元又(1386)

Mathematical Library

On Least Squares

The Commercial Press, Limited

中華民國十三年六月初版

（算學叢書第一種最小二乘式一冊）

（每冊定價大洋玖角）

（外埠酌加運費匯費）

著者　李協

發行者　商務印書館

印刷所　商務印書館　上海北河南路北首寶山路

總發行所　商務印書館　上海棋盤街中市

分售處　商務印書分館　北京天津保定奉天吉林龍江　濟南太原開封鄭州西安南京　杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口　長沙常德衡州成都重慶瀘縣　福州廣州潮州香港梧州雲南　貴陽張家口新嘉坡

五八一七自

最小二乘式

目錄

最小二乘式

敍論

余今將以一種最緻密之算法,名曰最小二乘式,介紹於吾國.此法用於測量地域,用於物理化學等觀察,平其舛差可以得極精確之結果,爲用甚要且鉅也.

中國訖今尙無最小二乘式算法譯本,或關乎此法之著述,足徵吾國人對於科學之懈弛.顧此法在歐洲則非新創,蓋闡明已百餘年矣.

1795年,德意志著名數學家 Gauss 年始十八歲,已闡明最小二乘式之理.同時法人 Legendre 亦有此發明. 1806年已著論行世.而 Gauss 之法則於1809年始經宣佈.

發明之權,以前後論,自應屬之 Legendre. 顧 Gauss 獨能力窮此術,闡發無遺,踵其後者又能窮致其用,而在法國則反寂然也.

最小二乘式之名,則由 Legendre 始,蓋 Legendre 1806年所發表之著作'測定彗星軌道新法' (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*) 其附卷有 *Sur la méthode des moindres carrés*, 最小二乘法論文也. Gauss 第一宣布關乎此法之著作,則爲臘丁文,名曰 *Theoria motus corporum coelestium inseconibus conicis solem ambientium*, 以後又有關乎此法之著作凡六種.

踵 Legendre 及 Gauss 而起者,若 Bessel, Euler, Jobueger, Lambert, Boscowich, Lagrange, Laplace 等,皆有功於此術者也.

今且進而言此法之原理.蓋人之官覺能力有限制,器具之精良非臻盡美,則觀察不能無舛差也.同一竿也,使甲乙並量其高,甲所報與乙所報不能盡同也.同一角也,用此器及彼器量其度分秒,二器所得不能一致也.同一人也,同一器也,使反覆量之,此次所得與彼次所得又不能無異也.一直角三角形也,量其三邊之長不能恰合於商高之定例也.(句方股方之和等於弦方,西人名曰 Pythagora's Law, 在中國則商高時已知此定理.'周髀算經'曰,故折矩以爲句廣三,股脩四,徑隅五,旣方其外半之一矩環而共盤得成三四五.又曰,若求邪至日者,以日下爲句,日高爲股,句股各自乘,並而開方除之得邪.)量其三角,不能並爲二直角無盈朒也.

今欲免舛差之弊,有一法可乎?曰,凡量一物大小,恃一人,用一器,觀察一次足矣,羣言紛淆反足亂人意也.量直角三角形,得其二邊足矣,他邊之長可布籌而知也.得其二角足矣,他角可由一百八十度減已知之角而知也.畫蛇添足,非徒無益,又足害事也.

爲是言也,是無異士師之折獄,但據一證人之詞以爲斷,欲得其平難矣.夫證人多矣,詞各有異,苟合而加以審察,方可得其眞情.測算亦然,必合多數之觀察窮其舛差之由來,究其大小,始可得幾近無差之結果.此則需乎平差之術 (Ausglechungsrechung),此最小二乘式算法之所由來也.

第一章　論觀察之差及其分類

觀察者之能力,與所獲舛差之大小頗有關繫.后羿一射,萬夫決拾;弱子操弓,慈母閉門.蓋羿之於射有不失正鵠之能力,弱子則東西南北且莫適從,遑云射乎,無怪乎慈母之閉門也.然耕當命僕,織當命婢,射亦當命習射者,言舛差則就習射者言,不當就不習射者言之也.今試懸一招焉,畫同心三圜於其上,聚習射者而命之射,以圜心爲的,中之者鮮矣.不出乎初圜者,射之上者也,然爲數無幾.介乎初次圜之間者,次焉者也,能者居多焉.介乎次圜三圜之間者,下焉者也,在習射者之中亦不數睹焉.並三圜而不能入,則可無與於此射矣.故舛差有無理之舛差,有有理之舛差.招在東而射西,無理者也.雖不中鵠不遠矣,有理者也.舛差有麤微之別焉.次圜之外,麤者也.次圜之內,微者也.首圜之內,則更微矣.觀察者須能免於麤舛差,始可以事觀察.

麤舛差之原,不特此也.使以經緯儀測角而風撼其三足架,遠視鏡軸之方向已失而觀察者莫覺.使以氣壓儀測高而氣溫驟變,寒暑針已報其差而觀察者弗睹.凡此類事,一有不愼,麤舛隨之,不能免除,亦不足以事觀察也.

麤差可免,微差不能也.取術愼,觀察細,練習頻,固可限其差於極微極細.然欲純然無差,不可及也.

舛差之所由來,命曰差源.今欲於各種觀察之結果探其差源,難能事也.然以舛差發現之情形,可別之爲二類:(1) 其發現

也恆有一定之律,其方向恆不變,或常爲正,或常爲負.(2)其發現也無一定之律,其方向非不變,可爲正,可爲負.請舉例以明之.設布尺量距.使尺之長稍有過焉,雖其差僅微忽,然每布尺一次卽增一微忽之差,其差與布尺之次數爲正比,與所量之距之遠近爲正比,其方向常爲正.如是者,名曰有律之舛差.

使所用布尺無微忽之過與不及,而布尺時或稍前,或稍後,雖其前後之差亦不過微忽,而其結果亦可以使觀察之數頗有出入.但布尺或過前過後,二者不敢必其一有而他無,其機會相等也.或巧遇之而過前者與過後者數適相等,正負適相消,則其差爲零,然而不可必也.或不巧遇之而俱過前或俱過後,其差俱爲正或俱爲負,則其差爲極盈,或正負之數不等而以正負之差爲差,則其差較弱,然亦不可必也.如是者,名曰無律之舛差.抑有一事可以斷言者,則無律之差,其增長率常遲於有律之差也.

舛差之源不一類,必探其源,别其類,始可以言平差.

二類之差,或其一與焉,或兩者俱與焉,必審觀察之結果而別之.

例若量一物之大小,用同一器,守同一法,受同一外感(氣候或他物理上感觸),反復數次而所得結果互有出入,但其差甚微,非可以視作麤者,則其源蓋無律者也.反是,若每量一次用器異,外感殊,法亦不一,而各得微差,則其源或爲有律,或爲無律,或俱有責焉,必合二者所得舛差之量而審別之,乃可以定某類舛差分劑之多寡.

第二章 論或是率,舛差之或是率

天下事物,有可見其眞是者,有不可見其眞是而敢言其或是者.謂河中有鯉,吾敢言其眞是也;謂釣於河而得鯉,吾但可言其或是也.或是者有等差焉.謂良馬日馳五百里,吾敢信其多分是而少分非,謂駑蹇日馳五百里,吾敢信其少分是而多分非.擲一骰於盆中,而欲得⁝·⁝,必不可得也.·至⁝⁝任取其一,必可得也.獨欲得⁙則或可得或不可得,且多分不可得而僅少分可得.其不可得之率爲六之五,其可得之率爲六之一.蓋骰之六面,五面非⁙,僅一面爲⁙也.其可得之率,名曰或是率.

或是率何以定.曰,凡事物之遇也,有其機緣焉,機緣多者頻遇,機緣寡者罕遇.遊於稷下者所見多齊人,遊於郢者所見多楚人.於稷下則齊人之機緣多,而於郢則楚人之機緣多也.骰之六面,⁙居其一,是⁙之機緣僅六之一也.故言某事物之或是率者,以某事物機緣之數與凡所可有機緣之數相比也.舛差亦然.命某舛差機緣之數爲 m, 凡所可有機緣數爲 n, 則該舛差之或是率爲

$$W=\frac{m}{n} \tag{1}$$

n 必大於 m, 故或是率 W 必恆小於 1. 設 $m=n$, 則 $W=1$: 其義云何?則或是進而爲眞是也.設使骰之六面俱爲⁙,則每擲皆⁙,不必言或是矣.⁙之機緣於是有六,而骰所可現之面亦爲六,卽凡所可有機緣之數爲六.以六比六,等於一.故一者,眞是之謂也,亦可命爲或是率之單位.

設 $m=0$, 則 $W=0$, 無機緣, 卽無或是率也. 故一骰所以不能擲七點者, 以骰之六面無七點之機緣也.

設欲以二骰擲七點, 則可. 其機緣凡有六, 因 $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$, 俱爲七也. 而凡所可有之機緣則凡三十六. 因此骰之每一面, 皆有一機緣與他骰任一面並列, 故此骰六面, 一一與他骰之六面相遞並列, 其機緣之數爲 $6\times 6=36$ 也. 於是知七點之或是率爲 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

設囊中有黑豆五, 白豆七, 黃豆九, 任出其一, 則黑豆之或是率爲 $\frac{5}{21}$, 白豆之或是率爲 $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$, 黃豆之或是率爲 $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

設囊中三色豆之數如上. 任出其一, 欲其或爲黑或爲白, 則黑豆之機緣有五, 白豆之機緣有七, 二豆之機緣共有十二, 而凡所可有機緣之數爲二十一. 故黑白豆任出其一之或是率爲 $\frac{12}{21}$.

普通論之, 甲之機緣爲 a, 乙之機緣爲 b, 丙之機緣爲 c, 甲乙機緣之和爲 $a+b$, 凡所可有機緣之數爲 $a+b+c$. 故甲或乙任出其一之或是率爲 $W=\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}$.

甲獨出之或是率爲 $W_1=\frac{a}{a+b+c}$, 乙獨出之或是率爲 $W_2=\frac{b}{a+b+c}$, 故甲或乙任出其一之或是率爲

$$W=W_1+W_2, \tag{2}$$

名曰或是率之和.

設觀察時,一舛差 ϵ_1 之或是率爲 W_1, 又一舛差 ϵ_2 之或是率爲 W_2, 又一舛差 ϵ_3 之或是率爲 W_3, 如是例推,則多舛差或是率之和爲

$$W=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots \tag{2'}$$

設有二囊.甲囊貯黑豆五,白豆七.乙囊貯黑豆三,白豆六.而欲由每囊中各出一黑豆,則因甲囊中每一黑豆各有與乙囊中任一黑豆並出之一機緣,故二囊同時出一黑豆之機緣爲 $5\times3=15$, 而凡所可有機緣之數則爲 $(5+7)\ (3+6)=12\times9=108$. 故二囊同時出一黑豆之或是率爲 $\frac{15}{108}=\frac{5}{36}$.

普通論之,設甲囊中有黑豆 a', 白豆 b',乙囊中有黑豆 a'', 白豆 b''. 欲同時由二囊中各出一黑豆,則其或是率爲

$$W=\frac{a'a''}{(a'+b')\ (a''+b'')}=\frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{a''}{a''+b''}.$$

由甲囊出一黑豆之或是率爲 $W'=\frac{a'}{a'+b'}$, 由乙囊出一黑豆之或是率爲 $W''=\frac{a''}{a''+b''}$. 故二囊同時各出一黑豆之或是率爲

$$W=W'\cdot W'', \tag{3}$$

名曰或是率之積.

設觀察多次,其每次舛差命爲 ϵ', ϵ'', ϵ''',……, 各舛差之或是率爲 W', W'', W''',……, 則其或是率之積爲

$$W=W'\cdot W''\cdot W'''\cdots\cdots. \tag{4}$$

以上所舉諸例,各事物之機緣數,皆假定爲可數而知者也.故其或是率亦易知之.設其或是率不能算得,則可以其出現之頻數,返而推其或是率.

例如言煤礦工人，千人中僅二百五十人壽達六十齡．則任指一煤礦工人，推其壽命，可否達六十，其或是率不過 $\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$．

今再以是例推之於舛差．顧舛差之眞值，難得知也．然一事物，觀察至多次，則雖不得其眞，而其近似乎眞者可比推而見也．近似乎眞者，維何？曰，平均值是也．

下舉之例，豫定者二事．(一)麤舛差絕不至出現．(二)觀察用同法，用同器，同一謹密行之．

設一距離，量之二次．第一次得其長爲 l_1，第二次爲 l_2，二者數不相符，則俱非可命爲眞長也．

姑命 L 爲距離之長．所量得者或過之，爲 $l_1=L+\epsilon_1$；或不及，爲 $l_2=L-\epsilon_2$．是其舛差之方向，或爲正或爲負也，而正與負之機緣正相等耳．故舛差之和，必可望至正負相消而等於 0，卽 $\epsilon_1+\epsilon_2=0(\epsilon_1=+\epsilon;\ \epsilon_2=-\epsilon)$．以兩次所得之值 l_1 及 l_2 相加而二分之，卽得

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2}{2}=\frac{2L}{2}=\frac{l_1+l_2}{2}, \tag{4}$$

名曰觀察結果之平均值，雖非眞值而較爲密近者也．

若觀察 n 次，得 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ 諸值．每次各帶一舛差爲 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\cdots\cdots, \epsilon_n$，其方向或爲正或爲負．因距機緣相等，故可命正負之數相等，卽其和 $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3\cdots\cdots+\epsilon_n=[\epsilon](1)=0$．姑命 L 爲距離之長，則 $l_1=L+\epsilon_1,\ l_2=L+\epsilon_2,\ l_3=L+\epsilon_3, \cdots\cdots,\ l_n=L+\epsilon_n$．

(1) 凡數之和以方弧〔 〕代諸加號，爲 Gauss 所創用．本書依用之．下倣此．

而

$$L=\frac{L+\epsilon_1+L+\epsilon_2+L+\epsilon_3+\cdots+L+\epsilon_n}{n}=\frac{[L+\epsilon]}{n}$$

$$=\frac{nL+[\epsilon]}{n}=\frac{[l]}{n}, \qquad (4)$$

爲觀察 n 次距離之平均值,雖不可遽命爲距離之眞長,而較之觀察二次之平均值則更密近矣.

觀察之次數愈多,則其平均值愈近眞值.

不得觀察之眞值以定各舛差之或是率,就其平均值定之,亦可也.茲借一現成之例以明之.

昔 Bessel 測東普魯士之經緯度,其於 Trenk 站所測 Mednick-Fuchsderg 之角,凡十八次,其結果列舉如下表:

號數	觀察角度	舛差
1	83° 30′ 36.25″	−1.38″
2	7.50	−2.63
3	6.00	−1.13
4	4.77	+0.10
5	3.75	+1.12
6	0.25	+4.62
7	3.70	+1.17
8	6.14	−1.27
9	4.04	+0.83
10	6.96	−2.09
11	3.16	+1.71
12	4.57	+0.30
13	4.75	+0.12
14	6.50	−1.63
15	5.00	−0.13
16	4.75	+0.12
17	4.25	+0.62
18	5.25	−0.38
總計	87.59	+10.71 −10.64
平均值 83° 30′ 34.87″		

上表舛差,以各次觀察之數與其平均值相較而得者也.設論各舛差之或是率,則視各舛差之在

0″及1″間者凡八

1″及2″間者凡七

2″及3″間者凡二

3″及4″間者凡○

4″及5″間者凡一

總計舛差凡十有八。

由上統計中,可見舛差之小者,其遇也頻,舛差之大者,其遇也疏.蓋所用器壹,所用法同,其行量術也同一謹密,小差不能免,大差亦未易數數睹也.

由此觀之,舛差之或是率,關乎舛差之大小(關乎其精麤).上統計中,舛差之在0″及1″間者凡八遇,與舛差總計十八相比爲$\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.取0″及1″之平均值爲0.5″,則0.5″之或是率爲

$$W(0.5'')=\frac{4}{9}=0.444\cdots\cdots.$$

但舛差之或是率,不但與其精麤有關繫也(如上例舛差之平均值爲0.5),且與其平均值上下二界之距有關繫(簡曰界距).上例平均值0.5″,其上下二界之距爲0″至1″=1″,其或是率固爲0.44…矣.設狹其界距,令由0.25″至0.75″,其平均值仍爲0.5″,而其遇之次數僅爲三,卽其或是率爲$W(0.5'')=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.舛差之數愈多,所取之界距愈狹,則或是率之大小可作與界距大小爲正比觀之.

上理若以分析法推之,命舛差 ϵ 之或是率爲 $W(\epsilon)$,因或是率關乎 ϵ 之大小,可命爲 ϵ 之函數,其關繫可以 $\phi(\epsilon)$ 代之.又因其或是率與界距之大小爲正比,命界距爲 $d\epsilon$ (ϵ 之微分,蓋界距卽舛差增長之一段也),則或是率可總二關繫爲

$$W(\epsilon)=\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \qquad (5)$$

卽舛差 ϵ 在 $d\epsilon$ 界距中之或是率也.其上下二界爲

$$\epsilon-\frac{d\epsilon}{2}\ 及\ \epsilon+\frac{d\epsilon}{2},$$

或 $$\epsilon-d\epsilon\ 及\ \epsilon+d\epsilon.$$

ϵ 至 $d\epsilon$ 之間愈狹,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 之值愈小.設 $d\epsilon$ 小至無窮,則 $\phi(\epsilon)d\epsilon$ 亦小至無窮.如此,則借微分算法,可算一舛差於任意界距中之或是率.

設有多數舛差,ϵ 之或是率爲 $\phi(\epsilon\ d\epsilon$, ϵ' 之或是率爲 $\phi(\epsilon')d\epsilon$, ϵ'' 之或是率爲 $\phi(\epsilon'')d\epsilon$, 如是例推,皆以 $d\epsilon$ 等距遞列.於此諸舛差中欲任遇一舛差,則其或是率爲 ϵ 或 ϵ' 或 ϵ'' 等任遇其一各或是率之和(公式 2').又命其距 $d\epsilon$ 小至無窮,則任取上下二界 a 及 b 間一舛差之或是率爲

$$W_a^b=\int_a^b\phi(\epsilon)\,d\epsilon. \qquad (6)$$

第三章 論舛差函數

上章公式(6)內之 $\phi(\epsilon)$, 名曰舛差函數. 欲知舛差在任二界 a 及 b 間之或是率, 必先知此函數. 此函數之性質究若何, 吾敢斷言者, 有以下三端.

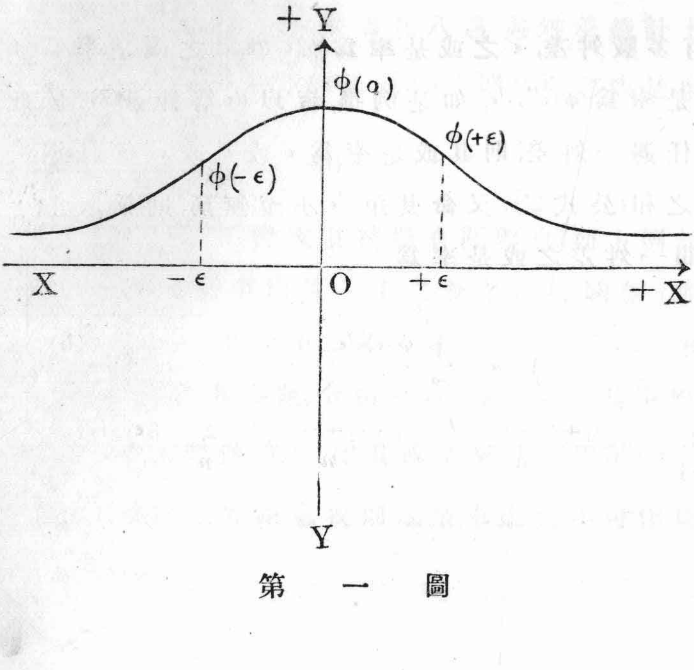
(1) 此函數必為偶函數. 因觀察多次, 正舛差與負舛差機緣當相等(見上章), 則應

$$\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon) \tag{7}$$

若非偶函數, 則不能符此例也.

(2) ϵ 之值增(無論正負, 以其絕對值言之), 則 $\phi(\epsilon)$ 之值減. 因舛差愈麤, 其或是率應愈少也.

(3) $\epsilon=0$ 則 $\phi(\epsilon)=Max.$, 卽舛差等於 0 則其或是率應最大也.



第一圖

試作圖以表之.作縱横二軸 X 及 Y. 度 ϵ 於横軸上,自元點 O 起向右爲正,向左爲負.由 X 任何點垂直向上度 $\phi(\epsilon)$ 與 Y 平行,則各點 $\phi(\epsilon)$ 之端點可聯成一曲線.試思此曲線應作何狀.

如第一圖: (1) 此曲線在 Y 軸兩側,必互相對稱,因 $\phi(+\epsilon)=\phi(-\epsilon)$ 故也. (2) X 軸必爲此曲線之漸近線,因舛差之遇,固麤者稀而細者密,然其麤細稀密,究無絕定之界限也.

舛差函數之性質,於此可略見一斑,顧其於 ϵ 之關繫眞狀,猶未知也,則請用下法以明之.

1. 用代數平均值求舛差函數法

一筆之長,兩次量之,得數不相符,則疑其一過長,一不足也.合兩得數而折中之,則約得其實矣.若更多次量之,則其得數之或過或不及,二者約各居其半,以其機緣相等故也.合多次得數,而以觀察之次數除之,則愈密近矣.名曰折中數,或曰代數平均值.代數平均值之或是率,在各觀察得數中,可以謂爲最大者也.

命各次觀察之得數(各次觀察俱同等審愼者)爲 $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$, 各帶一舛差爲 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\cdots, \epsilon_n$, 數之眞值命爲 χ.

觀察所得之數補其舛差,卽爲眞值.故

$$\chi=l_1+\epsilon_1=l_2+\epsilon_2=\cdots\cdots=l_n+\epsilon_n$$

$$=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}+\frac{\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n}{n}=\frac{\Sigma l}{n}+\frac{\Sigma\epsilon}{n}.$$

上式右端之第一項,非他,卽觀察數 l 之代數平均值也.命爲 x, 故

$$x=\frac{l_1+l_2+\cdots l_n}{n}=\frac{[l]}{n}, \qquad (8)$$

而
$$\chi=\frac{[l]}{n}+\frac{[\epsilon]}{n}=x+\frac{[\epsilon]}{n}. \qquad (9)$$

n 愈增,則 $\frac{[\epsilon]}{n}$ 之値愈減.若 $n=\infty$,則 $\frac{[\epsilon]}{n}=0$ 而 $\chi=x$,卽觀察數之代數平均值可以作其眞值觀也.然孰有此力觀察一事物至無窮次乎?故其眞值吾不能驟得.若得觀察數之眞值,則其所帶舛差之眞値亦不難由

$$\epsilon_1=\chi-l_1,\ \epsilon_2=\chi-l_2,\cdots\cdots,\ \epsilon_n=\chi-l_n$$

各式而顯然畢露.惟吾所知者,仍不過觀察數之代數平均值也,故其舛差亦不能卽得其眞而不過爲其或是之値命爲

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$$

$$x=l_1+\lambda_1=l_2+\lambda_2=\cdots\cdots=l_n+\lambda_n,$$

或
$$x=\frac{[l]}{n}+\frac{[\lambda]}{n}. \qquad (10)$$

惟上曾命 $x=\frac{[l]}{n}$,則必 $\frac{[\lambda]}{n}=0$.

n 爲觀察之次數,不能期其至於無窮,故必

$$[\lambda]=0. \qquad (11)$$

由此可知舛差之性質,有正有負.積之,則彼此相消而化爲烏有也.

予於第二章之末,已以或是率之積用於觀察之舛差,命 λ_1 之或是率爲 $\phi(\lambda_1)\,d\lambda_1$, λ_2 之或是率爲 $\phi(\lambda_2)\,d\lambda_2,\cdots\cdots$. λ_n 之或是率爲 $\phi(\lambda_n)\,d\lambda_n$. 則於 n 次觀察令各舛差相遞俱見,其或是率爲各舛差之積(公式(3′)),卽