\delta_{kk'}. \tag{1.22}$$

由上式很容易得出 c_{ks} 和 c_{ks}^{*} 在能量表象中的矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle n'_{ks} | c_{ks} | n_{ks} \rangle &= \delta_{n'_{ks}, n_{ks}-1} \sqrt{nk_s}, \\ \langle n'_{ks} | c_{ks}^{*} | n_{ks} \rangle &= \delta_{n'_{ks}, n_{ks}+1} \sqrt{nk_s + 1}; \end{aligned} \tag{1.23}$$

式中 $|n_{ks}\rangle$ 代表能级为 n_{ks} 的简谐振动($\boldsymbol{k}s$)的态. 利用(1.19)和(1.20),(1.4)可写为

$$A(\boldsymbol{r}) = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k}\sqrt{\frac{c\hbar}{2kV}}\{\varepsilon_{ks}c_{ks}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \varepsilon_{ks}c_{ks}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\}, \tag{1.24}$$

作为薛定谔表象中的算符，上式中的$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$c_{ks}$和$c_{ks}^{*}$都与时间无关．式中$\varepsilon_{ks}(s=1,2)$代表在垂直于$\boldsymbol{k}$的平面内两个互相垂直的单位矢量，它们代表振动$\boldsymbol{Q}_{ks}$的极化方向．

上面结果指出，描写空间中电磁波动的$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$是一个算符，而描写空间中电子波动的$\psi(\boldsymbol{r},t)$则是一个几率振幅．在这一点上显示出量子力学在处理实物和场的运动时所采取的不同方式．

利用(1.19)和(1.20)，我们可以把(1.11)表为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k(c_{ks}^{*}c_{ks} + c_{ks}c_{ks}^{*}). \tag{1.25}$$

利用对易关系(1.12)，上式又可写为

$$H = \sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k\left(c_{ks}^{*}c_{ks} + \frac{1}{2}\right). \tag{1.26}$$

上式括号中的1/2只对零点能E_0有贡献，如果我们选取$E_0=0$，上式可写为

$$H = \sum_{k}\sum_{s=1}^{2}c\hbar k(c_{ks}^{*}c_{ks}). \tag{1.27}$$

比较(1.14)和(1.27)，并注意到$2\pi\nu_k=ck$，我们立刻得到

$$c_{ks}^{*}c_{ks} = n_{ks},$$

即$c_{ks}^{*}c_{ks}$是一个对角的算符，它的本征值为能量子的数目n_{ks}．从(1.23)也可以得到同样的结果．

§2 二次量子化的物理内容，玻色子和费米子

自从非相对论量子力学在1925年左右完全建立以后，在其后五六年内新的发展有两个重要的方向．一个发展方向是，由于实验发展的需要，人们要求建立起相对论的量子力学．这就要求把薛定谔方程推广到相对论的领域里去．人们发现有两种可能的推广，一种推广给出描写自旋为零的粒子的克莱因-戈尔登(Klein-Gordon)波动方程，另一种推广给出描写自旋为1/2的粒子的狄拉克(Dirac)方程．这两种推广都导致严重的困难．克莱因-戈尔登方程具有人们所熟知的负几率困难．狄拉克方程则伴随着著名的负能困难．为了避免负能困难，狄拉克曾提出所谓“空穴”理论．经过试图消除这些困难的各方面尝试以后，人们逐渐认识到，这些困难是和对波函数的几率解释密切相关的．因此，为了克服这些困难，必须对一些基本概念作重要的修改．

量子力学新发展的另一个方向是寻求对于场和实物的量子现象在认识上的进

一步统一.我们从上一节的讨论看到，虽然电磁场和电子的微观运动规律都遵循着同样的量子力学的规律，但在我们的认识中实物和场的差异仍然是很大的.量子理论虽然显示出在微观区域中实物的波动性和电磁场的原子性，但这种波动性和原子性和宏观区域中所理解的是迥然不同的.微观区域内的所谓波动性只意味着几率分布的一种周期性，所谓原子性也只代表能量的不连续性.这样就使得实物和场的对立在微观区域内更为复杂化，而前面所提到的光量子在光电现象里所显示的和电子一样的粒子性，却丝毫没有在理论里得到反映.现在我们都知道，电子也可像光子一样地被放出和被吸收，而且光子和电子也可以互相转化；但在 1932 年以前这些现象还未被发现.尽管这样，当时人们已感到必须改造以薛定谔方程为基础的量子理论，使得它更充分地显示出实物和场在波动性和粒子性两方面的对称性.不久人们就发现，薛定谔方程所显示的上述不对称性并不是实质的，这种不对称性可以通过一个新的描述方式的引入而被消除.这个新的方式就是所谓"二次量子化"描述方式.

"二次量子化"并不像这个词的本身所指示那样意味着在客观世界里还存在着更进一步的量子现象.为着说明什么是二次量子化描述，我们考虑由 N 个等同粒子所构成的力学体系.在薛定谔理论里，粒子数 N 必须事先给定，N 决定在波函数 ψ 中出现的独立变数的数目.但是在实际观察里，粒子数往往是不确定的，这就要求把量子力学改换成一种新的形式，使得粒子数也作为像动量和坐标等一样的观察量出现.为着使粒子数不同的态可以互相跃迁，必须引入增加和减少一个粒子的算符.我们知道，统计规律对于粒子数的改变有着决定性的作用，比如当粒子满足费米统计时，在已被占据的态中增加一个粒子是被禁戒的.因此，对于不同的统计规律，这些增加和减少粒子的算符必须服从完全不同的代数关系.再者，为了描述粒子数的改变，还必须引入代表粒子数为零的态或真空态的波函数.从这些讨论，我们立刻看到，上节中处理电磁辐射时所用的方式正是这样的对于粒子数不确定的情况的描述方式.人们可以预料，在这个描述方式里，电子和电磁场的量子现象将显示出更大的对称性.

这个新的描述方式可以形式地由下面的步骤得出：首先我们把单粒子的薛定谔方程看成是和麦克斯韦电磁场波动方程一样的描写经典波动的方程，这个方程的解 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 也看成是和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 一样的普通空间的波动；然后对薛定谔方程进行像上节对电磁场波动方程所进行的一样的量子化.

为简单起见，我们假定 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 代表一个不受外力作用的自由粒子的波函数.引入这个没有外力作用的假定的目的是为了可以很容易地阐明某些重要的观点.如果不引入这个假定，计算将较为复杂，但基本思想和推算的过程仍旧是一样的.在上述假定下，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的薛定谔方程可写为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t), \tag{2.1}$$

上式描写一个自由粒子的量子运动.如果我们把(2.1)看成相当于麦克斯韦方程(1.1)和(1.2),那么我们就可考虑(2.1)式在上节所述的容器内的解.和上节一样,我们引入下面的傅里叶展开式:

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{2.2}$$

在上式右边不需要加上复数共轭项,因为 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 本身是一个复数.把上式代入(2.1),得到 $a_k(t)$ 所满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_k(t)=-\mathrm{i}\varepsilon_k a_k(t),\qquad \varepsilon_k=\frac{\hbar k^2}{2m}; \tag{2.3}$$

这表示 $a_k(t)$ 所代表的运动也是一个简谐振动.把(2.1)看成相当于麦克斯韦方程即意味着承认由(2.1)所描写的运动是一个经典的运动,因此也就产生这个运动的量子化的问题.通过对 t 再进行一次微分,我们由(2.3)得出下面标准的简谐振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}a_k(t)+\varepsilon_k^2 a_k(t)=0. \tag{2.4}$$

(2.2)的复数共轭为

$$\psi^*(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k a_k^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{2.5}$$

很容易证实,$a_k^*(t)$ 也满足简谐振动方程(2.4).

和上节讨论辐射时的情况一样,为着写出这些简谐振动的薛定谔方程,我们首先必须找出相应的正则动量 P_k 和正则坐标 Q_k.为着这个目的,我们考虑这个系统的总能量:

$$E=\int\psi^*\,\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\mathrm{d}V=-\int\psi^*\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\mathrm{d}V, \tag{2.6}$$

将(2.2)和(2.5)式代入,并利用(2.3)式,立刻给出

$$E=\sum_k\hbar\varepsilon_k a_k^* a_k,\quad \varepsilon_k=\frac{\hbar k^2}{2m}. \tag{2.7}$$

上式是和上节的(1.27)非常相像的,所以相应于变换(1.19)和(1.20),我们可以引入下面的变换:

$$a_k=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\hbar\varepsilon_k}}(P_k-\mathrm{i}\varepsilon_k Q_k),$$