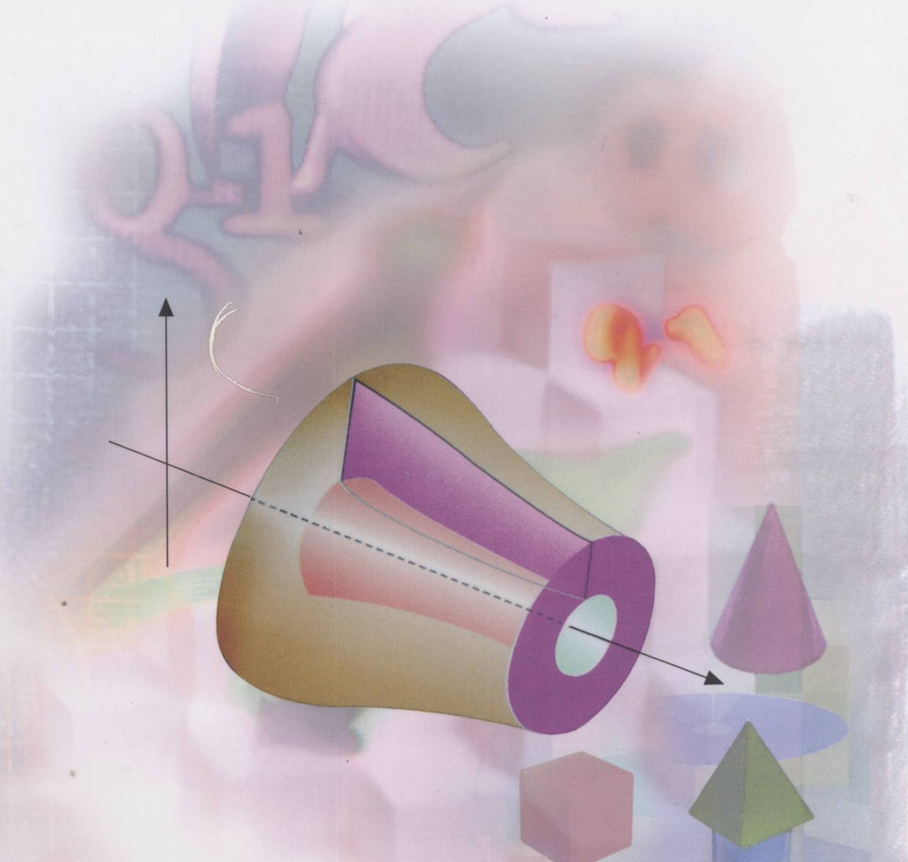
21世纪高等院校数学规划系列教材

主编 肖筱南

微积分

WEIJIFEN

编著者 曹镇潮 宣飞红 单福奎 李清桂



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校数学规划系列教材／主编　肖筱南

微　积　分

编著者　曹镇潮　宣飞红

单福奎　李清桂

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/曹镇潮,宣飞红,单福奎,李清桂编著. —北京:北京大学出版社,2009.8
(21世纪高等院校数学规划系列教材)
ISBN 978-7-301-05597-7

Ⅰ.微…　Ⅱ.①曹…　②宣…　③单…　④李…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 154061 号

书　　　名:微积分
著作责任者:曹镇潮　宣飞红　单福奎　李清桂　编著
责 任 编 辑:曾琬婷
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-05597-7/O·0546
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn　　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　20.5 印张　456 千字
2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—4000 册
定　　　价:32.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究
举报电话:(010)62752024　电子信箱:fd@pup.pku.edu.cn

内容简介

本书是《21世纪高等院校数学规划系列教材》之《微积分》.本书根据教育部颁发的《本科经济数学基础教学大纲》,紧紧围绕21世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题,并结合作者长期讲授经济数学微积分课程的成功教学经验编写而成.全书共分十章,内容包括:函数与极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分与定积分,多元函数微分学,二重积分,无穷级数,微分方程与差分方程等.每节配有习题,供布置作业使用;每章配有复习题,供复习提高使用;书末附有习题答案与提示,以便读者参考.

本书以实际例子与数形结合的方法引出微积分的一些基本概念、基本理论和计算方法.通过结构调整,适度降低抽象理论的难度,加强数学思维能力和应用能力的培养,以使内容更适合于经济类、管理类学生选用.

本书结构严谨,思路清晰,讲解透彻,阐述简明扼要,逻辑推理适度,注重直观描述和实际背景,叙述深入浅出、通俗易懂,例题丰富,便于教学与自学.

本书适用面广,既可作为高等院校经济类、管理类各专业本科生微积分课程的教材或教学参考书,也可作为自学成才读者的一本极为有益的无师自通的自学教材.

《21世纪高等院校数学规划系列教材》编审委员会

主　编　肖筱南

编　委　（按姓氏笔画为序）

许清泉　庄平辉　李清桂　杨世廞
周小林　单福奎　林大兴　林应标
林建华　宣飞红　高琪仁　曹镇潮
蔡忠俄

《21世纪高等院校数学规划系列教材》书目

高等数学(上册)	林建华等编著
高等数学(下册)	林建华等编著
微积分	曹镇潮等编著
线性代数	林大兴等编著
新编概率论与数理统计(第2版)	肖筱南等编著

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　　言

随着我国高等教育改革的不断深入，根据2009年教育部关于要求全国高等学校认真实施本科教学质量与教学改革工程的通知精神，为了更好地适应21世纪对高等院校培养复合型高素质人才的需要，北京大学出版社计划出版一套对国内高等院校本科大学数学课程教学质量与教学改革起到积极推动作用的《21世纪高等院校数学规划系列教材》. 应北京大学出版社的邀请，我们这些长期在教学第一线执教的教师，经过统一策划、集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了这套教材，其中包括：《高等数学（上册）》、《高等数学（下册）》、《微积分》、《线性代数》、《新编概率论与数理统计（第二版）》.

在结合编写者长期讲授本科大学数学课程所积累的成功教学经验的同时，本套教材紧扣教育部本科大学数学课程教学大纲，紧紧围绕21世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题，立足大学数学课程教学改革新的起点、新的高度狠抓了教材建设中基础性与前瞻性、通俗性与创新性、启发性与开拓性、趣味性与科学性、直观性与严谨性、技巧性与应用性的和谐与统一的“六突破”. 实践将会有力证明，符合上述先进理念的优秀教材，将会深受广大学生的欢迎.

本套教材的特点还体现在：在编写过程中，我们按照本科数学基础课要“加强基础，培养能力，重视应用”的改革精神，对传统的教材体系及教学内容进行了必要与精心的调整和改革，在遵循本学科科学性、系统性与逻辑性的前提下，尽量注意贯彻深入浅出、通俗易懂、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法. 既注重数学基本概念、基本定理和基本方法的本质内涵的辩证、多侧面的剖析与阐述，特别是对它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值的剖析，又注意学生基本运算能力的训练与综合分析问题、解决问题能力的培养，以达到便于教学与自学之目的；既兼顾教材的前瞻性，注意汲取国内外优秀教材的优点，又注意到数学基础课与相关专业课的联系，为各专业后续课程打好坚实的基础.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容，加强基础训练和基本能力的培养，本套教材紧密结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题，并做了深入的剖析与解答. 每节配有适量习题，每章配有复习题，以供读者复习、巩固所学知识；书末附有习题答案与提示，以便读者参考.

本套规划系列教材的编写与出版，得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持与帮助，刘勇副编审与责任编辑曾琬婷为本套教材的出版付出了辛勤劳动，在此一并表

示诚挚的谢意.

本书第一、三章由曹镇潮编写，第二、六章由单福奎编写，第四、五、七章由宣飞红编写，第八、九、十章由李清桂编写.全书先由蔡忠俄、宣飞红负责修改与统稿，最后由肖筱南负责审稿、定稿.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正!

编　者

2009 年 5 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，极限是研究函数的基本工具．本章由预备知识开始，复习中学阶段所学过的有关函数的内容，详细介绍了极限的概念、性质、计算方法，并由此导出函数连续的概念和连接函数在闭区间上的性质．它为从中学到大学数学学习的过渡起着承上启下的作用．

§1.1 函　　数

一、预备知识

1．实数与数轴

全体实数的集合，全体有理数的集合，全体整数的集合，全体自然数的集合及全体正整数的集合，习惯上分别用字母 $\mathbf{R}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}$ 及 $\mathbf{N}^+$ 来表示．

数轴是具有方向、原点和单位长度的有向直线，实数与数轴上的点是一一对应的，所以数 x_0 与点 x_0 意义相同．

2．区间与邻域

设 $a<b$，则有

开区间　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 或 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$．

无穷区间

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}；$$

类似可定义无穷区间 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$；

特别地，$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ 表示全体实数．

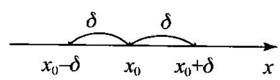


图 1-1

定义 1　设 $\delta>0$，开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U_\delta(x_0)$，其中点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**（如图 1-1）．

开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点 x_0 的左 δ 邻域；开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右 δ 邻域. 把$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ **空心邻域**，记为$\mathring{U}_\delta(x_0)$.

3. 绝对值不等式

常用的绝对值不等式有

$$|x|\geqslant 0;\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|;\quad |x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\text{，其中 }a>0;$$

$$|x|+|y|\geqslant |x+y|;\quad ||x|-|y||\leqslant |x-y|.$$

邻域 $U_\delta(x_0)$ 可用绝对值不等式表示为 $|x-x_0|<\delta$，空心邻域$\mathring{U}_\delta(x_0)$表示为 $0<|x-x_0|<\delta$.

4. 平均值不等式

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正数，则其算术平均值不小于其几何平均值，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

5. 几个常用等式(公式)

(1) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

(2) $(a+b)^n=a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$，其中

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\quad (k=0,1,\cdots,n);$$

(3) $$\sin x-\sin x_0=\sin\left(\frac{x+x_0}{2}+\frac{x-x_0}{2}\right)-\sin\left(\frac{x+x_0}{2}-\frac{x-x_0}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2};$$

(4) $$2\sin a\sin b=(\cos a\cos b+\sin a\sin b)-(\cos a\cos b-\sin a\sin b)$$
$$=\cos(a-b)-\cos(a+b);$$

(5) $$2\sin a\cos b=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)$$
$$=\sin(a+b)+\sin(a-b).$$

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义 2 设 X 是一个非空实数集合，如果 $\forall x\in X$(读做任意给定 X 中的一个元素 x)，按照某一确定的对应法则 f，都存在唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称该对应法则 f 是定义在 X 上的**函数**，记为 $y=f(x),x\in X$，其中 x 称为函数的**自变量**，x 的取值范围 X 称为函数的**定义域**，记为 D_f；y 称为函数的**因变量**，y 的取值范围称为函数的**值域**，记做 Z_f，即 $Z_f=\{y|y=f(x),$

$x\in X\}$.

定义域和对应法则是函数定义中的两个要素.求定义域的常用依据有：

(1) 偶次根式$\sqrt[2n]{f(x)}$要求被开方数 $f(x)\geqslant 0$；

(2) 分式$\dfrac{g(x)}{f(x)}$要求分母 $f(x)\neq 0$；

(3) 对数 $\log_a f(x)$要求真数 $f(x)>0$；

(4) 反正弦(或反余弦)函数 $\arcsin f(x)$(或 $\arccos f(x)$)要求$|f(x)|\leqslant 1$.

2. 基本初等函数

最简单的函数是下面的基本初等函数.基本初等函数是指下列六类函数：

(1) **常数函数** $y=C$(C 为常数).

(2) **幂函数** $y=x^a$(a 为实数),$x\in X$,X 随 a 而异,但在$(0,+\infty)$上总有定义.

(3) **指数函数** $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,$D_f=\mathbf{R}$,$Z_f=\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$.

(4) **对数函数** $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,$D_f=\mathbf{R}^+$,$Z_f=\mathbf{R}$.

以 e(e $\approx$2.71828)为底的对数称为**自然对数**.自然对数函数记为 $y=\ln x$.

(5) **三角函数**：

正弦函数 $y=\sin x$,$D_f=\mathbf{R}$,$Z_f=[-1,1]$.

余弦函数 $y=\cos x$,$D_f=\mathbf{R}$,$Z_f=[-1,1]$.

正切函数 $y=\tan x$,$D_f=\left\{x\,\middle|\,x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$Z_f=\mathbf{R}$.

余切函数 $y=\cot x$,$D_f=\{x\,|\,x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\}$,$Z_f=\mathbf{R}$.

还有**正割函数** $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和**余割函数** $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) **反三角函数**：

反正弦函数 $y=\arcsin x$,$D_f=[-1,1]$,$Z_f=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x$,$D_f=[-1,1]$,$Z_f=[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x$,$D_f=\mathbf{R}$,$Z_f=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,$D_f=\mathbf{R}$,$Z_f=(0,\pi)$.

以上四个反三角函数的图形(它们的图形分别与其对应的三角函数的图形关于直线 $y=x$ 为对称)如图 1-2 所示.

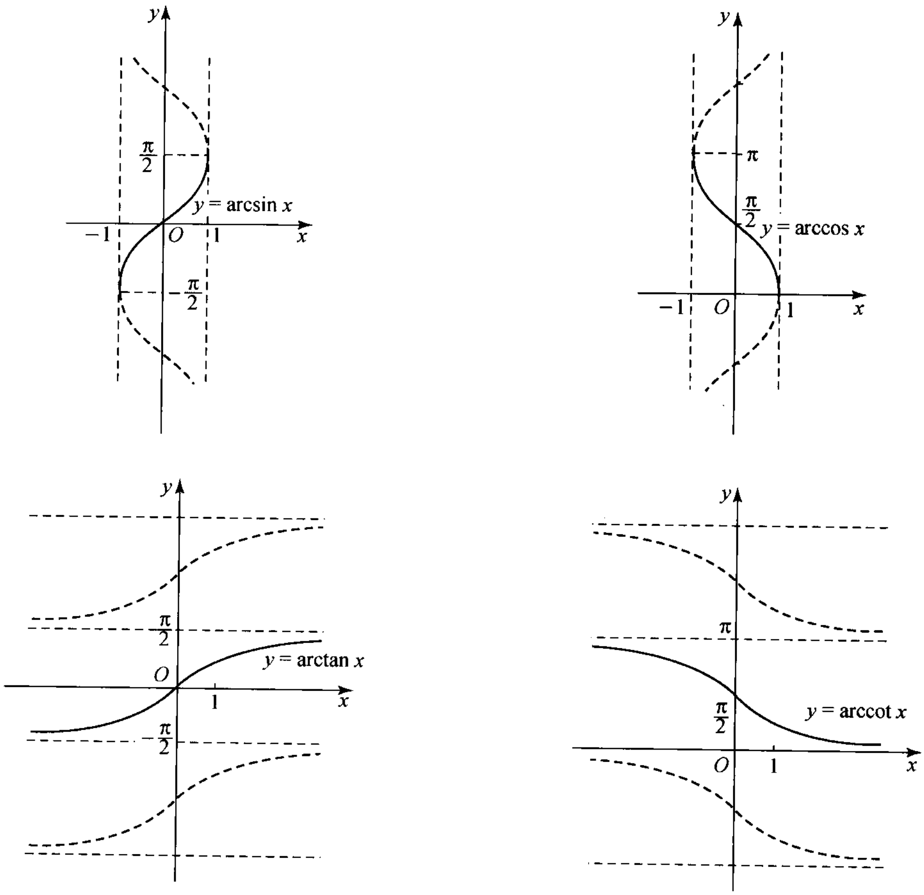


图 1-2

3. 分段函数

如果一个函数在其定义域的不同部分要用不同的数学式子来表示,这样的函数称为**分段函数**. 以下两个例子都是分段函数.

例 1　取整函数 $y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1, n\in \mathbf{Z}$(如图 1-3).

如 $[2.7]=2,[-2.7]=-3$. 一般地,有$[x]\leqslant x<[x]+1$.

例 2　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $D_f=\mathbf{R}, Z_f=\{-1,0,1\}$(如图 1-4).

对于任意实数 x,都有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$ 成立.

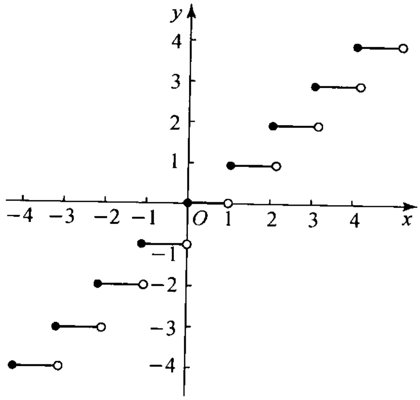


图 1-3

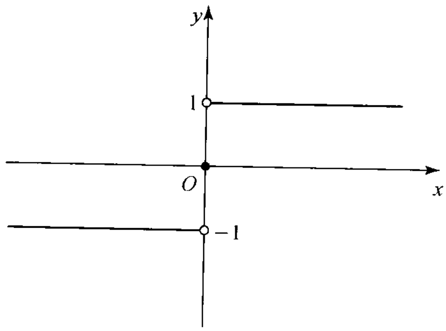


图 1-4

分段函数的定义域是各段定义域的并集. 如上述例 1 中，$D_f=\mathbf{R}$. 分段函数的函数值要按照各段不同定义域的对应关系来求得，例如，设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $D_f=[-1,1]$，$f(0)=0+1=1$，而不能为 $f(0)=0^2=0$.

4. 反函数

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，如果 $\forall y\in Z_f$，都有唯一确定的 $x\in D_f$ 与 y 对应，且满足 $y=f(x)$，这样就得到一个以 Z_f 为定义域和以 y 为自变量的函数，它称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z_f$. 有时也把 $y=f(x)$ 称为 $x=f^{-1}(y)$ 的**直接函数**.

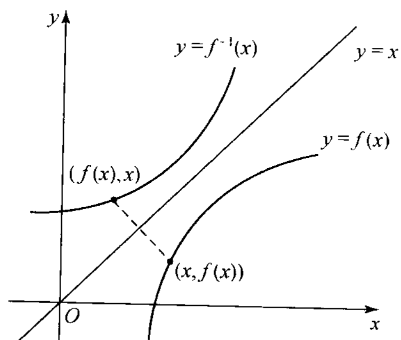


图 1-5

由于习惯上常用 x 作为自变量，用 y 作为因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$.

我们特别要强调两点：一是反函数的定义域等于其直接函数的值域，而反函数的值域等于其直接函数的定义域；二是在平面直角坐标系 Oxy 中，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（如图 1-5）. 例如，要作 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\in\mathbf{R})$ 的图形，可以先作 $y=x^3$ 的图形，再作此图形关于直线 $y=x$ 的对称图形即可. 再如，要作 $y=\arctan x\,(x\in\mathbf{R})$ 的图形，可先作 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的图形，再作此图形关于直线 $y=x$ 的对称图形即可.

那么，满足什么条件的函数才存在反函数呢？从反函数的定义中可看出，$y=f(x)$ 具有

反函数的充分必要条件是其定义域 D_f 中的点与其值域 Z_f 中的点是一一对应的. 由于严格单调函数具有这种性质,所以严格单调的函数必存在反函数(严格单调函数的定义见本节下面的定义 5).

例如, $y=x^2, D_f=\mathbf{R}, Z_f=[0,+\infty)$, 对于点 $y_0\in(0,+\infty)$, 可对应两个点 $x_1=\sqrt{y_0}$ 和 $x_2=-\sqrt{y_0}$, 因此该函数不存在反函数. 可以证明,该函数不是严格单调函数. 但是函数 $y=x^2, D_f=[0,+\infty), Z_f=[0,+\infty)$ 是严格单调增加函数,因此它必存在反函数 $x=\sqrt{y}$, 或记为 $y=\sqrt{x}$.

再如,函数 $y=\sin x\left(D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], Z_f=[-1,1]\right)$ 是严格单调增加函数,它的反函数是 $y=\arcsin x\left(D_{f^{-1}}=[-1,1], Z_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$; 函数 $y=\tan x\left(D_f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), Z_f=\mathbf{R}\right)$ 是严格单调函数,它的反函数是 $y=\arctan x\left(D_{f^{-1}}=\mathbf{R}, Z_{f^{-1}}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

注 若函数 $f(x)(X\in D_f)$ 存在反函数 f^{-1}, 则

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D_f;\quad f(f^{-1}(x))=x,\ x\in D_{f^{-1}}.$$

例如

$$\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];\quad \sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1,1].$$

设函数 $y=f(x)$ 存在反函数,求其反函数的步骤是:从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$, 再把 x 与 y 互换即可. 以下求反函数的例中,假设反函数存在.

例 3 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(x\in\mathbf{R})$ 的反函数.

解 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 得 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$, 于是

$$-y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x),\quad 得\quad e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x,$$

从而得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$, 即求得反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in\mathbf{R}$.

5. 复合函数

定义 4 设函数 $y=f(u), u\in D_f, y\in Z_f, u=g(x), x\in D_g, u\in Z_g$. 如果 $D_f\cap Z_g\neq\varnothing$, 则可确定一个函数 $y=f(g(x))$, 称其为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**,其因变量为 y, 自变量为 x, 定义域为 $D=\{x\mid g(x)\in D_f\}$, 而其中的 u 称为**中间变量**. 事实上,复合函数 $y=f(g(x))$ 是将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$ 而得到的. 通常称 $f(u)$ 是**外层函数**, $g(x)$ 为**内层函数**.

由复合函数的定义可知,并不是任何两个函数都能复合成复合函数. 例如,函数

$$y=f(u)=\ln(u^2-1),\quad u\in D_f=\{u\mid |u|>1\}$$

与

$$u=g(x)=\sin x,\quad x\in D_g=\mathbf{R},\quad u\in Z_g=\{u\mid |u|\leqslant 1\}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com