21世纪高职高专规划教材

公共基础系列

高等数学(工科类)

上册

主编　唐瑞娜　白淑岩

副主编　姜成建　李春海　赵玉松

(修订本)

$\int$　τ　θ

μ

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学(工科类)

上 册

(修订本)

主　编　唐瑞娜　白淑岩
副主编　姜成建　李春海　赵玉松

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书分上、下两册，共5篇16章。上册包括微积分、常微分方程2篇，涉及函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、二元函数微积分及常微分方程共9章的内容；下册包括拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计3篇，其中有拉普拉斯变换、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计初步共7章。每章节后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案。

本书注意结合中学教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明；编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中；叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学。

本书可作为高职高专、成人院校工科类专业的高等数学教材，也可作为数学专科学生自学的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册：工科类/唐瑞娜，白淑岩主编．—修订本．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2006.12

(21世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 7－81082－393－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①唐…　②白…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第119730号

责任编辑：黎　丹
出版发行：清华大学出版社　　邮编：100084　　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　　印张：18　　字数：404千字
版　　次：2004年10月第1版　　2006年12月第1次修订　　2006年12月第3次印刷
书　　号：ISBN 7-81082-393-0/O·16
印　　数：8 001～12 000册　　定价：26.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@center.bjtu.edu.cn。

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因而与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教学改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员单位皆为教学改革成效较大、办学特色鲜明、办学实力强的高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“21 世纪高职高专规划教材编审委员会”（以下简称“教材编审委员会”）成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师或生产第一线的专家。“教材编审委员会”组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

目前，“教材研究与编审委员会”计划用 2～3 年的时间出版各类高职高专教材 200 种，范围覆盖计算机应用、电子电气、财会与管理、商务英语等专业的主要课程。此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”编写，其中部分教材是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》的研究成果。此次规划教材按照突出应用性、实践性和针对性的原则编写并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；适应“实践的要求和岗位的需要”，不依照“学科”体系，即贴近岗位，淡化学科；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必要、够用为度；尽量体现新知识、新技术、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们希望全国从事高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来，推荐“教材编审委员会”成员和有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践中的意见与建议，及时反馈给我们，以便对已出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有规划教材由全国重点大学出版社——清华大学出版社与北京交通大学出版社联合出版，适合于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院使用。

21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会

2006 年 8 月

修订本前言

《高等数学》上、下册（工科类）一书初版于2004年，承蒙许多同行厚爱，几次印刷使用。由于编者水平有限，加之初版编著时间较紧，所以不当之处在所难免。为了纠正这些不足，进一步满足同仁的需要，故决定修订。

本书在保持原书基本结构不变的前提下，进行了全面的修订。一方面订正了原书中的某些错误与疏漏，另一方面对部分内容做了适当的增删和改动，以求使得全书的内容更通顺、简练，更能适合新世纪高职高专课程改革对高等数学教材的要求。

这次修订工作由唐瑞娜、李美贞、白淑岩、姜成建、李春海等人完成。北京交通大学出版社的黎丹同志为本书的修订做了许多深入细致的工作，特表感谢。

本书自出版以来，得到了广大读者的关心与支持，在此我们致以深切的谢意，并希望继续得到您的支持，欢迎读者和同仁对本书给予批评与指正。

编　者

2006年10月

前　言

英国著名哲学家培根指出："数学是科学的大门和钥匙。"数学分为初等数学与高等数学。高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学。初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形，使用的方法一般来说是静止的、孤立的；而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法研究变量和变化的图形，从而能更生动地反映出客观世界的变化规律，所以高等数学已成为现代科学技术、科学管理等诸多领域理论研究的工具与基础，同时也是高职高专院校课程设置中一门十分重要的文化基础课和工具课。

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》，结合高职高专工科类专业的特点，针对高职高专的培养对象而编写的。在编写过程中，做到了以下几点。

- **定位准确，针对性强**。以高职高专院校的培养目标为依据，以适用、够用、好用为指导思想，在体现数学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，做到既注重高等数学的基础性，又适当保持其学科的科学性与系统性，同时更突出它的工具性。
- **教材编写模块化**。考虑到高职高专工科类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因，教材的编写采用了模块化，全书分上、下两册共五大模块。上册包括微积分、常微分方程 2 个模块，下册包括了拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论和数理统计初步 3 个模块。每个模块的内容相对独立，有利于学校根据实际情况灵活安排课程，方便教师有选择性地教学。
- **内容安排层次分明，重点突出**。微积分是高等数学的主要内容，是现代工程技术的主要数学支撑，也是高职高专工科类学生学习高等数学的首选，因此作为必学的内容，把它放在第一模块。常微分方程是建立在微积分基础之上的，是微积分在实际中的应用，所以把它作为第二模块与微积分一起放在上册。
- **理论联系实际，突出了数学的应用思想**。书中概念的引入、定理的证明等尽可能地从实际背景入手；在第一部分微积分的应用中，除了介绍微积分在物理方面与几何方面的应用外，还单独增加了一元函数微积分在经济学中的应用，以求拓宽工科类学生的数学应用基础，提高其理论联系实际的能力。
- **加大了例题的示范性，利于学生尽快掌握数学的方法**。习题的配备类型合理，文题对应，难易适中，具有一定的梯度，符合学生的认知规律。

参加本书编写的作者是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师。在编写过程中，我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍，融进了自己的教学心得和体验，结合实际，反复推敲，力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高

等数学教材。

鉴于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者与同行指正。

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第1篇　微　积　分

第 *1* 篇　微积分

第1章　函　　数

微积分是数学的重要分支，是高等数学的核心内容，它开创了变量数学的时代，使数学能够描述自然界中事物的变化与运动，成为数学联系实际的重要工具. 因此，它是现代科学技术的主要数学支撑.

函数是微积分的主要研究对象. 微积分的主要研究内容就是在实数范围内，讨论、研究函数的微分学和积分学. 因此，熟练掌握函数的有关基础知识对学习微积分至关重要. 本章将在高中数学的基础上，复习和加深函数的相关知识.

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

客观世界中的事物都是相互依赖、相互变化、相互联系着的，这种相互关系在数学上的表现形式之一就是所谓的函数关系.

定义 1.1　设 D 为非空实数集，x 与 y 是两个变量. 如果对变量 x 在 D 中的每一个值，按照某种对应法则 f，变量 y 有确定的实数值与之对应，那么就称变量 y 是变量 x 的函数，**记为 $y=f(x)$，$x\in D$** 或简记为 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量. 称自变量的取值范围 **D 为函数 f 的定义域**；与 x 对应的 y 值称为 x 处的函数值，当 x 取遍 D 内的所有实数时，相应函数值的全体组成的集合 $\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 称为**函数的值域，记为 $f(D)$.**

自变量只有一个的函数称为**一元函数**，否则称为多元函数；如果对于 D 中每个 x 的取值，y 值唯一，则称函数为单值函数；如果对于 D 中每个 x 的取值，y 有两个或两个以上不同的值与之对应，则称函数为多值函数. 微积分主要讨论单值函数.

定义域 D 与对应法则 f 是确定函数的两要素，当两个函数的定义域与对应法则相同时，称这两个函数相同(或相等). 此时，不论这两个函数的表示形式如何，二者都表示同一个函数，否则称这两个函数不相同(或不相等).

【例 1.1】　(1) 函数 $y=1$ 与函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 虽然表示形式不一样，但由于它们的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，对 $\mathbf{R}$ 中每一个实数 x，它们都对应相同的函数值 1，所以二者表示的是同一个函数；

(2) 函数 $y=|x|$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数；

(3) 函数 $y=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$ 与函数 $y=x+2$ 定义域不同，前者为$\{x|x\neq 1\}$，后者为实数集 $\mathbf{R}$，故它们是不相同的函数.

定义 1.2 设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，则

(1) 称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合为**闭区间**，记为$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

(2) 称满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合为**开区间**，记为(a, b)，即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}$$

(3) 称满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合为**半开半闭区间**，记为$[a, b)$或$(a, b]$，即

$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\},\ (a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

实数 a，b 称为相应区间的端点.

以上这些区间都称为**有限区间**，称 $b-a$ 为这些区间的长度. 在数轴上，这些有限区间对应长度有限的线段.

引进记号“$+\infty$”(正无穷大)及“$-\infty$”(负无穷大)，则有以下的**无限区间**. 如

$$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\},\ (-\infty, b)=\{x|x<b\}$$

实数集 $\mathbf{R}$ 记为$(-\infty, +\infty)$，即$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$. 有限区间$[a, b]$，$(a, b)$及无限区间$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$在数轴上的表示分别如图1-1(a)，(b)，(c)，(d)所示.

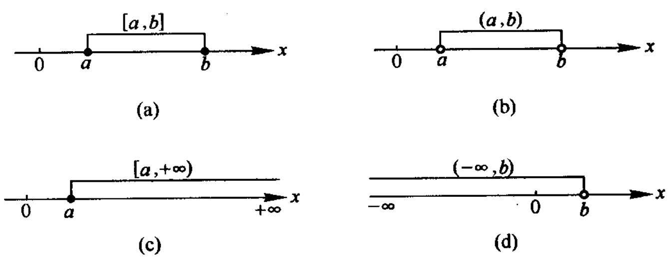

图 1-1

下文中在不需要指明区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，一律简称为**区间**，用符号 I 表示.

定义 1.3 设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta, a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记为$U(a, \delta)$，即$U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$，称 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径；将 a 的 δ 邻域中心 a 去掉后得 a 的 δ 空心邻域，记为 $U^{\circ}(a, \delta)$，即

$$U^{\circ}(a, \delta)=(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)=\{x|(0<|x-a|<\delta\}$$

点 a 的 δ 邻域及空心 δ 邻域有时又分别简记为 $U(a)$ 与 $U^{\circ}(a)$.

1.1.2　函数的表示法

函数的表示方法一般有以下 4 种.

(1) **解析法**(又称为公式法). 此种表示方法将函数关系用数学式子给出，便于理论推导和研究. 微积分中的绝大部分函数均以此种方法表示.

(2) **图像法**. 如果函数 $y=f(x)$ 定义在数集 D 上的话，其图像就是 xOy 平面上的点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$. 一般情况下，它是平面上一条曲线. 用图像法表示函数，形象直观，函数的几何性态表现得十分明显. 例如，气象站的温度记录器，记录了温度与时间的函数关系，它就是借助于仪器自动描绘在纸带上的一条曲线表达的.

(3) **列表法**. 自变量 x 与因变量 y 的函数关系通过表格反映出来，其使得自变量 x 与因变量 y 的对应关系一目了然. 例如，火车的出站和进站的车次都是时间的函数，火车时刻表就是用列表的方法给出了这种函数关系.

(4) **语言叙述法**. 即函数关系是用语言文字描述出来的.

【例 1.2】　取整函数 $f(x)=[x]$，它表示不超过 x 的最大整数，例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-3.5]=-4$. 它的图形如图 1-2 所示.

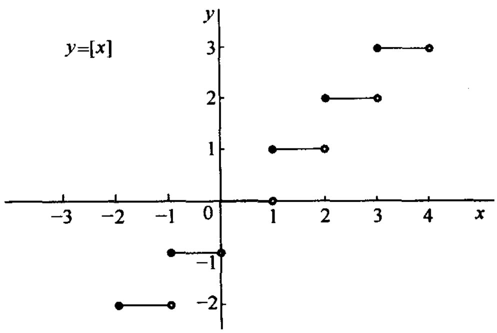

图 1-2

【例 1.3】　狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

由狄利克雷函数的定义知，当 $x=-1, \sqrt{2}, \frac{4}{5}$ 时，对应的函数值分别为 1，0，1. 其图形画不出来，但可以想像为：x 轴上稠密地分布着无穷多点，在直线 $y=1$ 上也有无穷多个点稠密地分布着.

【例 1.4】 符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

的图形如图 1－3 所示，对任意实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

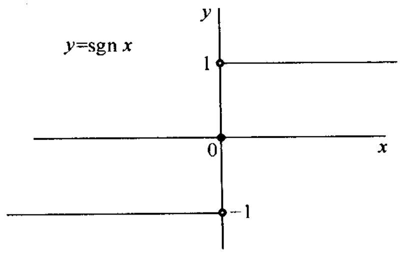

图 1－3

上述这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为**分段函数**. 生活中经常遇到用分段函数表示的问题. 例如，邮件重量与邮资的关系；货运行李重量与运费之间的关系等，都可用分段函数表示.

虽然分段函数表达式分几段，但它表示的是一个函数，其定义域是所有段中自变量取值的全体. 如取整函数 $f(x)=[x]$，狄利克雷函数 $D(x)$ 及符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，对应值域分别为整数集 $\mathbf{Z}$、有限集 $\{0, 1\}$ 与 $\{-1, 0, 1\}$.

1.1.3 函数定义域的确定

如果考虑函数关系的实际意义，则函数的定义域须满足实际要求；如果不考虑函数关系的实际意义，且函数关系是由数学式子给出时，那么函数的定义域就是使该式有意义的自变量的全体.

确定函数定义域时，首先应考虑以下几点.

(1) 分式的分母不为 0；

(2) 偶次方根下的式子非负；

(3) 取对数运算的量大于零；

(4) 取正切运算的量不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$；

(5) 取余切运算的量不等于 $k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$；

(6) 取反正弦运算的量、反余弦运算的量的绝对值小于等于 1.

【例 1.5】 求函数 $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{5}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域，并求函数值 $f(0)$ 与 $f(1)$.

解 要使函数有意义，必须满足

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1 \text{ 且 } 25-x^2\geqslant 0$$

即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|\leqslant 5$，从而 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5\leqslant x\leqslant 5$. 因此有 $-4\leqslant x\leqslant 5$. 于是函数的定义域为 $[-4, 5]$.

又因为 $0\in[-4, 5]$，$1\in[-4, 5]$，所以 $f(0)=-\arcsin\frac{1}{5}+5$，$f(1)=2\sqrt{6}$.

【例 1.6】 将直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的木料(如图 1－4所示)，求矩形截面两条边之间的函数关系及定义域.

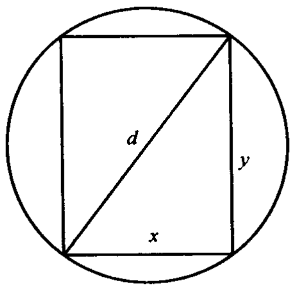

图 1－4

解 设截面矩形两条边长分别为 x 和 y，则有

$$x^2+y^2=d^2$$

解得

$$y=\pm\sqrt{d^2-x^2}$$

根据实际意义知，所求函数关系为 $y=\sqrt{d^2-x^2}$，定义域为 $D=\{x|0<x<d\}$.

1.1.4 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 定义在对称区间 $(-a, a)(a>0)$ 上，若 $x\in(-a, a)$ 时，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若 $x\in(-a, a)$ 时，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 及狄利克雷函数 $D(x)$ 是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 及符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1－5 所示；奇函数的图形关于坐标原点对称，如

图 1-6所示.

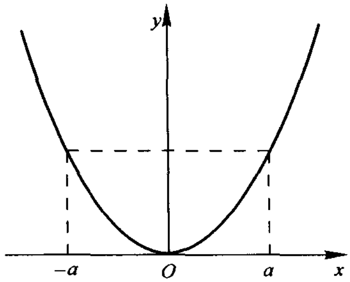

图 1-5

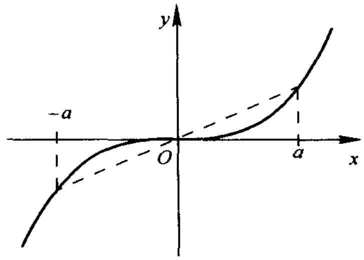

图 1-6

2. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的周期. 在 $f(x)$ 的所有周期中,若存在最小正数,则称这个正数为 $f(x)$ 的**最小正周期**. 通常所说的周期函数的周期均指最小正周期.

例如，函数 $y=|\sin x|$ 的周期为 π；函数$y=\cos\dfrac{\pi}{3}$的周期为 6π；函数 $y=x-[x]$的周期为 1，此函数又称为纯小数函数，其图形如图 1-7 所示.

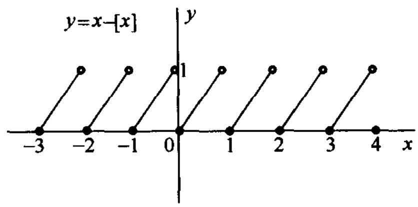

图 1-7

3. 函数的单调性

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的或称 $f(x)$ 是区间 I 内的**单增函数**；若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的或称 $f(x)$ 是区间 I 内的**单减函数**. 这两种函数统称为**单调函数**.

如果上述两个函数不等式去掉等号后也成立，则对应的函数分别称为 I 内的**严格单增函数**或**严格单减函数**.