

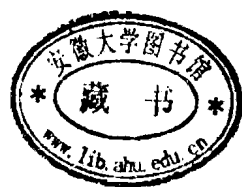
21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材

# 线性代数简明教程

杨荫华 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS



**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数简明教程/杨荫华编著. —北京:北京大学出版社,2011.1  
(21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材)

ISBN 978-7-301-12884-8

I. ①线… II. ①杨… III. ①线性代数-成人教育:高等教育-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 192237 号

书 名: 线性代数简明教程

著作责任者: 杨荫华 编著

责任编辑: 何耀琴

标准书号: ISBN 978-7-301-12884-8/O · 0734

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: [em@pup.pku.edu.cn](mailto:em@pup.pku.edu.cn)

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752926

出版部 62754962

印 刷 者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

经 销 者: 新华书店

890 毫米×1240 毫米 A5 11.875 印张 348 千字

2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 24.00 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:[fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

# 21 世纪高等院校经济与管理类继续教育教材 编 委 会

顾 问：李国斌 侯建军 张文定

主 任：郑学益

执行主任：崔建华

编 委(按姓氏笔画为序)：

丁国香 刘广送 朱正直 张孜孜

陈 莉 郑学益 林君秀 崔建华

符 丹 梁鸿飞 熊汉富

## 内 容 提 要

本书是高等成人教育、网络教育、继续教育经济与管理类本科“线性代数”课程教材。本书参照全国高等教育自学考试指导委员会的《线性代数(经管类)教学大纲》，并结合作者多年从事教学实践的经验编写而成。全书共分七章，内容包括行列式、线性方程组、 $n$ 维向量空间、矩阵、相似矩阵、实二次型，以及线性空间与线性变换等。每章内容按学习单元编写，每节配有导学提纲、习题、习题分析与参考答案。全书有总复习(选择)题和答案。本书从实际引入概念，尽量借助几何直观，叙述深入浅出、通俗易懂，富有启发性，便于在职读者业余自学，也可作为参加经济与管理类自学考试本科段考生的教材或参考书。

## 作者简介

杨荫华，副教授，毕业于原北京师范学院数学专业。长期在该院和中央财经金融学院、北京工业大学计算机学院从事基础数学教学工作。

早年在推广线性规划工作中经济效益显著，曾出席全国第一届运筹学现场会。曾与学部委员王湘浩教授合编《线性代数》一书，被多所高校采用。

近年在北京大学成人教育学院、北京大学网络教育学院、北京科技研修学院、中新企业管理学院和吉利大学等高校任教。课堂教学受到学生普遍欢迎。2002年所授课班参加国家统考，通过率达100%。

# 前 言

应北京大学经济学院和北京大学网络教育学院的要求,笔者曾编写了《线性代数》一书,作为北京大学推荐的“21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材”,由北京大学出版社于2004年3月出版。编写《线性代数》的初衷是为那些在职学习的成人教育(函授、业余学习、网络学习)等经管类学生提供一本适用的教材。这本教材在北京大学网络教育学院经管类各专业使用的几年里受到了广泛好评。这几年笔者也在北京大学网络教育学院和北京大学其他类成人教育工作中从事线性代数教学工作,在教学过程中发现对于在职学生,教材内容显得过于宽泛、理论性强、阅读起来比较困难。

为了使教材内容更符合这类读者的需要,更切合在职学生的实际,征得北京大学网络教育学院和北京大学经济学院同意,决定对《线性代数》进行改编。改编的指导思想是:根据经管类专业的需要、从实际出发引入并讲清基本概念,使学生理解定理含义和算法原理;掌握基本算法;行文便于自学。

秉持上述想法,笔者在以前《线性代数》一书的基础上,重新编写了《线性代数简明教程》。

1. 根据专业需要,限定在实数域上讨论线性问题。
2. 简化概念。例如, $n$ 阶行列式采用递归法定义;实向量夹角只讲正交。
3. 通过举例分析,说明定理实质含义,略去烦琐证明。
4. 充实了例题和习题分析,以帮助学生理解的基础上掌握基础知识和算法。
5. 教材按学习单元编写。每节增加了导学提纲和习题。书后附有习题分析与参考答案。
6. 最后增写了全书总复习(选择)题和习题分析与参考答案。

笔者在修改过程中参考了全国高等教育自学考试指导委员会《线性代数(经管类)教学大纲》。

本教程的出版是一种尝试,恳请读者和同行提出宝贵意见。

本书在出版过程中得到了崔建华、熊汉富、沈旭东、林君秀、王国义、何耀琴等同志的鼎力相助,在此深表谢意!

杨荫华

2010年6月于畅春园



# 目 录

预备知识	(1)
<b>第一章 行列式</b>	(5)
§ 1.1 $n$ 阶行列式定义	(5)
习题 1.1	(17)
§ 1.2 行列式按一行(列)展开公式	(19)
习题 1.2	(23)
§ 1.3 行列式性质与计算	(23)
习题 1.3	(39)
§ 1.4 克莱姆(Cramer)法则	(45)
习题 1.4	(49)
本章复习提纲	(50)
<b>第二章 线性方程组</b>	(54)
§ 2.1 消元法原理	(56)
习题 2.1	(61)
§ 2.2 用分离系数消元法解线性方程组	(62)
习题 2.2	(74)
§ 2.3 齐次线性方程组	(75)
习题 2.3	(81)
本章复习提纲	(82)

<b>第三章 <math>n</math> 维向量空间</b> .....	(86)
§ 3.1 $n$ 元向量及其线性运算 .....	(86)
习题 3.1 .....	(89)
§ 3.2 线性组合(线性表出) .....	(90)
习题 3.2 .....	(96)
§ 3.3 线性相关与线性无关 .....	(98)
习题 3.3 .....	(108)
§ 3.4 极大无关组与秩 .....	(109)
习题 3.4 .....	(114)
§ 3.5 子空间·维数·基与坐标·陪集 .....	(116)
习题 3.5 .....	(121)
§ 3.6 齐次线性方程组的解空间 .....	(122)
习题 3.6 .....	(129)
§ 3.7 非齐次线性方程组解陪集 .....	(130)
习题 3.7 .....	(133)
本章复习提纲 .....	(134)
<b>第四章 矩阵</b> .....	(140)
§ 4.1 矩阵的运算 .....	(140)
习题 4.1 .....	(153)
§ 4.2 可逆矩阵及其性质 .....	(157)
习题 4.2 .....	(160)
§ 4.3 等价矩阵 .....	(163)
习题 4.3 .....	(174)
本章复习提纲 .....	(176)
<b>第五章 相似矩阵</b> .....	(183)
§ 5.1 相似矩阵 .....	(184)
习题 5.1 .....	(186)
§ 5.2 特征值与特征向量 .....	(187)
习题 5.2 .....	(198)

---

§ 5.3	矩阵可对角化条件 .....	(199)
	习题 5.3 .....	(206)
§ 5.4	实向量的内积 · 长度 · 正交 .....	(208)
	习题 5.4 .....	(213)
§ 5.5	正交矩阵 .....	(215)
	习题 5.5 .....	(219)
§ 5.6	实对称矩阵的正交相似标准形 .....	(220)
	习题 5.6 .....	(225)
	本章复习提纲 .....	(226)
<b>第六章</b>	<b>实二次型</b> .....	(230)
§ 6.1	二次型与对称矩阵 .....	(231)
	习题 6.1 .....	(234)
§ 6.2	非退化线性替换 · 合同 .....	(235)
	习题 6.2 .....	(238)
§ 6.3	用非退化线性替换化二次型为平方和 .....	(238)
	习题 6.3 .....	(250)
§ 6.4	实二次型规范形的唯一性 .....	(251)
	习题 6.4 .....	(256)
§ 6.5	正定二次型与正定矩阵 .....	(256)
	习题 6.5 .....	(261)
	本章复习提纲 .....	(262)
<b>第七章*</b>	<b>线性空间与线性变换</b> .....	(266)
§ 7.1	线性空间定义与简单性质 .....	(266)
	习题 7.1 .....	(269)
§ 7.2	维数 · 基与坐标 .....	(270)
	习题 7.2 .....	(277)
§ 7.3	线性子空间 · 陪集 .....	(278)
	习题 7.3 .....	(281)
§ 7.4	线性变换及其矩阵 .....	(282)
	习题 7.4 .....	(289)

---

§ 7.5 欧氏空间与正交变换 .....	(290)
习题 7.5 .....	(299)
本章复习提纲 .....	(301)
本章复习题 .....	(303)
<b>总复习(选择)题</b> .....	(306)
<b>习题分析与参考答案</b> .....	(320)
<b>附录 本教程知识系统与关联图</b> .....	(365)

# 预备知识

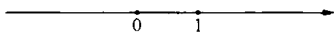
“代数”用初等数学的话说,就是用字母代表数参加运算.

直线方程  $y = kx + b$  是一次方程,其中有加法和数  $k$  与变量  $x$  的乘法(简称数量乘法).因此,这两种运算统称为线性运算或一次运算,只有线性运算的代数称为线性代数.

## 1. 实数域 $\mathbf{R}$

数学讨论问题首先要明确所用数的范围.唯此,问题才有确切的结论.例如方程  $x^2 + 1 = 0$  在实数范围内无解,在复数范围内就有解  $x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$ .

全体实数  $\mathbf{R}$  包括:①有理数(分数),即无限循环小数,例如  $0.\dot{3}, 0.5\dot{0}$ ;②无理数,即无限不循环小数,例如  $\pi, \sqrt{2}, e$ .把规定了原点、方向和单位的直线称为实数轴,如下图所示:



实数与实数轴上的点一一对应.这就不难理解实数具有有序性(任意两个实数都可以比较大小),稠密性(任意两个实数之间有无穷多实数)和连续性.

由于  $\mathbf{R}$  中包含数“0”和“1”,且对四则运算封闭(即任意  $a, b \in \mathbf{R}$ , 恒有  $a \pm b \in \mathbf{R}, ab \in \mathbf{R}$ , 当  $b \neq 0$  时,  $\frac{a}{b} \in \mathbf{R}$ ),所以称全体实数构

成的集合  $\mathbf{R}$  为实数域.

本教程第一至六章在实数域  $\mathbf{R}$  上讨论.

## 2. 和号“ $\sum$ ”(读作西格玛)

**定义 1**  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$

**性质 1**  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$

**性质 2**  $\sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i.$

**性质 3**  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i \quad (1 \leq k < n).$

**性质 4**  $\sum_{i=1}^s \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^s a_{ij} \right).$

## 3. 充分条件, 必要条件

能充分保证结论成立的条件称为充分条件.

**例 1** 两个实数  $x_1$  和  $x_2$ , 当它们的绝对值相等 ( $|x_1| = |x_2|$ ) 且符号相同时, 则(充分保证)  $x_1 = x_2$ .

这里“绝对值相等且符号相同”是使“ $x_1 = x_2$ ”成立的充分条件.

必要条件是指结论成立必不可少的条件. 换句话说, 缺了这个条件结论就不成立.

**例 2** 两个实数  $x_1$  与  $x_2$  相等的必要条件是它们的绝对值相等 ( $|x_1| = |x_2|$ ).

**例 3** 两个实数  $x_1$  与  $x_2$  相等的必要条件是它们的符号相同.

## 4. 逆否命题

逆否命题是对原命题而言. 例如,

原命题: 如果实数  $x_1$  与  $x_2$  相等, 则它们的符号相同.

逆否命题: 如果实数  $x_1$  与  $x_2$  符号相反, 则  $x_1$  与  $x_2$  不相等.

逆否命题与原命题是等价的.

## 5. 数学归纳法

对于自然数  $n$  成立的命题, 一般用数学归纳法证明.

**例 4** 对于任意自然数  $n$ , 恒有等式

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

成立.

**证** 当  $n = 1$  时, 上式左边 = 1, 右边 =  $\frac{(1+1) \times 1}{2} = 1$ , 因此等式成立.

假设  $n = k$  时等式成立, 即

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{(1+k)k}{2}.$$

当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{(1+k)k}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{(1+k)k + 2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k + 2)(k + 1)}{2} \\ &= \frac{[1 + (k + 1)](k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当  $n = k + 1$  时, 等式也成立. 这就证明了等式对任意自然数  $n$  都成立.

## 6. 反证法

有些命题由已知条件推证结论比较麻烦, 这时可以考虑用反证法, 即否定命题结论, 引出与已知条件或理论的矛盾. 这就从反面证明了命题成立.

**例 5** 已知  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  都是实数, 则  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$ .

**证** 假设  $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < 0$ , 则至少有一项  $a_k^2 < 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ). 此时

$$a_k = \pm |a_k| \sqrt{-1} = \pm |a_k| i,$$

此与已知  $a_k$  是实数矛盾.



# 第一章

## 行列式

行列式是一种特定的算式,学习线性代数要先学会计算行列式.本章要告诉你什么是行列式?它有什么性质?怎么计算出一个行列式的值?最后把中学解二元一次方程组和三元一次方程组的公式推广到  $n$  元一次方程组情形.

### § 1.1 $n$ 阶行列式定义

#### 导学提纲

1. 何谓 2 阶行列式?怎么计算 2 阶行列式的值?
2. 二元一次方程组解的公式?
3. 何谓 3 阶行列式?怎么计算 3 阶行列式的值?
4. 三元一次方程组解的公式?
5. 何谓元素  $a_{ij}$  的余子式  $M_{ij}$ ?何谓  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij}$ ?
6. 何谓  $n$  阶行列式?

为便于记忆二元一次方程组解的公式,引入