高等学校试用教材

1

数学分析

北京大学数学系　方企勤编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

第一册

北京大学数学系 方企勤 编

高等教育出版社

全书分三册出版．第一册讲述函数、极限理论、一元函数微积分，第二册讲述实数理论、级数和广义积分，第三册讲述 n 维欧几里得空间中微积分和微分形式．一元部分较系统讲述了凸函数和上、下极限．分两步严格处理了实数与极限理论：一元微积分前严格讲述极限定义、性质、运算；一元微积分后，从空间的连通性、紧性、完备性观点讲实数定义和实数理论以及连续函数的基本定理．

本书阐述细致，引进概念注意讲清实际背景，定理证明、公式推演作了必要的分析，并提出一些值得思考的问题；通过大量不同类型例题介绍解题基本方法和特殊技巧．

全书配有习题集，由我社与教材同时出版发行．

本书由理科数学教材编审委员会函数论编审组委托欧阳光中副教授初审，董延闿教授复审，可作为综合大学、师范院校数学系试用教材或教学参考书．

高等学校试用教材

数　学　分　析

第　一　册

北京大学数学系　方企勤　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.75　字数 208,000

1986 年 2 月第 1 版　1986 年 2 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,400

书号 13010・01187　　定价 1.45 元

前　言

这套教材分三册出版．第一、二册讲述一元函数微积分，它的内容包括：实数、极限理论，一元微积分，级数和广义积分．前六章和第九章的实数空间由我撰写，一元的其余部分由沈燮昌教授撰写．第三册讲述 n 维欧几里得空间中的微积分，由廖可人副教授与李正元副教授撰写．

教材内容的选取，基本上没有超出经数学、力学、天文学教材编审委员会 1980 年审订的教学大纲的范围．但由于对内容的理解和要求不同，在讲述上也会有所差别．我们对内容的要求比我校六十年代教材要高些．如一元部分较系统地讲述凸函数和上、下极限，多元部分严格地讲述 n 元微积分和微分形式．个别可以不讲的内容用星号标出．

本册教材的内容属于传统的内容，但希望在系统性、严格性、逻辑性上能处理得更好些．如讲基本初等函数的连续性时，为了严格处理指数函数的连续性，有的教材把它放到定积分之后讲，有的教材虽把它放在微积分之前讲，但讲得较麻烦．本书对指数函数的处理，是为了解决上述的矛盾，而又保持逻辑上严格性的一种尝试．又如讲利用导数研究函数性质时，先讲哥西中值定理的两个应用，然后讲拉格朗日中值定理的两个应用（函数的升降与凹凸），最后讲函数升降与凹凸的两个应用，这样逻辑上一环扣一环，使问题讲述显得干净、利索．

特别希望在内容讲法上有所突破，使它能帮助教师怎样去讲授这些内容，能指导学生应该怎样去理解和掌握这些内容．

在讲述概念时，不仅讲概念的实际背景，还要求通过实际背

景，把概念的每一个符号、每一个式子的涵义揭示出来。如讲序列极限时，通过求曲边三角形的面积，分析为什么要“存在 N”，为什么要“任给 ε”，和极限定义中“四句话”的意义．又如讲微分时，通过求瞬时速度，分析为什么要求改变量的线性主部及其系数，并指出线性主部和高阶无穷小项的意义，这样做更有利于学生理解概念的实质。

在讲定理的证明和公式的推导时，不仅要逻辑上清楚和注意表达的艺术，还要求讲出内容之间的有机联系、分析证明的想法、揭露问题的本质．如当极限四则运算和幂指运算条件不满足时极限怎么求，引出洛必达法则；证无穷与无穷之比的不定型时，先分析证明困难所在和指出解决困难的办法；又如由一次逼近(微分)的充要条件和逼近式的唯一性，引出高次逼近(泰勒公式)有无充要条件和逼近式的唯一性；对皮亚诺余项公式证明的分析，引出拉格朗日余项公式证明的方法．这种从学生原有基础出发，不断地提出问题、分析问题、解决问题的讲法，使学生能更好地掌握证明的思想和方法．

一元微积分的一些概念和方法，差不多都可以从几何上给予解释，这样做不仅使概念讲得更活，也使学生的思维更加活跃．如讲一致连续与不一致连续时，结合曲线图形来看，如果曲线有一处坡度最陡则一致连续，如果曲线无限地变陡，且没有坡度最陡的地方则不一致连续．这种“看图识字”的讲法，可以使学生记得牢、学得活。

教材中配有大量例题，既有几何、物理方面的应用题，也有相当数量的计算和推理题；既注意了演算的熟练，也注意了解题的基本方法和特殊的技巧．在前面各章、节附有一些思考题，这是考虑到学生初学微积分时，理解概念不深，这样做有利于培养学生独立思考的能力．

对实数与极限的处理，我是分为两步教学的. 在一元微积分之前，严格讲述极限定义、性质、运算；在一元微积分之后，再讲实数定义、确界和极限存在性、连续函数性质证明. 这时可以从一般空间观点来讲，即从空间的连通性、紧性、完备性的观点来讲述. 如用连通性引入无理数，用连通的全序域定义实数空间. 根据几年来的教学实践，分两步教学的效果还是比较满意的. 教材中也为另一种讲法作了安排，可以把第二章的确界与第九章的实数公理系统作为预备知识，把区间套定理和连续函数中间值定理的证明放到第三章，第九章只保留紧性、完备性及其应用，和上、下极限，这种讲法也是可取的. 如果把紧性及其应用也放到第三章，从逻辑顺序来看是完整些，同学接受来说也不会有什么困难，但对训练来说可能难以保证.

本人二十几年来一直从事数学分析课的教学工作，曾与许多同事一起工作过，从他们那里学到不少有益的东西. 特别在七十年代，教研室组织过多次极限与微分概念的讨论，这些讨论使我获益匪浅. 在这里向他们表示感谢.

本书由李正元副教授初审，沈燮昌教授统一全书. 他们对本书提出了一些修改的意见，书稿送出版社后，又经欧阳光中副教授与董延闿教授对本书作了认真细致的审阅，提出了许多宝贵的修改意见，对他们的宝贵意见，我谨表示深深的谢意.

方企勤　1985 年

目　录

预 备 知 识

1. 逻辑符号

为了书写方便，我们常采用以下一些逻辑符号。

设 S_1, S_2 是两个陈述句，它们可以指命题也可以指条件。

符号 $$S_1 \Rightarrow S_2$$
表示命题 S_1 成立，则命题 S_2 也成立，或条件 S_1 成立，则条件 S_2 也成立。

符号 $$S_1 \Leftrightarrow S_2$$
表示命题 S_1 与 S_2 等价，或条件 S_1 与 S_2 等价．即表示由命题(或条件)S_1 可以推出命题(或条件)S_2，反过来由命题(或条件)S_2 也可以推出命题(或条件)S_1.

符号 $$\forall$$
表示任给，写法是将英文字母 A 倒过来。

符号 $$\exists$$
表示找到，写法是将英文字母 E 反过来。

孤立地看这些符号没有什么意思，但组合起来可以表示一句话，这句话可以是正确的，也可以是错误的．如

$\exists x$, 使得 $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$ (正确的)；

$\forall x$, $\exists y$, 使得 $x+y=1$ (正确的)；

$\forall x$, $\exists y$, 使得 $x>y$ (正确的)；

$\exists x$, $\forall y$, 使得 $x>y$ (错误的)。

后一句话是说，可以找到一实数，它比任何实数都大，这显然是错误的。

2. 集合初步

自康托尔在十九世纪末创建集合论以来，集合论的概念和方法已渗入到数学的各个分支，成为数学的一种语言．集合论本身也发展成数学的一个分支，内容非常丰富，我们这里介绍的是极简单、极显然的一些内容．

集合不能给予严格的定义，因为定义是用已知的概念去定义未知的概念．如用有理数去定义无理数，这里我们认为有理数是已知的，若有人喜欢刨根问底，觉得有理数是什么也不清楚，我们可以用整数来定义有理数，进一步用自然数定义整数，用集合来定义自然数．这个过程不可能无穷无尽的下去，总有一个概念不能定义，在数学里集合概念就到头了，不能再用其它的数学概念来定义．虽然如此，我们可以给集合一个描述．先看几个集合的例：

1) 所有自然数的全体为一集合，记作 $\mathbb{N}$；

2) 所有小于 10 的、偶的自然数全体为一集合；

3) 方程 $x^2-5x+4=0$ 的根全体为一集合；

4) 具有北京市户口的人全体为一集合．

尽管集合没有定义，但我们都理解它是什么意思．一般来说，把具有某种共同特性的事物的全体叫**集合**，属于集合的每个个体叫做该集合的**元素**．

如例 1)中集合的特性是正整数，例 4)中集合的特性具有北京市户口．根据给定的特性，我们可以判断每一元素是属于这个集合，还是不属于这个集合．前面三个例是数集，例 4 是非数集．以后我们只讨论数集．

集合用大写字母 A、B、C、X、Y、Z 表示，元素用小写字母 a、b、c、x、y、z 表示．

设 A 是一个集合，a 是 A 的元素，记作

$$a \in A;$$

反之,a 不是 A 的元素,记作

$$a \overline{\in} A \quad (\text{或 } a \notin A).$$

集合表示法

集合有两种表示法:一是列举法,如集合

$$A=\{2, 4, 6, 8\},$$

这种表示法是将集合的元素在花括弧内一一列举出来;

另一是描述法,如集合

$$A=\{x \mid x^2-5x+4=0\},$$

这种表示法将花括弧分两部分,用记号|隔开,前面为元素的代表符号,用 x 或用其它符号,后面为元素所具有的性质.

第一种表示法在数学分析中用处不大,因为我们常用的集合为无穷个元素组成,无法一一列出,如所有实数的集合就不可能写出来.

集合$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为闭区间,记作$[a, b]$,集合$\{x \mid a<x<b\}$称为开区间,记作$(a, b)$,记号$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$可作类似理解.

集合的子集、包含、相等

两个集合 A、B,若 $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$,这时集合 A 包含于集合 B,称 A 是 B 的子集,记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

例如 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,则集合

$$\{1\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 3, 5\}$$

是 A 的子集. 集合$\{1\}$表示由 1 这一个元素组成的集合,概念上不同于元素 1 本身,我们可以记

$$\{1\} \subset A,\ 1 \in A.$$

为了运算方便,我们把不含任何元素的集合称为空集,记作

$\varnothing$，例如

$$\{x \mid x^2+1=0,\ x\ 实数\}=\varnothing.$$

空集含于任一集合：

$$\varnothing \subset A,$$

因为，如果不成立，则至少有一元素属于 $\varnothing$ 而不属于 A，显然这是不可能的。

根据集合包含关系 $\subset$ 的定义，显然有：

$$A \subset A;$$

$$A \subset B,\quad B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

若两集合 A、B，满足 $A\subset B$，$B\subset A$，则称 A 与 B **相等**。记作

$$A=B.$$

如 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}=\{4,\ 3,\ 2,\ 1\}=\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

若 $A\subset B$，$A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**。

集合的运算

集合除包含关系外，还可以考虑集合之间的和、交、差等运算。

给定集合 A、B，集合 A、B 的**和**记为 $A\cup B$，它是 A、B 全部元素组成的集合，定义为：

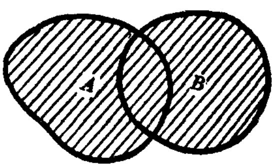

图 0-1

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\ 或\ x\in B\}.$$

用平面图形表示集合，图形的点表示集合的元素，则 A、B 图形合在一起就是和集 $A\cup B$ 的图形，如图 0-1 所示。

由和的定义易见：

$$A\cup\varnothing=A;$$

$$A\cup A=A;$$

$$A\cup B=B\cup A\text{（交换律）};$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\text{（结合律）}.$$

给定集合 A、B，两集合的**交**记为 $A\cap B$，它是由 A、B 的公共

元素组成，定义为：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{与}x\in B\}.$$

A、B 图形的公共部分(见图 0-2)就是交集的图形.

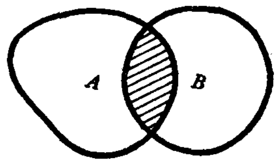

图 0-2

显然有：$A\cap\varnothing=\varnothing$；

$A\cap A=A$；

$A\cap B=B\cap A$(交换律)；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律).

若 $A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$.

给定集合 A、B，两集的差记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$，它是在 A 内而不在 B 内的元素组成的集合(见图 0-3)，定义为：

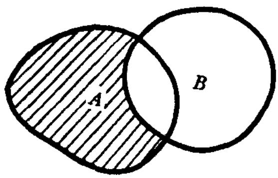

图 0-3

$$A-B=\{x\mid x\in A,\ x\overline{\in}B\}.$$

显然有：

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad \varnothing-A=\varnothing;$$

$$A-B=A-(A\cap B).$$

假设我们所考察的集合都是更大集合 X(如实数集)的子集，这时我们把 A 对 X 的差集称为 A 的**补集**，记为 A^c

$$A^c=X-A.$$

思考题 证明：

$$A^c\cap B^c=(A\cup B)^c;$$

$$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c.$$

3. 绝对值与不等式

x 是实数，x 的绝对值为一非负实数，记为$|x|$，定义为：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如$|3.5|=3.5$，$|-3.5|=3.5$.

要说明绝对值的几何意义，我们作一直线，在直线上取定方向、原点 O 和单位长以后，就称此直线为一实轴，实数可以与实轴上的点建立起一一对应，每一实数可用实轴上一点来表示，不同的实数用实轴上不同的点表示，因此数与点可以不加区分。$|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离。

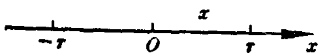

图 0-4

由图 0-4 可见：若 $r>0$，点 x 位于区间 $(-r, r)$ 上时，则点 x 到原点的距离小于 r；反之，若点 x 到原点的距离小于 r，则点 x 位于区间 $(-r, r)$ 上，即得

性质 1 $\quad r>0,\ |x|<r \Leftrightarrow -r<x<r.$

容易证明

性质 2 给定实数 x、y，有

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|,$$

当且仅当 x 与 y 同号时，上式等号成立.

用数学归纳法容易得到

推论 1 对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

推论 2 $\quad \big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x-y|.$

证明 $\quad |x|=|x-y+y| \leqslant |x-y|+|y|,$

得
$$|x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

同理
$$|y|-|x| \leqslant |y-x|=|x-y|,$$

所以
$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x-y|.$$

性质 3 $\quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|.$

分情况讨论易见上式成立.

需要注意的是 $\quad \sqrt{x^2}=|x|,$

因左边取算术根是一非负数.

第一章　函　　数

§1　函数概念

高等数学与初等数学的区别，在于研究的对象和研究的方法不同．初等数学所研究的对象主要是常量，如追赶问题中，已知甲、乙的速度与出发时间，要求甲追上乙的时间，这里要求的只是一个数量——时间；而高等数学所研究的对象是事物的运动规律和现象的变化规律．如考察初速为零的物体，在真空中自由下落时，伽利略发现物体下落的距离与下落的时间平方成正比．怎么由这一运动规律，求出物体速度和加速度随时间的变化规律？这里我们要求的已不是一个数，而是物体的运动规律．在某种意义上，我们可以说初等数学主要是常量的数学，高等数学是变量的数学．

1.1　常量与变量

在生产与生活中，我们接触到各种各样的量．有些量在考察过程中是变化的，取着不同的数值，我们称为**变量**；有些量在考察过程中是不变化的，取相同的值，我们称为**常量**．

如火车出站、进站、过桥、拐弯时，速度是在变的，速度时快时慢，所以从考察全行程来说，火车的速度为一变量．若考察火车行驶在两站之间某一行程时，火车的速度也可以是常量．又如地面两观察站，观察空中卫星的位置时，观察站与卫星间的距离及联线间的角度是变量，但构成三角形的内角和是不变的，为一常量．

需要指出的是，常量与变量是相对的．一是指实践中把一个量究竟作为变量处理，还是作为常量处理是相对的．如重力加速度 g，在有的问题中我们把各地的 g 看成常量，但在重力探矿中就

必须把 g 看成变量. 一是指数学上常量与变量的区分也是相对的,常量我们也把它看作变量,但这变量在变化过程中总是取同一个数值. 这样一来,我们可以说两个变量之和仍为一变量. 否则我们只能说,两个变量之和,一般来说是变量,特殊情况下也可以为一常量,显然这对讨论问题带来很大的不便.

习惯上,变量常用字母 x、y、t 表示,常量常用字母 a、b、c 等表示.

还需指出的是,严格的讲法,应该是从集合出发,只有元素属于或不属于集合的区分,没有常量与变量的区分,所谓"变量"不过是集合元素的代表符号. 我们这里采用常量、变量术语,为了使问题显得形象、直观,便于初学者理解,而不拘泥于术语上的严格性.

1.2 函数定义

在实际问题中,我们关心的不是孤立的量,而是量与量之间的依赖关系,即一个量如何随着另一量的变化而变化. 这里我们只限于讨论两个变量情形,并从几个具体例子来说明量与量之间存在的依赖关系.

例 1 在重力作用下,物体从离地面高 h 米处自由下落,不计空气阻力时,下落路程 s 与时间 t 满足关系式:

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}\right), \tag{1}$$

这里 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度,它是常量.

t 与 s 是物体下落过程中的两个变量,当 $t=0$ 时,$s=0$,当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时,得 $s=h$,表示物体已到达地面. 所以 t 的变化范围是从 0 到 $\sqrt{\frac{2h}{g}}$,在这范围内 t 的每一个值,由公式(1)即可得到对应的 s 的值. 公式(1)给出了变量 s 与变量 t 之间的依赖关系,即函

数关系.

例 2 某气象台用自动记录器画出了当地某一天的气温变化图(见图1-1). 图中纵轴代表气温 T(℃), 横轴代替时间 t(小时), 从 0 到 24 小时内的任一时刻 t 的值, 根据这条曲线, 就可找出气温 T 的唯一确定的值与之对应. 这条曲线给出了变量 T 与变量 t 之间的函数关系.

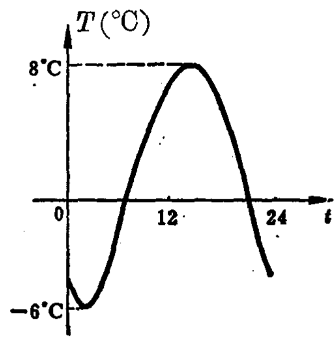

图 1-1

例 3 给定正实数 x, 考虑所有不超过 x 的素数个数 N, 对于区间 $(0, +\infty)$ 内每一 x, 根据上述对应规则, 总有唯一的非负整数 N 与其对应, 为了表示 N 依赖于 x, 我们记作 $N=\pi(x)$, 虽然 N 与 x 没有确切的公式, 也没有 N 与 x 的图象曲线, 但 N 与 x 的对应关系是客观存在的, 所以我们说这个对应关系, 给出了 N 与 x 之间的函数关系.

由上面例子看出, 变量间有没有函数关系, 在于有没有对应关系, 不在于有没有公式或图象. 这样, 就有函数的如下定义.

定义 1 给定集合 X, 若存在某种对应规则 f, 对于 X 中每一个元素 $x\in X$, 都有实数集 $\mathbb{R}$ 中唯一的元素 y 与之对应, 则称 f 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个**函数**, 记作

$$f: X \to \mathbb{R}.$$

函数 f 在 x 点的值记作 $y=f(x)$.

X 称为函数 f 的**定义域**, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**.

例 1 中对应规则 f 为:

$$\frac{1}{2}g(\quad)^2,$$