名师考案丛书

MINGSHIKAOANCONGSHU

高等代数

（北大·三版）

考研教案

编著者　徐　仲　陆　全　张凯院

吕全义　安晓虹

西北工业大学出版社

前　　言

高等代数是数学专业的重要基础课，它对培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力，以及后续课程的学习起着非常重要的作用，也是数学系硕士研究生入学考试的一门必考科目。高等代数主要包括多项式和线性代数两部分内容。线性代数又是工学及经济学科学生的基础课程，在硕士研究生入学统一考试数学试题中占有相当大的比例且是必考内容之一。这门课程的特点是内容比较抽象，概念、定理比较多，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透。为了帮助考生加深对课程内容的理解，掌握解题的方法及技巧，提高应试能力，我们根据长期从事高等代数教学的经验及讲授考研辅导班的教案，编著成本书。

本书依照北京大学数学系几何与代数教研室编《高等代数》(第三版)的自然章编排，但为了保持前后内容的渗透及关联，对一些章节的内容作了调整。如为了完整地介绍化简二次型的方法(第五章)，将特征值、特征向量及矩阵的相似对角化(第七章)，正交矩阵及用正交变换化二次型为标准形(第九章)等内容均集中到第五章。每章由三部分内容组成：

一、知识脉胳图解——以框图的方式概括了本章的知识结构，提纲挈领，一目了然。

二、重点、难点解读——对本章的知识重点与难点进行简要的总结归纳。

三、典型例题解析——是本书的核心和具有特色的部分。按高等代数课程的内容与知识点进行了分门别类，每章归纳出若干小专题。在每个小专题中首先进行要点点击，系统总结解题思想与方法，以帮助考生理清思路及复习有关内容。然后通过对大量典型例题的解析，使学生逐渐领会和掌握解题和考试的要领。例题中编入了全国一些重点高等学校的高等代数试题，这些试题按"学校-年份"来标识；也编入了大部分工学及经济学科硕士研究生全国统一入学考试数学(一)、(二)、(三)、(四)中的线性代数试题，这些试题采用"年份-类别-分数"标识。如"98-3-08"表示1998年研究生入学考试数学(三)的考题，且该题在卷面上所占分数为8分。每道题都有详尽的解题过程，并在部分解题前后增设分析及注记，以揭示思路，启迪思维，评点解题技巧，指出容易疏漏之处。

在附录部分选编了西北工业大学的高等代数课程考试真题及研究生入学考试的试卷，并给出了详细的解答。

尽管本书是为学习及备考高等代数的数学系学生编写的，但其中的第二、三、四、五章是相对独立的线性代数部分，适合学习及备考线性代数的工学及经济学科的考生使用，本书还可供高校教师和工程技术人员参考。

本书由徐仲教授、陆全教授主编并统稿，参加编写的还有张凯院教授、吕全义副教授和安晓虹等。

由于作者水平所限，对于书中的不妥及疏漏之处，敬请读者指正。

编著者

2005年12月

符号说明

$D = \|a_{ij}\|$	以 a_{ij} 为 i 行 j 列元素的 n 阶行列式的简记
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mxn}$	以 a_{ij} 为 i 行 j 列元素的 $m \times n$ 矩阵的简记
$\|\boldsymbol{A}\|$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和
$\boldsymbol{A}^*$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$	以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵
M_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的余子式
A_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的代数余子式
$\boldsymbol{A}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{E}_n$	n 阶单位矩阵
Δ_k	方阵的 k 阶顺序主子式
P	数域 P
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m \times n$ 矩阵空间
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维向量空间
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m \times n$ 矩阵空间
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域
$\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核或零空间
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{\theta}$	线性空间的零元
V^n	n 维线性空间
$\mathbf{Z}$	整数集合
$W^{\perp}$	子空间 W 的正交补空间
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W_1 \oplus W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和
$W_1 + W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的和
$W_1 \cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交
$W_1 \cup W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的并集

名师考案丛书

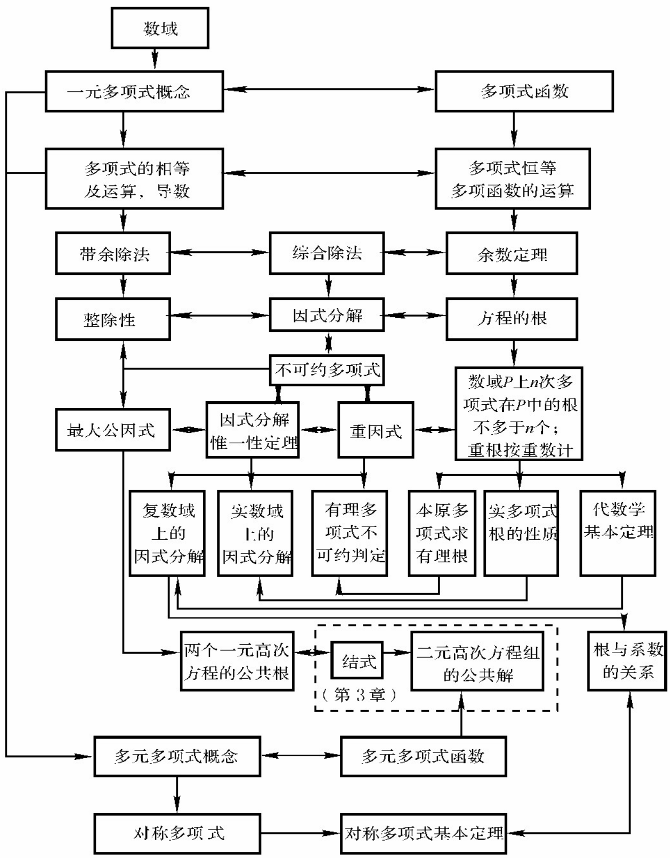
$g(x) \mid f(x)$	多项式 $g(x)$ 整除 $f(x)$
$(g(x), f(x))$	多项式 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式
$\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$	由元素组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间
$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$	元素组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$	线性变换
$\mathscr{O}$	零变换
$\mathscr{E}$	恒等变换
$\mathrm{R}(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{A}(V)$,或 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$)	线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域或像空间
$\mathrm{N}(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$,或 $\ker\mathscr{A}$)	线性变换 $\mathscr{A}$ 的核或零空间
$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$	元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\lvert \boldsymbol{\alpha} \rvert$	元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度
$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$	元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交或垂直
$\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j$	行列式(或矩阵)的第 i 行与第 j 行互换
$\mathrm{c}_i \leftrightarrow \mathrm{c}_j$	行列式(或矩阵)的第 i 列与第 j 列互换
$\mathrm{r}_i \times k$	行列式(或矩阵)的第 i 行乘 k
$\mathrm{c}_i \times k$	行列式(或矩阵)的第 i 列乘 k
$\mathrm{r}_i \pm k\mathrm{r}_j$	行列式(或矩阵)的第 i 行加上(或减去)第 j 行的 k 倍
$\mathrm{c}_i \pm k\mathrm{c}_j$	行列式(或矩阵)的第 i 列加上(或减去)第 j 列的 k 倍
$\boldsymbol{P}(i,j)$	交换单位矩阵的第 i 行(列)和第 j 行(列)得到的初等矩阵
$\boldsymbol{P}(i(c))$	用数域 P 中非零数 c 乘单位矩阵第 i 行(列)得到的初等矩阵
$\boldsymbol{P}(i,j(k))$	把单位矩阵的第 i 行加上第 j 行的 k 倍(或第 j 列加上第 i 列的 k 倍)得到的初等矩阵
P^n	数域 P 上的 n 维向量空间
$P^{m\times n}$	数域 P 上的 $m \times n$ 矩阵空间
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的 n 维单位坐标向量
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行 j 列的元系为 1 其余元系为 0 的 $m \times n$ 矩阵
$P[x]$	数域 P 上的一元多项式环
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	当多项式 $g(x)(\neq 0)$ 整除 $f(x)$ 时所得的商
$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$	排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数
$\boldsymbol{J}$	矩阵的 Jordan 标准形
$\boldsymbol{J}_i$	矩阵的第 i 个 Jordan 块
$\boldsymbol{F}$	矩阵的有理(Frobenius)标准形
$\boldsymbol{F}_i$	矩阵的第 i 个 Frobenius 块
$R(f,g)$	多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式
$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式
$D_k(\lambda)$	λ-矩阵的 k 阶行列式因子
$d_k(\lambda)$	λ-矩阵的第 k 个不变因子

目　　录

第 1 章　多项式

多项式理论是高等代数的重要内容之一.虽然它在整个高等代数课程中是一个相对独立而自成体系的部分,但却为高等代数所讲述的基本内容提供了理论依据.多项式理论中的一些重要定理和方法,在进一步学习数学理论和解决实际问题时常要用到.在中学阶段,对多项式的讨论主要着重于多项式的运算,很少涉及多项式的其他理论.因此,在学习本章时,要正确地掌握概念,学会严谨地推导和计算.

1.1　知识脉络图解



1.2 重点、难点解读

本章对多项式理论作了较深入、系统、全面地论述,内容可分为一元多项式与多元多项式两大部分,以一元多项式为主.

一元多项式可归纳为以下四个方面:

(1) 一般理论:包括一元多项式的概念、运算、导数及基本性质.

(2) 整除理论:包括整除、最大公因式、互素的概念与性质.

(3) 因式分解理论:包括不可约多项式、因式分解、重因式、实系数与复系数多项式的因式分解、有理系数多项式不可约的判定等.

(4) 根的理论:包括多项式函数、多项式的根、代数学基本定理、有理系数多项式的有理根求法、根与系数的关系等.

一元多项式的内容十分丰富,重点是整除与因式分解的理论,最基本的结论是带余除法定理、最大公因式的存在表示定理、因式分解的惟一性定理. 在学习过程中,如能把握这两个重点和三大基本定理,就能整体上把握一元多项式的理论.

对于多元多项式,则要理解 n 元多项式、对称多项式等有关概念,掌握对称多项式表成初等对称多项式的多项式的方法.

1.3 典型例题解析

1.3.1 数域的判定

要点点击

1. 数域的概念

设 P 是至少含有两个数(或包含 0 与 1) 的数集,如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零) 仍是 P 中的数,则称 P 为一个数域.

2. 常见的数域

有理数域 $\mathbf{Q}$,实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$.

3. 数域的有关结论

(1) 所有的数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$,即有理数域是最小的数域.

(2) 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 与实数域 $\mathbf{R}$ 之间存在无穷多个数域;在实数域 $\mathbf{R}$ 与复数域 $\mathbf{C}$ 之间不存在其他的数域.

数域是高等代数展开讨论的基础,多项式、行列式、线性方程组、矩阵、线性空间、欧氏空间、双线性函数等都是在一般数域的基础上建立起来的.

要求准确掌握数域的定义,能用定义正确判断一个数集是不是一个数域,能用定义推导数域的性质.

【例 1】 设 P 是一个数集,有一个非零数 $a \in P$,且 P 关于减法,除法(除数不为 0) 封闭,证明 P 是一个数域.

【证】　因为 $a\in P$，所以 $0=a-a\in P$，$1=\dfrac{a}{a}\in P$.

对 $\forall a,b\in P$，有 $a+b=a-(0-b)\in P$，即证 P 对加法封闭.

又对 $\forall a,b\in P$，若 a,b 中有一为 0，则 $ab=0\in P$. 若 $ab\neq 0$，则 $ab=\dfrac{a}{\frac{1}{b}}\in P$. 从而证明乘法封闭.

综上可知：P 关于加法、减法、乘法、除法都封闭，所以 P 是一个数域.

【例 2】　下列各数集是否构成数域?说明原因.

(1) $P_1=\{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$；　　(2) $P_2=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.

【解】　(1) P_1 构成数域. 因为 $0\in P_1$，$1\in P_1$. 又设

$$a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\in P_1,\ c+d\sqrt{3}\mathrm{i}\in P_1\quad(a,b,c,d\in\mathbf{Q})$$

则有

$$(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})\pm(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\mathrm{i}\in P_1$$

$$(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})=(ac-3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\mathrm{i}\in P_1$$

当 $a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\neq 0$ 时，有 $a-b\sqrt{3}\mathrm{i}\neq 0$，于是

$$\frac{c+d\sqrt{3}\mathrm{i}}{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{(c+d\sqrt{3}\mathrm{i})(a-b\sqrt{3}\mathrm{i})}{(a+b\sqrt{3}\mathrm{i})(a-b\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{ac+3bd}{a^2+3b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+3b^2}\sqrt{3}\mathrm{i}\in P_1$$

故 P_1 构成数域.

(2) P_2 不构成数域. 因为 P_2 对乘法不封闭. 例如，$\sqrt[3]{2}\in P_2$，但 $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}\notin P_2$. 这是因为，若 $\sqrt[3]{4}\in P_2$. 则

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}\qquad(a,b\in\mathbf{Q})$$

于是 a 与 b 都不能是 0，且

$$a=\sqrt[3]{4}-b\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b)=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b)(\sqrt[3]{2}+b)}{\sqrt[3]{2}+b}=\frac{2-b^2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+b}$$

整理得

$$2-ab=(a+b^2)\sqrt[3]{2}$$

但 $a+b^2\neq 0$，否则若 $a+b^2=0$，则有 $2-ab=0$，联立解得 $b=-\sqrt[3]{2}$，这与 b 是有理数矛盾，故 $a+b^2\neq 0$. 于是 $\dfrac{2-ab}{a+b^2}=\sqrt[3]{2}$，又得出有理数等于无理数的矛盾，故 $\sqrt[3]{4}\notin P_2$.

【例 3】　证明：实数域和复数域之间不存在其他的数域.

【证】　设 P 是任意一个包含 $\mathbf{R}$ 且不同于 $\mathbf{R}$ 的数域，则 P 至少包含一个复数 $a+b\mathrm{i}(b\neq 0)$. 由于 P 是数域，所以 $\mathrm{i}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})-a}{b}\in P$. 但 $\mathbf{R}\subset P$，从而对任意实数 a,b 都有 $a+b\mathrm{i}\in P$，即 P 包含了全体复数. 故 $P=\mathbf{C}$.

1.3.2　一元多项式的概念

要点点击

1. 一元多项式的概念

形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{①}$$

称为数域 P 上文字 x 的一元多项式，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，n 是非负整数. 当 $a_n\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 的次

数为 n，记为 $\partial(f(x))=n$（或 $\deg(f(x))=n$），并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项，a_n 为 $f(x)$ 的首项系数. a_ix^i 称为 $f(x)$ 的 i 次项，a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n=\cdots=a_1=0$，$a_0\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，即 $\partial(f(x))=0$；当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时，称 $f(x)$ 为零多项式. 零多项式是惟一不定义次数的多项式.

注　这里多项式中的 x 看作一般的文字或符号，它可以是变数（中学讲述的多项式即为如此），也可以是矩阵、线性变换等，具有更一般的意义. 这里把多项式看成一种形式上的表达式（中学数学将多项式看成一类函数），其中的"+"号并不意味着"加"，a_jx^j 也并不意味"乘"和"乘方". 这样定义的目的是为了统一研究它们普遍的共同的性质.

2. 多项式相等

如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x)=g(x)$.

注　两个多项式相等的定义说明了多项式 ① 是惟一确定的. 对于下式

$$ax^2+bx+c=0$$

若看作多项式相等，则必有 $a=b=c=0$；若看作方程，则不要求 a,b,c 全为零. 这说明多项式相等与方程是有区别的.

3. 多项式的加法与乘法

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$ 是数域 P 上两个多项式，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i$$

其中 $n\geqslant m$，且 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$. 而

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$$

4. 次数公式和首项系数规律

(1) $\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$；

(2) $\partial(f(x)g(x))\leqslant\partial(f(x))+\partial(g(x))$；

(3) 多项式乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积.

5. 一元多项式环

所有系数在数域 P 中的一元多项式全体称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$. 称 P 为 $P[x]$ 的系数域.

6. 一元多项式环的有关结论

多项式的加、减、乘运算对 $P[x]$ 封闭，即数域 P 上的任意两个多项式经过加、减、乘等运算后，所得结果仍是数域 P 上的多项式. 多项式的运算满足：加法交换律和结合律，乘法交换律和结合律，乘法对加法的分配律，乘法消去律.

在多项式的理论推导中常常涉及到多项式的次数和首项，要注意灵活运用次数公式和首项系数规律.

【例 1】　当 a,b,c 取何值时，多项式 $f(x)=x-5$ 与 $g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$ 相等.

分析　可以利用多项式相等的定义，即对应同次项的系数相等；也可根据数域 P 上多项式相等与多项式恒等（即对应函数值相等）一致的结论，分别取一些特殊的 x 的值来确定参数.

【解】　法 1　由于 $g(x)=(a+c)x^2+(-4a+b-c)x+(4a+b+2c)$，根据多项式相等的定义，得

$a+c=0,\quad -4a+b-c=1,\quad 4a+b+2c=-5$,解得 $a=-\dfrac{6}{5}, b=-\dfrac{13}{5}, c=\dfrac{6}{5}$.

法 2　分别取 $x=2,-1,0$,由对应函数值相等,得

$$-3=3b+4c,\quad -6=9a+4c,\quad -5=4a+b+2c$$

解得 $a=-\dfrac{6}{5}, b=-\dfrac{13}{5}, c=\dfrac{6}{5}$.

【例 2】　设 $f(x), g(x)$ 与 $h(x)$ 均为实数域上的多项式. 证明:如果

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

【证】　反证. 若 $f(x)\neq 0$,则 $f^2(x)\neq 0$. 由

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)=x(g^2a(x)+h^2(x))$$

知 $h^2(x)+g^2(x)\neq 0$. 因此 $\partial(f^2(x))=\partial[x(g^2(x)+h^2(x))]$.

但 $\partial(f^2(x))$ 为偶数,而 $\partial[x(g^2(x)+h^2(x))]$ 为奇数,因此,$f^2(x)\neq xg^2(x)+xh^2(x)$,这与已知矛盾,故 $f(x)=0$. 此时 $x(g^2(x)+h^2(x))=0$,由 $x\neq 0$ 知 $g^2(x)+h^2(x)=0$. 因为 $g(x), h(x)$ 均为实系数多项式,从而必有 $g(x)=h(x)=0$. 于是 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

【例 3】　证明实数域上多项式 $f(x)=x^3+px^2+8x+r$ 是实数域上一个多项式的立方当且仅当 $p=3\sqrt[3]{r}, q=3\sqrt[3]{r^2}$(开方为实 3 次方根).

【证】　设 $f(x)=(g(x))^3$,则 $g(x)$ 为一次多项式. 设 $g(x)=ax+b$,于是

$$x^3+px^2+qx+r=(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$$

比较系数得

$$a^3=1,\quad 3a^2b=p,\quad 3ab^2=q,\quad b^3=r$$

解得 $a=1$, $p=3b$, $q=3b^2$, $b=\sqrt[3]{r}$. 于是 $p=3\sqrt[3]{r}$, $q=3\sqrt[3]{r^2}$.

反之,若 $p=3\sqrt[3]{r}, q=3\sqrt[3]{r^2}$,显然有 $f(x)=(x+\sqrt[3]{r})^3$.

注　这类问题解法基于待定系数法,即两多项式相等当且仅当对应系数相等,转换为方程组求解.

【例 4】(湖北大学,2000)　令 $f(x)=(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1)$,求 $f(x)$ 的奇次项系数之和.

【解】　法 1　由于

$$x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1),\quad x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1)$$

两式相乘得

$$x^{102}-1=(x^2-1)f(x)$$

由于 $x^{102}-1$ 与 x^2-1 无奇数次项,从而 $f(x)$ 不可能有奇数次项,故其奇数次项系数之和等于 0.

法 2　因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,于是 $f(x)$ 的奇次项系数全为 0. 故其奇次项系数之和等于 0.

【例 5】　设有多项式组

$$g_1(x)=1,\quad g_{i+1}(x)=1-xg_i(x)\quad (i=1,2,\cdots)$$

求 $f(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{2005}(x)$ 的系数和.

【解】　设 $g_i(x)$ 的系数和为 S_i. 当 $i=1$ 时,$g_1(x)=1$,于是 $S_1=1$. 当 $i=2$ 时,

$$g_2(x)=1-xg_1(x)=1-x$$

于是 $S_2=0$. 作归纳假设,设

$$S_k=\begin{cases}1, & k\text{ 为奇数}\\0, & k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

则由 $g_{k+1}(x)=1-xg_k(x)$ 知 $S_{k+1}=1-S_k$. 当 k 为奇数时,$k+1$ 是偶数,且 $S_k=1$,于是 $S_{k+1}=0$;当 k 为偶数时,$k+1$ 为奇数,且 $S_k=0$,于是 $S_{k+1}=1$. 从而

$$S_{k+1}=\begin{cases}1, & k+1\text{ 为奇数}\\0, & k+1\text{ 为偶数}\end{cases}$$

根据数学归纳法得

$$S_i=\begin{cases}1, & i\text{ 为奇数}\\0, & i\text{ 为偶数}\end{cases}$$

设 $f(x)$ 的系数和为 S,则

$$S=1+S_1+0+S_3+0+\cdots+S_{2003}+0+S_{2005}=1+\frac{2004}{2}+1=1004$$

【例 6】(河南大学)　设 $f(x)$ 为一多项式,若

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad(\forall x,y\in\mathbf{R})$$

则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

【证】　若 $f(x)=0$,则证毕. 若 $f(x)\neq 0$,由于

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)\cdot f(x)=f^2(x)$$

所以 $f(x)$ 只能是零次多项式,令 $f(x)=A\neq 0$. 又因为

$$A=f(0)=f(0+0)=f^2(0)=A^2$$

所以 $A=1$. 此即 $f(x)=1$.

【例 7】　设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式,如果对任意 $a,b\in P$ 都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

证明 $f(x)=kx\quad(k\in P)$.

【证】　法 1　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,则对任意 $y\in P$ 有

$$f(2y)=f(y+y)=f(y)+f(y)=2f(y)$$

于是

$$0=f(2y)-2f(y)=[a_n(2y)^n+\cdots+a_1(2y)+a_0]-2[a_ny^n+\cdots+a_1y+a_0]=$$
$$(2^n-2)a_ny^n+\cdots+(2^2-2)a_2y^2-a_0$$

从而 $a_n=\cdots=a_2=a_0=0$. 这表明 $f(x)=a_1x$. 令 $k=a_1$,则 $f(x)=kx$.

法 2　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,则对任意 $y\in P$ 有

$$f(y)=f(y+0)=f(y)+f(0)$$

于是 $f(0)=0$,即 $a_0=0$,此时 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x$. 由于

$$f(2)=f(1+1)=2f(1),\quad f(3)=f(2)+f(1)=3f(1),\quad\cdots,\quad f(n)=nf(1)$$

设 $f(1)=k$,则得

$$\begin{cases}f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=k\\f(2)=2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=2k\\\qquad\cdots\cdots\\f(n)=na_1+n^2a_2+\cdots+n^na_n=nk\end{cases}$$

该方程组的系数行列式 D 为范德蒙行列式，且

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}\neq 0$$

所以方程组有惟一解，观察知 $a_1=k$，　$a_2=\cdots=a_n=0$. 故 $f(x)=kx$.

注　本题是由多项式的性质来刻画多项式的一个典型问题. 证法 1 通过性质构造一个多项式恒等于零，推出它的系数全为零，得出结论. 证法 2 利用解方程组得出.

1.3.3　多项式的带余除法及整除

要点点击

1. 带余除法

定理(带余除法)　设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则存在惟一的多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. 称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

2. 整除的概念

设 $f(x),g(x)\in P[x]$，如果存在多项式 $h(x)\in P[x]$，使 $f(x)=h(x)g(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除)，记为 $g(x)\mid f(x)$. 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式，商 $h(x)$ 也记为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，就是不存在 $h(x)$，使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

注　$P[x]$ 中的多项式不能作除法，而整除性不是多项式的运算，它是 $P[x]$ 中元素间的一种关系，即任给 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$，可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

3. 整除的充分必要条件

如果 $g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$.

注　整除概念与带余除法有密切的联系，但我们不能用带余除法来定义整除，即不能用余式为零定义整除. 因为如果这样定义整除，将会遗漏零多项式整除零多项式的情况(注意带余除法中要求 $g(x)\neq 0$).

4. 整除的性质

(1) 任一多项式 $f(x)$ 一定整除它自身，即 $f(x)\mid f(x)$；

(2) 任一多项式 $f(x)$ 一定整除零多项式，即 $f(x)\mid 0$；

(3) 零次多项式 c(即非零常数) 能整除任一多项式，即 $c\mid f(x)$；

(4) 零次多项式只能被零次多项式整除；

(5) 零多项式只能整除零多项式；

(6) 如果 $g(x)\mid f(x)$，则 $kg(x)\mid lf(x)$，其中 k 为非零常数，l 为常数.

(7) 如果 $f(x)\mid g(x)$，且 $g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

(8) 如果 $f(x)\mid g_i(x)$，又 $u_i(x)$ 为任意多项式，$i=1,2,\cdots,m$，则

$$f(x)\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_m(x)g_m(x)]$$