

青年数学叢書

擺 綫

別 尔 曼 著

中国青年出版社

青年数学叢書

擺

綫

別 尔 曼 著
高 徹 閻喜傑 譯

中国青年出版社

一九五六年 北京

攝 綫

〔蘇〕別爾曼著

高郁 國嘉傑譯

*

中國青年出版社出版

（北京東四12條老君堂11號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第016號

中國青年出版社印刷廠印刷

新華書店總經售

*

787×1092 1/32 4印張 61,000字

1956年5月北京第1版 1956年5月北京第1次印刷

印數1—8,000

統一書號：13009·8

定價(7)三角六分

序

在这本小冊子裏，我們要講一條叫做“擺綫”的重要曲綫和它的一些同類曲綫的性質。

為什麼從許許多多各種各樣的曲綫裏，我們單單選取擺綫呢？這有兩個原因。

第一，擺綫對於機械有着非常重要的意義。齒輪的齒的縱斷面，好多類型的偏心輪、偏凸輪以及別的機器零件的輪廓就是這種曲綫。每一個繪圖員都應該熟悉擺綫和擺綫形的曲綫。從它的實用價值來說，擺綫是可以和橢圓、拋物綫、彈道綫等相提並論的。

第二，擺綫形曲綫是試金石，在十七世紀產生並在該世紀末形成了微積分的那種新的計算方法和新的數學思想，在這種試金石上受到了考驗。現在每一個中學生所熟知的人物，像伽利略、托里拆利和惠更斯，都曾經研究過這種重要的曲綫。

書裏的敘述非常淺顯，每一個高中學生、技術人員、大學生和大多數的熟練工人都可以了解。但是，要使很多人覺得容易接受，敘述就必然有些不夠嚴正，也就不能像數學教科書那樣簡潔扼要了。

在這裏，自然會發生一個問題：既然擺綫的性質可以非常簡短地用高等數學——微積分來說明，為什麼還要用冗長而

又不能完全使人信服的初等數學方法來敘述呢？人們可能會說：“對那些不預備學高等數學的人，擺綫的性質本來未必會使他們感到興趣；而那些對精密科學和技術有興趣的人，等個兩三年進了專門學校或大學就可以學到了。”

對這個問題，我們可以這樣回答：有許多部門的人，他們對於跟機械有關係的科學問題很有興趣，但是並不懂高等數學，對於這些人來說，也許就很想懂得對機械這樣重要的這種曲綫的性質。而對於那些準備將來學習高等數學的人，先在中學裏熟悉了那些事實、那些方法，以及曾經為高等數學的產生出過力的那些科學家，正可以使他們將來能夠更好地去領會高等數學中的觀念和方法，這也是有好處的。

我們要預先告訴技術青年們：“擺綫”是一本數學書而不是技術書，是一本讀物而不是教本。書裏面對機械的應用只是粗具輪廓。但是，它對於技術人員也許不無用處；本來，沒有理論的實踐就是盲目的實踐。基本上說，這本書是為數學愛好者和中學裏（高年級的）的數學小組寫的。

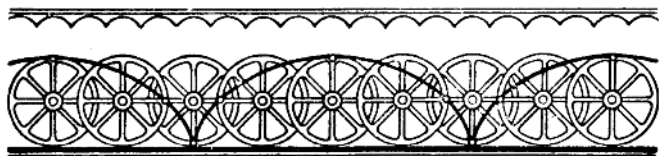
許多人都對數學都懷着敬意，但是總歸不大願意跟它接近。假使這本小冊子對消除這種奇怪的偏見有些幫助的話，即使幫助很少，作者也將引為榮幸。

對促進本書的寫作和出版的所有人士，致以衷心的謝意。

作者

目次

第一章 車輪產生出來的曲綫	1
兩個騎自行車人的談話(1) 擺綫究竟是什麼?(7) 簡短的歷史介紹(11)	
第二章 擺綫的最重要性質	17
擺綫的切綫和法綫(17) 擺綫的幾何定義(24) 擺綫的伴隨曲綫和它的發現(28) 擺綫的面積, 伽利略定理(32) 擺綫的進一步性質(35)	
第三章 擺綫族	42
短擺綫和長擺綫(42) 外擺綫(46) 心臟綫, 蚌綫(52) 內擺綫(58) 具有無窮多個拱弧的外擺綫(64)	
第四章 漸屈綫和漸伸綫	69
漸伸綫(69) 漸伸綫的基本性質(71) 圓的漸伸綫(75) 中史數學家(79) 擺綫的漸伸綫, 擺綫的弧長(82)	
第五章 最好的擺	89
克里斯坦·惠更斯和他的發明(89) 擺鐘, 為什麼普通擺(圓周擺)不好?(90) 惠更斯的“陶塔赫隆娜”曲綫(93) 擺綫擺(99)	
第六章 奇妙的冰山	102
關於最速降綫問題(102) 光學的巡禮, 鞍點的光綫(108) 再談擺綫(115)	
結語	119



第 一 章

車輪產生出來的曲線

笨熊騎在自行車上走路……

丘科夫斯基

兩個騎自行車人的談話

我的朋友——九年級學生^①瓦夏和物理系學生謝爾該，是自行車運動的愛好者。有一次，他們兜風回來，曾經進行這樣的談話。

謝爾該：瓦夏，你想，自行車是不是會把附在它後輪上的泥漿甩開來濺在騎車人的身上？

瓦夏：當然啦！在稀泥道上偶爾降低速度的時候，那些飛濺的泥點就常常落到背上。

謝爾該：為什麼會這樣呢？這事你想過嗎？據你的意見，從車輪邊緣上飛開來的泥漿應該是怎樣動的？朝什麼方向動的？

①

① 相當於我國的高中二年級學生。——譯者註

瓦夏：讓我想想。唉！想不出來……

謝爾該：那末讓我來提醒你吧。假使任一個質點被迫沿着曲線運動，但是突然可以自由運動了，那末它依照慣性，就會保持着“解除束縛”那一瞬間具有的速度的大小和方向，依着運動軌線的切線方向運動。明白嗎？

瓦夏：不完全明白。我忘記了軌線是怎樣一回事。

謝爾該：質點運動的曲線，就叫軌線。

瓦夏：對！對！現在完全明白了。

謝爾該：你試把這條規律運用到我們的情況看。

瓦夏：為什麼？

謝爾該：你會得出意外的結果。

瓦夏：好吧。（一邊在想。）假設小泥點走的路線是這樣的，（瓦夏當場就畫了一張畫，樣子像我們的圖1，只是他畫的自行車比圖上的要壞得很多。）那末，從A點飛出來的小泥點就要依着車輪邊緣的切線方向運動，因而就畫出這樣一條

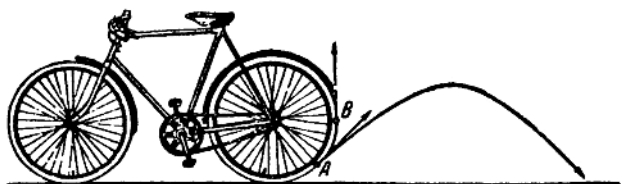


圖1. 對嗎？

曲線（他指了一下）。若是把石子斜斜地扔出去，它也照着同這一樣的路線飛出去。

謝爾該：這條曲線叫做拋物線。

瓦夏(接下去): 即使泥漿在車輪上黏得牢一些, 一直升高到 B 點(圖 1)才甩出來, 也不會趕上騎車人; 因為它將要垂直向上運動。而再上面一點的泥漿就不會往上甩了。有遮泥板把它擋住了。

謝爾該: 假使騎車人減低速度, 又會怎麼樣?

瓦夏: 騎車人即使完全停下來, 泥漿無論怎樣總碰不到他……這個結論多荒唐! 泥漿不是明明會落到背上來嗎!

謝爾該: 我說過, 要得出意外的結果來的!

瓦夏: 究竟是怎麼回事兒? 我弄不明白……

謝爾該: 問題完全就在你判斷得不正確。你更仔細地看一下車輪的運動(圖 2)。假設車輪是向右轉動的。(謝爾

該畫了一個車輪,

見圖 2 的左邊一

個, 又畫了一個繞

軸心向右轉的箭頭

v 。)我們假定騎車

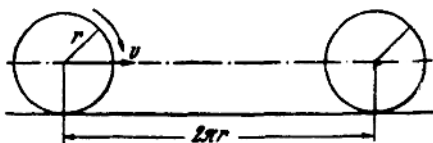


圖 2. 自行車輪的複合運動

人的速度是 v 公尺/秒, 車輪的半徑是 r 公尺。當車輪的軸心向前走的距離等於車輪的圓周長, 也就是等於 $2\pi r$ 的時候, 車輪才整個轉了一周(圖 2)。我們用 x 來代表車輪轉一周需要花的時間。於是得:

車輪軸心前進 $2\pi r$ 公尺需要花時間 x 秒,

車輪軸心前進 v 公尺需要花時間 1 秒。

因此:

$$x = \frac{2\pi r}{v} \text{ 秒.}$$

这样說來，車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒；那末它一秒鐘轉幾周呢？

瓦夏：讓我自己來算。設 y 是車輪每秒鐘轉的周數。現在要列一個比例式。我們這樣來看：

車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒，

它轉 y 周要花 1 秒。

我們就得到比例式：

$$1 : y = \frac{2\pi r}{v} : 1.$$

對吧？

謝爾說：對！

瓦夏：那就是說，每秒鐘轉 $y = \frac{v}{2\pi r}$ 周！

謝爾說：不錯！我們現在可以看出，自行車車輪做的是複合運動：它以 v 公尺/秒的勻速度向前進，而同時又在做每秒 $\frac{v}{2\pi r}$ 周的轉動。來，記記看，假使有一點同時在做兩種運動，這一點的速度怎樣求？

瓦夏：這個我知道！用平行四邊形的方法把兩種運動的速度合起來。

謝爾說：對！我們現在來看車輪邊緣上某一點 A 在某一瞬間的運動（圖 3）。這一點一方面在做向前推進的運動，——也就是說，它具有水平速度 v 公尺/秒。但是這同一點也在做旋轉運動，它本身還具有第二個速度。這個速度怎樣算法

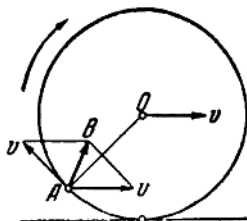


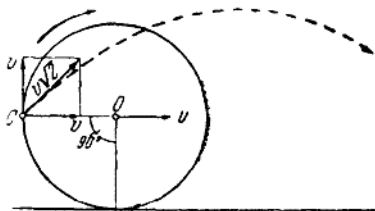
圖 3. 前進運動和旋轉運動速度的合成

呢？

瓦夏：我現在就來算。在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周。車輪轉一周，邊緣上的 A 點走的路程等於輪周的長度，也就是 $2\pi r$ 公尺。這就是說，在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周，A 點就走 $\frac{v}{2\pi r} \cdot 2\pi r = v$ 公尺。看來這第二個速度也是 v 公尺/秒。

謝爾談：正是這樣。

在車輪轉動的時候，邊緣上這點的速度也等於 v 公尺/秒；但是前進運動的速度是沿着水平方向的，而這第二個速度却是沿着



車輪邊緣的切綫方向的。圖 4. 從車輪上跳出的泥漿所經的路徑合起來的速度就得沿着這個等邊平行四邊形的對角綫（也就是菱形的對角綫）的方向，像圖 3 指示的那樣：箭頭 AB）。清楚嗎？

瓦夏：清楚了。

謝爾談：現在，瓦夏，你來看一下圖 4 上到達位置 C 的泥漿。它的速度是由兩個速度合成的，一個是水平速度 v ，另一個是豎直速度，也等於 v 。合成的速度就等於 $v\sqrt{2}$ （按照畢達哥拉斯定理^①），而它的方向和水平方向成 45° 的仰角。

泥漿點就像跟水平方向成 45° 角向上拋出去的石子一樣

① 這條定理，在歐洲相傳是希臘的幾何學家畢達哥拉斯首先發現的，所以稱為畢達哥拉斯定理；但是在我國古算書“周髀算經”中，商高就已經知道了“勾方加股方，開方後得弦”，所以我們通常把它稱為“勾股弦定理”。——譯者註

運動（見圖 4 上用虛綫画出的拋物綫）。根据慣性，它仍然繼續保持着水平方向的分速度 v_0 。它是不是會濺到騎車人身上呢？

瓦夏： 不會。

謝爾該： 如果騎車人降低了速度呢？

瓦夏： 這時候泥漿點就落到他背上來了！

謝爾該： 事實上是這樣的嗎？

瓦夏： 是的。三號那天，我騎車回來就濺了一背脊泥。

謝爾該： 這就是說，你全明白了？

瓦夏（想了一下）： 不，還沒有呢！我現在還很糊塗！在圖 4 上可以清楚地看到，速度的方向並不是沿着車輪邊緣的切綫方向，而是要偏一些的。起初我們就說過，泥漿點的速度必然是沿着軌綫的切綫方向的。你自己曾經說過這話。

謝爾該： 是什麼東西的運動軌綫呢？

瓦夏： 當然是車輪邊緣上我們說的那一點。

謝爾該： 完全對！它也就是沿着這條軌綫的切綫方向。

瓦夏： 我不懂。依我看，圖 3 和圖 4 就跟這件事發生矛盾。

謝爾該： 一點也不。你想想看。

現在我們跟謝爾該和瓦夏一起來想一下，這個表面上的矛盾有什麼根據。我們來想一下，當自行車運動時，車輪邊緣上的每一個點画出什麼樣的軌綫（什麼樣的曲綫）。用幾何學

⊖ 為了使計算簡單，我們沒有把空氣的阻力考慮進去。這並不會使結果過分不正確。

的語言來說，——我們要弄清楚，在一個沿直綫滾動但無滑動的圓上面的每一個點，画出什麼樣的曲綫。泥漿點不是沿着車輪邊緣的切綫方向運動，而正是沿着這一條曲綫的切綫方向運動的。

擺綫究竟是什麼？

自行車車輪的軸心沿着直綫在均勻地運動。車輪本身在均勻地轉動。這時候，車輪邊緣上每一個點画出什麼樣的曲綫呢？如果軸心不動，那麼車輪上所有的點画的都是圓。但是軸心也在運動，因而相應的圓就“擴展起來”，“拉長起來”了。我們現在來研究沿直綫滾動但無滑動的圓上面的點画出的曲綫。這種曲綫就叫做擺綫。

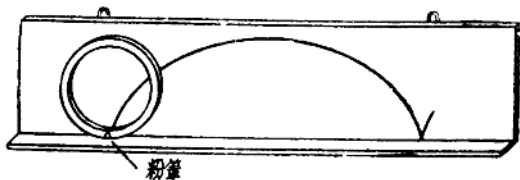


圖 5. 說明擺綫的教學用品

我們先來做一個試驗。我們從膠合板上鋸下或者從厚紙板上剪下一個圓片，在這個圓片的邊上用錐子刺一個小孔，然後在小孔內放一小段筆鉛。把一支尺放在一張紙上，我們就拿這小圓片緊緊地壓在紙上，然後使它沿着這支尺滾動。那一小段筆鉛就會画出我們的擺綫。圖 5 上画的是一種教學用品，在課堂上講到擺綫的時候，就可以用它來幫助說明。它是

一塊可以豎直掛起來的黑板，下邊安着一條水平的邊板。沿這條邊板滾動着一個厚實的鐵環，很像小孩子們喜歡“滾玩”的那種鐵環。鐵環上有一個小孔，這裏可以放一小段粉筆。當鐵環沿邊板滾動的時候，粉筆就畫出一條擺綫。在圖 5 上可以看到這條美麗的曲線的形狀。

現在我們來“一點一點”地畫出這條擺綫來。我們要把這條曲線作得尽可能精確。引直綫 AB (圖 6)，在直綫左端畫一個半徑 a 的圓，跟直綫 AB 在 K 點相切。最簡單的方法是這樣：在跟直綫 AB 相距 a 的地方引一條直綫 MP ，平行於 AB (這條直綫對我們來說是必需的)。在離綫段 MP 左端不遠的地方標出一點 O ，用 O 作圓心、用 a 作半徑畫一個圓。這個圓一定跟直綫 AB 相切。切點用字母 K 標出。

現在，我們在直綫 AB 上從 K 點往右截取一段綫段，長度等於半徑 a 的圓周。大家知道，要用圓規和直尺把這綫段精確地做出來是不可能的。只好用近似作圖。如果一個圓的

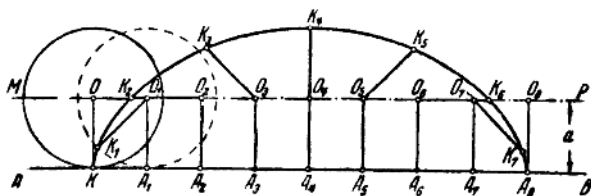


圖 6. 一點一點地來畫擺綫

半徑等於 a ，那末它圓周的長就是 $2\pi a$ ，也就是說接近於 $6\frac{2}{7}a$ 或 $6.28a$ 。假設我們是在離直綫 AB 4 厘米的地方引直綫 MP 的。這就是說，我們具有 $a=4$ 。因此，我們必須在 AB 上截

取長等於 4×6.28 , 也就是 25.1 厘米的綫段 $\ominus$. 這綫段的末端用 A_8 標出.

現在我們設想, 剛才所作的圓沿着直綫 AB 在滾動. 它的圓心沿着直綫 MP 移動. 截取綫段 OO_8 等於 KA_8 , 把 OO_8 分成八等分. 點 O_1 (第一分點) 处在相當於圓周長 $\frac{1}{8}$ 的地方. 當圓心 O 移動到 O_1 時, 半徑 OK 轉動了 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$. 作角 $A_1O_1K_1$ 等於 45° , 並作綫段 O_1K_1 等於 OK . 點 K_1 一定在擺綫上. 用虛綫畫出在圓周 $\frac{1}{8}$ 相應位置上的圓.

現在我們來看看轉了 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 圓周的圓心 O_2 . 我們完全照上面說的情形一樣來作圖, 只是角 $A_2O_2K_2$ 等於 $2 \cdot \frac{360^\circ}{8} = 90^\circ$. 我們得到擺綫上的點 K_2 . 為了得到圓心在 O_3 時擺綫上的點, 我們作等於 $3 \times \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$ 的角, 並作綫段 O_3K_3 等於 OK .

點 K_4, K_5, K_6, K_7 的作法就很清楚了. 顯而易見, 點 K_8 和點 A_8 重合. 把所有用這種方法得到的點用一根平滑曲綫 (隨手) 連起來, 我們就得到了一條擺綫. 假使得到的曲綫顯得不夠平滑, 讀者可以自己考慮怎樣來作出中間的那些點. 比如說, 從一開始就可以把基本綫段 (滾動圓的周長) 不分成

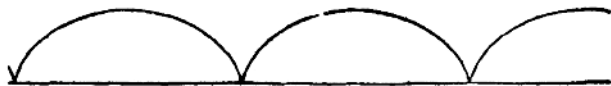


圖 7. 擺綫的一般形狀

$\ominus$ 書裏的圖 6 是按比例 1:4 畫的——在圖上 $a=1$ 厘米. 我們建議讀者畫一個更大一些的圖, 像正文裏說的那樣 ($a=4$ 厘米).

八分，而分成 12 分。这样就不用作等於 45° , 90° , 135° 等等的角，應該作等於 30° , 60° , 90° , 120° 等等的角了。

我們建議讀者來練習作各種大小（半徑 a 等於各種數值）的擺綫，並且用各種數目來劃分輔助分點。

我們要注意，和直綫一樣，我們要想像擺綫是一條無限曲綫。我們假定，這個圓（它叫做母圓）沿着直綫（準綫）滾到無限遠。這時候就得到一條由無限多個拱弧組成的曲綫（在圖 7 上我們畫了兩個完全的拱弧和第三個拱弧的一部分）。一個個的拱弧都在具有公切綫（豎直的）的那種點（尖端）連接起來。這種點叫做擺綫的歧點（圖 8）。它們就對應於在滾動的圓上我們所注意的描出擺綫那一點的最低位置。最高的位置恰好在兩個歧點的中間；這些“最高的”點就叫做擺綫的頂（在圖 6 上，擺綫的一個頂是在點 K_4 ；你試指出圖 7 上所有的頂）。兩個相鄰的歧點中間的直綫段，長等於 $2\pi a$ ，叫做擺綫的底（更精確些說，是擺綫的一個拱弧的底）。

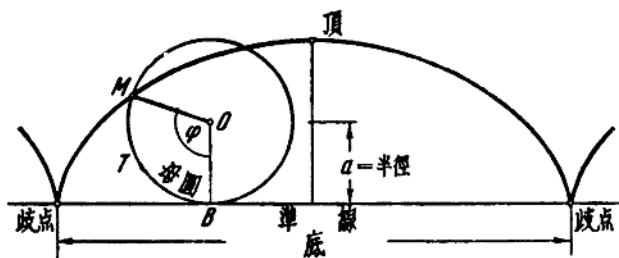


圖 8. 擺綫的各個要素（畫的是一個拱弧）

在研究擺綫的時候到底會發生些什麼問題呢？首先，必

須給它一个跟力学無關的純粹的幾何定义。其次，必須研究它的性質，学会作它的切綫，計算它的弧長、它的拱弧跟底所圍的面積、它的拱弧繞準綫旋轉所成的旋轉体的体積。順便我們还研究擺綫的同族曲綫，熟悉它們純粹在幾何学上的应用，以及它們在隣近部門的应用。但是在談到所有这些之前，我們先來作一个簡短的歷史介紹。

簡短的歷史介紹

著名的意大利天文学家、物理学家和啓蒙運動者伽利略（1564—1642）是開始研究擺綫的第一人。他又創造了“擺綫”这个名称，意思就是：“联想到圓”的曲綫。伽利略本人關於擺綫沒有寫过什麼，但是他的学生和繼承者維維安尼、托里拆利等人却曾經提到他在这方面的工作。托里拆利是著名的物理学家，气压計的發明者，他對於數學也曾經花了不少功夫。在文藝復興時代，還沒有狹隘的專門学者。有天才的人既研究哲学，也研究物理学和數學，並且处处得到了有趣的結果和做出了出色的發明。法國人从事擺綫的研究比意大利人要稍稍晚一點。1634年，著名的衡量制發明者罗別尔瓦里算出了擺綫的拱弧和它的底所圍的面積。關於这些事情的詳情，以及另外一些跟擺綫有關的学者們的發現，我們放到後面去細談。現在我們要花一點篇幅來談談可以說是擺綫的前期歷史，就是古代哲人們的一些值得注意的研究；我們可以看到，这些研究是对擺綫很有關係的。

偉大的古代哲学家、“邏輯学之父”、斯塔吉尔人亞里士多